



广义 Hersch-Pfluger 偏差函数的单调性及不等式

王 飞¹, 周培桂²

(1. 浙江机电职业技术学院数学教研室, 杭州 310053; 2. 浙江理工大学科技与艺术学院, 浙江上虞 312300)

摘 要: 借助单调性 l'Hôpital 法则等分析工具, 揭示广义 Hersch-Pfluger 偏差函数、反双曲正切函数、初等函数的组合单调性, 并建立广义 Hersch-Pfluger 偏差函数精确不等式。此外, 通过 Hüber 函数分析性质获得 Hersch-Pfluger 偏差函数的单调性和不等式, 从而改进 Ramanujan 模方程解的已知估计。

关键词: 精确不等式; Ramanujan 模方程; 广义 Hersch-Pfluger 偏差函数; 反双曲正切函数

中图分类号: O174

文献标志码: A

文章编号: 1673-3851 (2019) 07-0517-05

Monotonicity and inequalities for generalized Hersch-Pfluger distortion function

WANG Fei¹, ZHOU Peigui²

(1. Teaching Section of Mathematics, Zhejiang Institute of Mechanical and Electrical Engineering, Hangzhou 310053, China; 2. Keyi College of Zhejiang Sci-Tech University, Shangyu 312300, China)

Abstract: In this study, the monotonicity properties of combinations of generalized Hersch-Pfluger distortion function, inverse hyperbolic tangent function and elementary functions are mainly analyzed with monotone l'Hôpital rule, and precise inequalities of generalized Hersch-Pfluger distortion function are established. Besides, the monotonicity properties and inequalities of Hersch-Pfluger distortion function are figured out via property analysis with Hüber function, so as to improve the known estimates of solutions of Ramanujan modular equations.

Key words: precise inequalities; Ramanujan modular equation; generalized Hersch-Pfluger distortion function; inverse hyperbolic tangent function

0 引言

在本文中, arthr 表示反双曲正切函数。对于正实数 x 和 y , Γ -函数、 B -函数以及 ψ -函数分别定义^[1]为:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$
$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

令 $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right] = 0.57721566 \dots$, 是 Euler-Mascheroni 常数, 则

$$\psi(1) = -\gamma \quad (1)$$

$$\psi(1/2) = -\gamma - \ln 4 \quad (2)$$

在 $(0, \infty) \times (0, \infty)$ 上定义 Ramanujan 常数^[2-3]为:

$$R(a, b) = -\psi(a) - \psi(b) - 2\gamma \quad (3)$$

当 $b = 1 - a$ 时, 式(3)记为

收稿日期: 2018-12-14 网络出版日期: 2019-02-28

基金项目: 浙江省教育厅科研项目 (Y201635387, Y201840023); 浙江机电职业技术学院科研项目 (A027117021); 浙江省高等学校访问学者项目 (FX2018093)

作者简介: 王 飞 (1985—), 男, 陕西渭南人, 讲师, 硕士, 主要从事拟共形映射、特殊函数方面的研究。

$$R(a) = R(a, 1-a) = -\psi(a) - \psi(1-a) - 2\gamma,$$

结合式(2)–(3)知 $R\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \log 16$ 。

给定实数 $a, b, c (c \neq 0, -1, -2, -3, \dots)$, 高斯超几何函数定义^[4]为:

$$F(a, b; c; z) = {}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a, n)(b, n)}{(c, n)} \frac{z^n}{n!}, |z| < 1 \quad (4)$$

这里, 当 $n \in \mathbb{N}$ 时, $(a, n) = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)$, 且 $(a, 0) = 1$ 。

当 $a \in (0, 1), r \in (0, 1)$ 记 $r' = \sqrt{1-r^2}$, 第一类、第二类广义椭圆积分分别定义^[5]为:

$$\begin{cases} K_a = K_a(r) = \frac{\pi}{2} F(a, 1-a; 1; r^2) \\ K'_a = K'_a(r) = K_a(r') \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} E_a = E_a(r) = \frac{\pi}{2} F(a-1, 1-a; 1; r^2) \\ E'_a = E'_a(r) = E_a(r') \end{cases} \quad (6)$$

因广义椭圆积分关于参数 a 的对称性, 本文只考虑 $a \in (0, 1/2)$ 的情形。特别地, 当 $a = 1/2$ 时, $K_{1/2}(r) = K = K(r)$ 与 $E_{1/2}(r) = E = E(r)$ 分别为第一类和第二类完全椭圆积分。

广义 Grötzsch 环函数 $\mu_a: (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$ 定义^[5]为:

$$\mu_a(r) = \frac{\pi}{2\sin(a\pi)} \frac{K'_a(r)}{K_a(r)} \quad (7)$$

显然, 当 $a = 1/2$ 时, $\mu(r) = \mu_{1/2}(r)$ 表示平面拟共形映射单调递减的 Grötzsch 极值环 $B^2 \setminus [0, r]$ 的模, 这里的 B^2 表示平面单位圆盘, 且 $\mu_a(0) = \infty, \mu_a(1) = 0$ 。此外, 函数

$$m_a(r) = \frac{2}{\pi \sin(a\pi)} r'^2 K_a(r) K'_a(r),$$

称 $m_a(r) + \log r$ 为广义 Hüber 函数^[5]。

符号差 $1/a$ 的 p 次广义 Ramanujan 模方程定义^[5-6]为:

$$\frac{F(a, 1-a; 1; 1-s^2)}{F(a, 1-a; 1; s^2)} = p \frac{F(a, 1-a; 1; 1-r^2)}{F(a, 1-a; 1; r^2)} \quad (8)$$

利用式(5)及式(7), 可将式(8)改写成

$$\mu_a(s) = p\mu_a(r), p > 0 \quad (9)$$

式(9)的解可以表示为

$$s = \varphi_K(a, r) = \mu_a^{-1}(\mu_a(r)/K), K = 1/p \quad (10)$$

称式(10)中的函数 $\varphi_K(a, r)$ 为广义 Hersch-Pfluger 偏差函数, $\varphi_K(a, 0) = 0, \varphi_K(a, 1) = 1$ 。当 $a = 1/2$ 时, $\varphi_K(a, r)$ 退化为 Hersch-Pfluger 偏差

函数 $\varphi_K(r)$ 。1952 年, Hersch 等^[7]获得从 $[0, 1]$ 到 $[0, 1]$ 严格单调递增的函数 $\varphi_K(r)$, 并给出单位圆盘到自身的 K -拟共形映射的精确界。Qiu 等^[8-9]发现 $\varphi_K(r)$ 可表示 Ramanujan 模方程的解, 从而开创了拟共形映射理论与模方程等新领域的交叉研究。随后, 许多国内外学者对 Ramanujan 模方程和广义 Hersch-Pfluger 偏差函数做了深入的研究(参见文献[10-12])。

在文献[6]定理 4 中, Wang 等^[6]获得下列不等式

$$\varphi_K(a, r) \leq r e^{(1-1/K)r'\mu_a(r)} \quad (11)$$

当且仅当 $K = 1$ 或 $r = 0$ 或 $r = 1$ 时等号成立。

Qiu 等^[8]证明: 对 $r \in (0, 1), K \in (1, \infty)$, 下列不等式成立

$$\varphi_K(r) < (1+r')^{2(1-1/K)} / r^{1/K} \quad (12)$$

和

$$\varphi_{1/K}(r) > [2(1+r')]^{1-K} r^K \quad (13)$$

本文主要利用单调性 l'Hôpital 法则等分析工具揭示广义 Hersch-Pfluger 偏差函数、反双曲正切函数 arthr 及初等函数组合的单调性和不等式。此外, 通过 Hüber 函数的分析性质, 获得 Hersch-Pfluger 偏差函数的单调性, 从而改进式(11)–(13)的已知估计。

1 引理

本文为了证明第三部分的主要结果, 引入导数公式(参见文献[5]中定理 4.1(7)、(8)):

$$\frac{\partial s}{\partial r} = \frac{1}{K} \frac{ss'^2 K_a(s)^2}{rr'^2 K_a(r)^2} = \frac{ss'^2 K_a(s) K'_a(s)}{rr'^2 K_a(r) K'_a(r)} \quad (14)$$

$$\frac{\partial s}{\partial K} = \frac{2}{\pi \sin(\pi a)} \frac{ss'^2 K_a(s) K'_a(s)}{K^2} = \frac{4ss'^2 K_a(s)^2}{\pi^2} \frac{\mu_a(r)}{K^2} \quad (15)$$

其中: $s = \varphi_K(a, r), s' = \varphi_{1/K}(a, r')$ 。

引理 1 ^[4, Theorem 1.25] 对 p_{0i} , 设 i 和 MPa 是两个实值函数, 并都在 P_{wD} 上连续, 在 m 上可微且在 ρ 上 g/m^3 , 如果 r_w 在 m 上单调递增(递减), 那么函数

$$F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

和

$$G(x) = \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)}$$

也在 m 上单调递增(递减)。而且, 若 r_w 的单调性

是严格的, 则 m 和 k_{we} 的单调性也是严格的。

引理 2 [5, Lemma 5, 4(1); Theorem 5, 5(3)] 对任意的 $r \in (0, 1)$ 及 $a \in (0, 1/2)$, 则

a) $r'K_a(r)$ 从 $(0, 1)$ 到 $(0, \pi/2)$ 上单调递减;

b) $m_a(r) + \log r$ 从 $(0, 1)$ 到 $(0, R(a)/2)$ 上单调递减。

引理 3 [13] 当 $r \in (0, 1)$ 时, 下列不等式成立:

$$\mu(r) - \frac{1}{2} \log \frac{2(1+r')(1+\sqrt{r'})^2}{r} < 0.$$

引理 4 当 $r \in (0, 1)$ 时, 函数 $q(r) = [\log(1+r^2) + 1]/r$ 在 $(0, 1)$ 上严格单调递减。

证明 易知, 不等式 $\log(1+r) > r/(1+r)$ 成立。对 $q(r)$ 求导,

$$\begin{aligned} r^2 q'(r) &= \frac{2r^2}{1+r^2} - \log(1+r^2) - 1 \\ &< 2\log(1+r^2) - \log(1+r^2) - 1 \\ &< \log(1+r^2) - 1 < 0. \end{aligned}$$

故结论得证。

引理 5 当 $r \in (0, 1)$ 时, 函数 $Q_1(r) = \frac{m(r) + \log r}{(1+r')\log(1+r')}$ 从 $(0, 1)$ 到 $(0, 1)$ 上严格单调递减。特别地, 对 $r \in (0, 1)$, 下列不等式成立:

$$m(r) + \log r < (1+r')\log(1+r').$$

证明 令 $q_1(r) = m(r) + \log r$, $q_2(r) = (1+r')\log(1+r')$, 则 $Q_1(r) = q_1(r)/q_2(r)$, $q_1(0) = q_2(0) = 0$ 。求导得:

$$\frac{q'_1(r)}{q'_2(r)} = \frac{4}{\pi} \frac{r^{1/2} K'(r) (K(r) - E(r))}{r^2 \log(1+r') + 1}.$$

根据引理 4、文献 [14, 引理 3.3] 及引理 1 便得 $Q_1(r)$ 的单调性。由引理 2 中 b) 和式 (3), 不等式显然成立。

2 主要结果及证明

利用上述引理, 本节给出主要结果及证明。

定理 1 对任意的 $x \in (0, \infty)$, $a \in (0, 1/2)$, $K \in (1, \infty)$, 则函数

$$F(x) = \frac{\operatorname{arth} \varphi_K(a, \operatorname{th} x)}{\operatorname{arth}[(\operatorname{th} x)^{1/K}]}$$

从 $(0, \infty)$ 到 $(1, e^{(1-1/K)R(a)/2})$ 上单调递减。特别地, 当 $x \in (0, \infty)$, $K \in (1, \infty)$, 有下列双向不等式

$$r^{1/K} \leq \varphi_K(a, r) \leq \operatorname{th}[e^{(1-1/K)R(a)/2} \operatorname{arth}(r^{1/K})] \quad (16)$$

当且仅当 $K=1$ 或 $r=0$ 或 $r=1$ 时等号成立。

证明 令 $r = \operatorname{th} x$, $t = r^{1/K}$, 则 $\frac{dr}{dx} = r'^{1/2}$, $\frac{dt}{dr} = \frac{t}{rK}$ 。

其次, 令 $s = \varphi_K(a, r)$, $f_1(x) = \operatorname{arths}$, $f_2(x) = \operatorname{arth} t$, 则 $f(x) = f_1(x)/f_2(x)$, 且 $f_1(0) = f_2(0) = 0$ 。

根据式 (14), 求得:

$$\begin{aligned} \frac{f'_1(x)}{f'_2(x)} &= \frac{s}{t} \frac{t'^2}{r'^2} \frac{K_a(s)^2}{K_a(r)^2} = \frac{s}{t} \left(\frac{t'}{s'}\right)^2 \left(\frac{s'K_a(s)}{r'K_a(r)}\right)^2 = \\ &= \frac{s}{t} \left(\frac{t'}{s'}\right)^2 \left(\frac{s'K_a(s)}{r'K_a(r)}\right)^2 \left(\frac{K_a(r)}{K_a(s)}\right)^2 = f_3(x). \end{aligned}$$

根据文献 [5] 中的引理 6.2(1)、式 (2) 和定理 6.7, 可知函数 $f_3(x)$ 是单调递减的。由引理 1 易证 $f(x)$ 函数的单调性。由 l'Hôpital 法则及文献 [5] 中定理 6.7 可知极限值 $f(0^+) = e^{(1-1/K)R(a)/2}$, $f(\infty) = 1$ 。

显然, 双向不等式 (16) 成立。

定理 2 对任意的 $r \in (0, 1)$, $a \in (0, 1/2)$, $K \in (1, \infty)$, 函数

$$G(K) = \frac{\log \varphi_K(a, r) - \log r}{1 - 1/K}$$

关于 K 在 $(1, \infty)$ 上单调递减, 且值域为 $(\log \frac{1}{r}, m_a(r))$ 。特别地, 对 $r \in (0, 1)$, $K > 1$ 时, 成立不等式

$$r^{1/K} < \varphi_K(a, r) \leq r e^{(1-1/K)m_a(r)} \quad (17)$$

当且仅当 $K=1$ 或 $r=0$ 或 $r=1$ 时等号成立。

证明 记 $g_1(K) = \log \varphi_K(a, r) - \log r$, $g_2(K) = 1 - 1/K$, 则 $G(K) = g_1(K)/g_2(K)$, 且 $g_1(1) = g_2(1) = 0$ 。由式 (15), 求导知

$$\frac{g'_1(K)}{g'_2(K)} = \frac{4}{\pi^2} \mu_a(r) (s'K_a(s))^2.$$

根据引理 1、引理 2 中 a) 可知 $G(K)$ 的单调性。根据 l'Hôpital 法则、引理 2 中 a), 极限值分别为

$$\begin{aligned} \lim_{K \rightarrow 1} G(K) &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{g'_1(K)}{g'_2(K)} = \frac{4}{\pi^2} \mu_a(r) \\ &= (r'K_a(r))^2 = m_a(r) \end{aligned}$$

和

$$\lim_{K \rightarrow \infty} G(K) = \log \frac{1}{r}.$$

显然, 双向不等式 (17) 成立。

定理 2 中式 (17) 的不等式上界改进了式 (11) 中不等式的上界, 即 $m_a(r) < r'\mu_a(r)$ 。为说明这个结论, 令 $S_1(r) = r'\mu_a(r)$, $T_1(r) = m_a(r)$, 由文献 [5] 中引理 5.4(1), 可知

$$S_1(r) - T_1(r) = \frac{\pi r' K'_a(r)}{2 \sin \pi a K_a(r)}$$

$$\left(1 - \frac{\pi^2}{4} r' K_a(r)^2\right) > 0.$$

定理3给出了Hersch-Pfluger偏差函数的单调性和精确不等式。

定理3 对任意的 $r \in (0, 1)$, $a \in (0, 1/2)$, $K \in (1, \infty)$, 定义如下函数

$$H(K) = \varphi_K(r) (1+r')^{(1+r')/K} / r^{1/K},$$

$$Q(K) = \varphi_{1/K}(r) [\sqrt{2(1+r')} (1 + \sqrt{r'})]^K / r^K,$$

则 $H(K)$ 和 $Q(K)$ 在 $(1, \infty)$ 上关于 K 分别为严格单调递减和严格单调递增, 且值域分别为 $(1, (1+r')^{1+r'})$, $(\sqrt{2(1+r')} (1 + \sqrt{r'}), \infty)$ 。特别地, 当 $K > 1$ 时, 不等式

$$\varphi_K(r) < (1+r')^{(1+r')(1-1/K)} / r^{1/K} \quad (18)$$

和

$$\varphi_{1/K}(r) > [\sqrt{2(1+r')} (1 + \sqrt{r'})]^{1-K} / r^K \quad (19)$$

成立。

证明 令 $s = \varphi_K(r)$, 由式(15)及引理2中a), 对 $H(K)$ 对数求导得

$$\begin{aligned} K^2 \frac{H'(K)}{H(K)} &= -\frac{4}{\pi} s'^2 K(s)^2 \mu(r) + \\ &\quad \log r - (1+r') \log(1+r') \\ &\leq \frac{2}{\pi} r'^2 K(r) K'(r) + \log r - (1+r') \log(1+r') \\ &\leq m(r) + \log r - (1+r') \log(1+r') \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

结合引理5可知, 函数 $H(K)$ 在 $(1, \infty)$ 上关于 K 分别为严格单调递减。

其次, 令 $u = \varphi_{1/K}(r)$, 据引理2(a), 对 $Q(K)$ 对数求导得

$$\begin{aligned} \frac{Q'(K)}{Q(K)} &= \frac{4}{\pi} u'^2 K(u)^2 \mu(r) + \log \\ &\quad \frac{\sqrt{2(1+r')} (1 + \sqrt{r'})}{r} > \log \\ &\quad \frac{\sqrt{2(1+r')} (1 + \sqrt{r'})}{r} - \mu(r) = Q_1(r). \end{aligned}$$

通过引理3知 $Q_1(r) > 0$, 故 $Q(r)$ 的单调性可证。此外, 极限值和不等式显然。

易证明定理3中式(18)不等式的上界改进了式(12)的不等式上界; 易证明定理3中式(19)不等式的下界改进了式(13)的不等式下界。

3 结论

本文首先建立了Ramanujan模方程理论中广义Hersch-Pfluger偏差函数、反双曲正切函数、初等函数的精确不等式, 进而改进已知上界。其次, 获得Hersch-Pfluger偏差函数的单调性和不等式, 该结果有助于Ramanujan模方程理论和偏差函数的研究。笔者在后续的研究中考虑如何将Ramanujan模方程的解推广到更加广义的情形, 甚至是零平衡情形。

参考文献:

- [1] Abramowitz M, Stegun I A. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables [M]. New York: Dover Publications, 1965: 253-294.
- [2] Qiu S L, Vuorinen M. Special functions in geometric function theory [M] // Kühnau R. Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory. Amsterdam: Elsevier Science B V, 2005: 621-659.
- [3] Qiu S L, Ma X Y, Huang T R. Some properties of the difference between the Ramanujan constant and beta function [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2017, 40 (446): 114-129.
- [4] Anderson G D, Vamanamurthy M K, Vuorinen M. Conformal Invariants, Inequalities, and Quasiconformal Maps [M]. New York: John Wiley & Sons, 1997: 32-47.
- [5] Anderson G D, Qiu S L, Vamanamurthy M K, et al. Generalized elliptic integrals and modular equations [J]. Pacific Journal of Mathematic, 2000, 192(1): 1-37.
- [6] Wang G D, Zhang X H, Chu Y M. Inequalities for the generalized elliptic integrals and modular functions [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 331: 1275-1283.
- [7] Hersch J, Pfluger A. Généralisation du lemme de Schwarz et du principe de la mesure harmonique pour les fonctions pseudo-analytique [J]. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Series I: Mathematics, 1952, 234: 43-45.
- [8] Qiu S L, Vamanamurthy M K, Vuorinen M. Bounds for quasiconformal distortion functions [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1997, 205: 43-64.
- [9] Anderson G D, Qiu S L, Vuorinen M. Modular equations and distortion functions [J]. The Ramanujan Journal, 2009, 18: 147-169.

- [10] 王根娣, 张孝惠, 褚玉明. Hersch—Pfluger 偏差函数的 Hölder 平均不等式[J]. 中国科学, 2010, 40(8): 783-786.
- [11] Wang M K, Qiu S L, Chu Y M. Generalized Hersch—Pfluger distortion function and complete elliptic integrals[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2012, 385: 221-229.
- [12] 王根娣, 张孝惠, 褚玉明, 等. 完全椭圆积分与 Hersch-Pfluger 偏差函数[J]. 数学物理学报 A 辑, 2008, 28(4): 731-734.
- [13] Partyka D. Approximation of the Hersch — Pfluger distortion function[J]. Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ: Mathematica, 1993, 18: 343-354..
- [14] 王淼坤. 特殊函数、Ramanujan 模方程和平均值的一些性质[D]. 杭州: 浙江理工大学, 2011: 23-24.
- (责任编辑: 康 锋)