浙江理工大学学报，2019，41(2)：255-261
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
DOI:10.3969/j.issn.1673-3851(n).2019.02.018

广义摄动度及 BKS 推理方法的鲁棒性

王媛媛，裴道武
（浙江理工大学理学院，杭州 310018）

摘　要：针对用于研究模糊推理鲁棒性的模糊集摄动程度概念不统一的状况，提出了广义摄动度的概念，使文献中出现的多个概念成为新概念的特殊情形。基于提出的广义摄动度概念，系统研究了一些常用蕴涵和模糊连接词的摄动程度，给出了常用蕴涵和模糊连接词的广义摄动度，并且得到基于五个模糊蕴涵的 Bandler-Kohout Subproduct(BKS)推理方法的鲁棒性结果。

关键词：模糊逻辑；模糊推理；摄动度；广义摄动度；BKS 推理方法；鲁棒性
中图分类号：0159　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-3851 (2019) 03-0255-07

Generalized perturbation degree and robustness of BKS reasoning method

WANG Yuanyuan, *PEI Daowu*
(School of Sciences, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: Aiming at the situation that the concept of fuzzy set perturbation degree used to study the robustness of fuzzy reasoning is not uniform, the concept of generalized perturbation is proposed, which makes the multiple concepts appearing in the literature become special cases of the new concept. Based on the proposed concept of generalized perturbation degree, the perturbation degree of some commonly used implications and fuzzy connection words are systematically studied. The generalized perturbation of common implications and fuzzy connection words are given, and the robustness of the Bandler-Kohout Subproduct (BKS) reasoning method based on five fuzzy implications is obtained.

Key words: fuzzy logic; fuzzy reasoning; perturbation degree; generalized perturbation degree; BKS reasoning method; robustness

0　引　言

模糊推理方法的鲁棒性是评价模糊推理误差大小的因素。评价误差大小的指标至关重要，以两个模糊集间的距离作为模糊集摄动程度的指标是运用最多也是最早的。Pappis[1] 给出的模糊集近似相等，Ying[2] 给出的模糊集极大扰动，Hong 等[3] 给出的模糊集相似度，都是以 Chebyshev 距离来定义模糊集的摄动程度。Dai 等[4] 首先提出用 Minkowski 距离来研究模糊集的摄动程度。Montes 等[5] 提出了一种称作“差异”的函数来度量模糊集之间的距离，同时还通过一些自然公理给出了这一概念的定义，并且研究了这一函数的基本性质。Wang 等[6] 比较和分析了由几种不同类型测度诱导的模糊集近似相等的概念，并分析了这几个概念之间的关系，同时还提出了平均逻辑相似度概念，进而研究了三 I 推理方法的鲁棒性。

王国俊等[7] 提出了适宜展开模糊推理的两类模糊集度量空间，发现用 Lukasiewicz 蕴涵构造的逻辑相似度形成的度量空间具有较好的性质。Li

收稿日期：2018－07－15　　网络出版日期：2018－11－16
基金项目：国家自然科学基金项目(11171308,61379018,61472471)
作者简介：王媛媛(1992－)，女，河南驻马店人，硕士研究生，主要从事模糊数学方面的研究。
通信作者：裴道武，E-mail：peidw@163.com

等[8]提出了 DF-度量的概念,分析了几个 DF-度量的性质和不等式关系,并且基于 DF-度量概念构造了差异测度,研究了由模糊连结词引起的摄动程度和 CRI 方法的鲁棒性。

不同的学者选用不同的方法来评价模糊推理的鲁棒性大小,评价标准不统一就无法进行合理比较,有时甚至会导致评价结果的显著差异。因此,研究评价模糊集摄动程度的指标,找出适合的统一标准去衡量模糊集的摄动程度,对文献中提出的这些指标进行统一,是有意义且必要的工作,然而目前尚无相关研究。为了解决评价模糊集摄动程度不统一的问题,本文提出衡量模糊集摄动程度的新指标,即广义摄动度;基于广义摄动度这一指标研究了一些连接词的摄动程度和 BKS 推理方法的鲁棒性,以丰富模糊推理鲁棒性研究的内容。

1 预备知识

单位区间$[0,1]$上的三角模(简称为 t 模)是单调不减映射 $T:[0,1]^2\to[0,1]$,且满足交换律、结合律和边界条件 $T(1,x)=x$, $\forall x\in[0,1]$。对称地,三角余模(简称为 s 模)是单调不减映射 $S:[0,1]^2\to[0,1]$且满足交换律、结合律和边界条件 $S(0,x)=x$, $\forall x\in[0,1]$。

若映射 $R:[0,1]^2\to[0,1]$满足 $R(0,0)=R(0,1)=R(1,1)=1$,$R(1,0)=0$,且关于第一个变量不增、关于第二个变量不减,则称 R 是$[0,1]$上的模糊蕴涵算子,简称为模糊蕴涵或蕴涵,蕴涵也可以用→表示。

以下给出几个在文献中常见的 t 模和 s 模[9]:

a)Zadeh 算子:取小算子与取大算子。

$$T_1(x,y)=\min(x,y),S_1(x,y)=\max(x,y)。$$

b)代数算子:代数积与代数和。

$$T_2(x,y)=xy,S_2(x,y)=x+y-xy。$$

c)有界算子:有界积与有界和。

$$T_3(x,y)=\max(0,x+y-1),S_3(x,y)=\min(1,x+y)。$$

以下给出几个在文献中常见的蕴涵[9]:

a)Mamdani 蕴涵:$R_M(x,y)=\min(x,y)$;

b)Zadeh 蕴涵:$R_Z(x,y)=\max(1-x,\min(x,y))$;

c)Kleene 蕴涵:$R_K(x,y)=\max(1-x,y)$;

d)Lukasiewicz 蕴涵:$R_L(x,y)=\min(1,1-x+y)$;

e)Reichenbach 蕴涵:$R_R(x,y)=1-x+xy$。

以下给出几个在文献中常见的算子[10]:

a)边界差:$A\circledcirc_1 B(x)=\max(0,A(x)-B(x))$;

b)对称差:$A\circledcirc_2 B(x)=|0,A(x)-B(x)|$;

c)Δ-差:$A\circledcirc_3 B(x)=\max(\min(A(x),1-B(x)),\min(1-A(x),B(x))$;

d)极小极大线性和:

$$A\circledcirc_4 B(x)=\lambda\min(A(x),B(x))+(1-\lambda)\max(A(x),B(x)),\lambda\in[0,1]$$

假设 X 是论域,$F(X)$是 X 的模糊幂集,即 X 的所有模糊子集构成的集合。下面给出定义在论域 X 上的幂集的距离定义。

如果映射 $d:F^2(X)\to\mathbf{R}$ 满足如下条件:

a)$d(A,B)\geqslant0$,对于所有 $A,B\in F(X)$;

b)$d(A,B)=0$,当且仅当 $A=B$;

c)$d(A,B)=d(B,A)$,对于所有 $A,B\in F(X)$;

d)$d(A,B)+d(B,C)\geqslant d(A,C)$,对于所有 $A,B,C\in F(X)$。

则称 $d(A,B)$是 $F(X)$上的距离,并且称$(F(X),d)$为距离空间。

下面介绍几个常用于鲁棒性研究的距离。设$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,$A,B\in F(X)$,

a)$d_\infty(A,B)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|A(x_i)-B(x_i)|$称为 A 与 B 的模糊 Chebyshev 距离;

b) $d_1(A,B)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|A(x_i)-B(x_i)|$ 称为 A 与 B 的模糊 Hamming 距离;

c) $d_p(A,B)=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|A(x_i)-B(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ 称为 A 与 B 的模糊 Minkowski 距离,其中 $p\geqslant1$。

从这几个距离形式可知,d_1 是 d_p 中 $p=1$ 时的特例,d_∞是 d_p 中 p 趋于∞时的极限情形。

引理 1[4] 如果 f,g 是定义在 X 上的有界实值函数,则下列式子成立:

a)$|\sup_{x\in X}f(x)-\sup_{x\in X}g(x)|\leqslant\sup_{x\leqslant X}|f(x)-g(x)|$;

b)$|\inf_{x\in X}f(x)-\inf_{x\in X}g(x)|\leqslant\sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|$。

引理 2[4] 设 a,b 是非负实数,$1\leqslant p\leqslant\infty$,则下式成立:

$$(\max(a,b))^p\leqslant a^p+b^p,\lim_{p\to\infty}(a^p+b^p)^{\frac{1}{p}}=\max(a,b)。$$

引理 3[4] 设$(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n)$,$(b_1,b_2,b_3,\cdots,b_n)\in\mathbf{R}^n$,$1\leqslant p<\infty$,则下式成立:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}。$$

2　广义摄动度

为简便，下文假设论域为非空有限集合，设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$F(X)$是 X 的模糊幂集。

命题 1　设 $A,B\in F(X)$，$a\geqslant 0$，$a,b\in\mathbf{R}$。如果 d 是$F(X)$上的距离，令

$$D(A,B)=\frac{ad(A,B)}{b+(a-b)d(A,B)}$$

则 $D(A,B)$也是 $F(X)$上的距离。

证明　要证明 $D(A,B)$是一个距离，而距离定义中 a)—c)明显成立，只需要证明 d)，即：$D(A,C)\leqslant D(A,B)+D(B,C)$。由 d 是定义在 $F(X)$上的一个距离，有 $d(A,C)\leqslant d(A,B)+d(B,C)$。令 $t_3=d(A,C)$，$t_2=d(B,C)$，$t_1=d(A,B)$，即 $t_1+t_2\geqslant t_3$。

令 $D(t)=\frac{at}{b+(a-b)t}$，$D'(t)=\frac{a(b+(a-b)t)-at(a-b)}{(b+(a-b)t)^2}=\frac{ab}{(b+(a-b)t)^2}>0$，则 $D(t)$是关于 t 的增函数。

由 $t_1+t_2\geqslant t_3$ 得 $D(t_1+t_2)\geqslant D(t_3)$。从而有

$$D(t_1)=\frac{at_1}{b+(a-b)t_1}=\frac{t_1}{\frac{b}{a}+\left(1-\frac{b}{a}\right)t_1},$$

$$D(t_2)=\frac{at_2}{b+(a-b)t_2}=\frac{t_2}{\frac{b}{a}+\left(1-\frac{b}{a}\right)t_2},$$

$$D(t_1+t_2)=\frac{a(t_1+t_2)}{b+(a-b)(t_1+t_2)}=\frac{a(t_1+t_2)}{b+(a-b)(t_1+t_2)}。$$

令 $m=\frac{b}{a}$，$m\in(0,1]$则

$$D(t_1)=\frac{t_1}{m+(1-m)t_1},D(t_2)=\frac{t_2}{m+(1-m)t_2},$$

$$D(t_1+t_2)=\frac{t_1+t_2}{m+(1-m)(t_1+t_2)},$$

$$D(t_1)\geqslant\frac{t_1}{m+(1-m)(t_1+t_2)},$$

$$D(t_2)\geqslant\frac{t_2}{m+(1-m)(t_1+t_2)},$$

则 $D(t_1)+D(t_2)\geqslant\frac{t_1+t_2}{m+(1-m)(t_1+t_2)}=D(t_1+t_2)\geqslant D(t_3)$。□

为了记述方便，本文将 $D(A,B)$和 $d(A,B)$分别简记为 D 和 d。

Duan 等[11]用逻辑相似度

$$\rho(A,B)=\bigwedge_{i=1}^{n}((A(x_i)\to B(x_i))\wedge(B(x_i)\to A(x_i)))$$

构造了逻辑距离 $d(A,B)=1-(A,B)$，基于逻辑距离研究了一些蕴涵的摄动程度。王国俊等[7]用正则相似度(或平均逻辑相似度)构造了距离。Wang 等[6]将这个距离称为好的距离(当 S^* 中的蕴涵取 R_L 时，好的距离是 Hamming 距离)，并且基于这个距离，研究了三 I 方法的鲁棒性。笔者注意到，如果命题 1 中令 $a=b$，$d(A,B)$就取逻辑距离[11]或好的距离[6]，因此逻辑距离[12]、好的距离[6]就是命题 1 定义的距离的特例。Li 等[8]提出了用于鲁棒性研究的 DF－距离，其实 DF-距离就是命题 1 中当 $d(A,B)$取好的距离的特殊情况。

定义 1　设 $A,B\in F(X)$。D 由命题 1 定义，如果有下式

$$D(A,B)=\frac{ad(A,B)}{b+(a-b)d(A,B)}\leqslant\varepsilon$$

成立，则称 A 是 B 的广义摄动度，或 B 是 A 的广义摄动度，简称为广义摄动度，简记为 $A\trianglelefteq(\varepsilon)B$。

当 $a=b$ 时，$D(A,B)=d(A,B)$。若 $d(A,B)$取的是 Chebyshev 距离 d_∞，上述定义就是文献[1]中所指的两个模糊集近似相等；若 d 取 Minkowski 距离 d_p，上述定义就是文献[4]中定义 3.1；若 d 取好的距离，上述定义就是文献[8]中定义 13。

Li 等[8]提出了 DF－距离的概念，可以使好的距离成为其特殊情况。但是，DF-距离不包含 Minkowski 距离，而本文提出的距离 D 可以包含 Minkowski 距离作为特例，而且也包含 DF-距离(取 d 为好的距离)作为特例。Li 等[8]已经研究了基于 DF-距离的模糊集摄动程度。但尚未见到基于推广的 Minkowski 距离为模糊集摄动程度的指标来研究模糊集的摄动程度的文章。基于此，本文只讨论当 d 取 Minkowski 距离时模糊集的广义摄动度。

模糊推理方法是由模糊连接词构成，下面基于广义摄动度研究一些常见模糊连接词的摄动程度。

定理 1　设 $A_1,A_2,B_1,B_2\in F(X)$，$d=d_p$。如果 $D(A_1,A_2)\leqslant\varepsilon_1$，$D(B_1,B_2)\leqslant\varepsilon_2$，则 $A_1\odot B_1$ 与 $A_1\odot B_2$ 的广义摄动度为：$D(A_1\odot B_1,A_2\odot B_2)\leqslant\frac{a\varepsilon}{b+(a-b)\varepsilon}$，这里

$$\varepsilon=\left(\left(\frac{b\varepsilon_1}{a-(a-b)\varepsilon_1}\right)^p+\left(\frac{b\varepsilon_2}{a-(a-b)\varepsilon_2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}},$$
$$\odot\in\{\cup,\cap\}。$$

证明 为节省篇幅,只给出$\odot=\cup$时的证明,另一种情况类似可证。

由 $D(A_1,A_2)=\dfrac{ad(A_1,A_2)}{b+(a-b)d(A_1,A_2)}\leqslant\varepsilon_1$,得 $d(A_1,A_2)\leqslant\dfrac{b\varepsilon_1}{a-(a-b)\varepsilon_1}$。

同理 $D(B_1,B_2)=\dfrac{ad(B_1,B_2)}{b+(a-b)d(B_1,B_2)}\leqslant\varepsilon_1$,得 $d(B_1,B_2)\leqslant\dfrac{b\varepsilon_2}{a-(a-b)\varepsilon_2}$。

设 $A_1=(a_1,a_2,\cdots a_n)$,$A_2=(a'_1,a'_2,\cdots,a'_n)$,$B_1=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$,$B_2=(b'_1,b'_2,\cdots,b'_n)$。那么

$$d(A_1\cup B_1,A_2\cup B_2)=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|A_1(x_i)\cup B_1(x_i)-A_2(x_i)\cup B_2(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}。$$

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}|A_1(x_i)\cup B_1(x_i)-A_2(x_i)\cup B_2(x_i)|^p\\&=|\max(a_1,b_1)-\max(a'_1,b'_1)|^p+\cdots+\\&\quad|\max(a_n,b_n)-\max(a'_n,b'_n)|^p\\&\leqslant(\max(|a_1-a'_1|,|b_1-b'_1|))^p+\cdots+\\&\quad(\max(|a_n-a'_n|,|b_n-b'_n|))^p\\&\leqslant|a_1-a'_1|^p+|b_1-b'_1|^p+\cdots+|a_n-a'n|^p+\\&\quad|b_n-b'_n|^p=\sum_{i=1}^{n}|a_i-a'_i|^p+\sum_{i=1}^{n}|b_i-b'_i|^p。\end{aligned}$$

从而有

$$d(A_1\cup B_1,A_2\cup B_2)\leqslant\left(\left(\frac{b\varepsilon_1}{a-(a-b)\varepsilon_1}\right)^p+\left(\frac{b\varepsilon_2}{a-(a-b)\varepsilon_2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}。$$

令 $\varepsilon=\left(\left(\dfrac{b\varepsilon_1}{a-(a-b)\varepsilon_1}\right)^p+\left(\dfrac{b\varepsilon_2}{a-(a-b)\varepsilon_2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$,设 $D(t)=\dfrac{at}{b(a-b)t}$,由于 $D(t)$是关于 t 的增函数,故 $D(A_1\cup B_1,A_2\cup B_2)\leqslant\dfrac{a\varepsilon}{b+(a-b)\varepsilon}$。□

类似可证定理 2—定理 4。

定理 2 设 $A,A',B,B'\in F(X)$,其中 A'是 A 的补集,B'是 B 的补集,$d=d_p$。则 $D(A,B)=D(A',B')$,如果 $D(A,B)\leqslant\varepsilon$,则 $D(A',B')\leqslant\varepsilon$。

定理 3 设 $A_1,A_2,B_1,B_2\in F(X)$,$d=d_p$。如果 $D(A_1,A_2)\leqslant\varepsilon_1$,$D(B_1,B_2)\leqslant\varepsilon_2$,则 $A_1\odot B_1$ 与 $A_2\odot B_2$ 的广义摄动度为:

$$D(A_1\odot B_1,A_2\odot B_2)\leqslant\frac{a\varepsilon}{b+(a-b)\varepsilon},$$

其中:$\varepsilon=\dfrac{b\varepsilon_1}{a-(a-b)\varepsilon_1}+\dfrac{b\varepsilon_2}{a-(a-b)\varepsilon_2}$,$\odot\in\{T_2,T_3,◎_1,◎_2\}$。

定理 4 设 $A_1,A_2,B_1,B_2\in F(X)$,$d=d_p$。如果 $D(A_1,A_2)\leqslant\varepsilon_1$,$D(B_1,B_2)\leqslant\varepsilon_2$,则 $A_1\odot B_1$ 与 $A_2\odot B_2$ 的广义摄动度为:

$$D(A_1\odot B_1,A_2\odot B_2)\leqslant\frac{a\varepsilon}{b+(a-b)\varepsilon},$$

其中:

$$\varepsilon=2\left(\frac{b\varepsilon_1}{a-(a-b)\varepsilon_1}+\frac{b\varepsilon_2}{a-(a-b)\varepsilon_2}\right),\odot\in\{S_2,◎_4\}。$$

3 基于广义摄动度的 BKS 推理方法的鲁棒性

模糊控制中的模糊规则实质上是定义在乘积上的二元模糊集,用于表示模糊关系。蕴涵在模糊推理中处于重要地位,下面给出蕴涵的广义摄动度。

定理 5 设 $A_1,A_2\in F(X)$,$B_1,B_2\in F(Y)$,$C_1,C_2\in F(X\times Y)$,$d=d_p$,$C_1=R_L(A_1,B_1)$,$C_2=R_L(A_2,B_2)$。如果 $D(A_1,A_2)\leqslant\varepsilon_1$,$D(B_1,B_2)\leqslant\varepsilon_2$,则

$$D(C_1,C_2)\leqslant\frac{a\varepsilon}{b+(a-b)\varepsilon},$$

其中:$\varepsilon=\dfrac{b\varepsilon_1}{a-(a-b)\varepsilon_1}+\dfrac{b\varepsilon_2}{a-(a-b)\varepsilon_2}$。

定理 5、定理 7 的证明和定理 6 的证明类似,但定理 6 的证明更为复杂。因此下面只给出定理 6 的证明,略去定理 5 和定理 7 的证明。

定理 6 设 $A_1,A_2\in F(X)$,$B_1,B_2\in F(Y)$,$C_1,C_2\in F(X\times Y)$,$d=d_p$,$C_1=R_n(A_1,B_1)$,$C_2=R_n(A_2,B_2)$。如果 $D(A_1,A_2)\leqslant\varepsilon_1$,$D(B_1,B_2)\leqslant\varepsilon_2$,则

$$D(C_1,C_2)\leqslant\frac{a\varepsilon}{b+(a-b)\varepsilon},$$

其中:

$$\varepsilon=2\,\frac{b\varepsilon_1}{a-(a-b)\varepsilon_1}+\frac{b\varepsilon_2}{a-(a-b)\varepsilon_2},R_n\in\{R_R,R_Z\}。$$

证明 本文只给出蕴涵取 $R_R(A(x),B(x))$时的情况,蕴涵取 $R_Z(A(x),B(x))$的情况类似可得。

设 $A_1=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})$,$A_1=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n})$,$B_1=(b_{11},b_{12},\cdots,b_{1m})$,$B_1=(b_{21},b_{22},\cdots,b_{2m})$。$C_1=R_R(A_1,B_1)=(c_{ij})_{n\times m}$,$C_2=R_R(A_2,B_2)=(c'_{ij})_{n\times m}$。

由 $D(A_1,A_2)=\dfrac{ad(A_1,A_2)}{b+(a-b)d(A_1,A_2)}\leqslant\varepsilon_1$，可得

$d(A_1,A_2)=\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{1i}-a_{2i}|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\dfrac{b\varepsilon_1}{a-(a-b)\varepsilon_1}$，$\sum_{i=1}^{n}|a_{1i}-a_{2i}|^p\leqslant n\left(\dfrac{b\varepsilon_1}{a-(a-b)\varepsilon_1}\right)^p$。

同理可得，$\sum_{j=1}^{m}|b_{1j}-b_{2j}|^p\leqslant m\left(\dfrac{b\varepsilon_2}{a-(a-b)\varepsilon_2}\right)^p$。

从而

$|C_{ij}-C'_{ij}|=|(1-a_{1i}+a_{1i}b_{1j})-(1-a_{2i}+a_{2i}b_{2j})|=$

$|a_{2i}-a_{1i}+a_{1i}b_{1j}-a_{2i}b_{2j}|\leqslant|a_{2i}-a_{1i}|+|a_{1i}b_{1j}-a_{2i}b_{2j}|=|a_{2i}-a_{1i}|+|a_{1i}b_{1j}-a_{2i}b_{1j}+a_{2i}b_{1j}-a_{2i}b_{2j}|$

$\leqslant|a_{2i}-a_{1i}|+b_{1j}|a_{1i}-a_{2i}|+a_{2i}|b_{1j}-b_{2j}|$

$\leqslant 2|a_{2i}-a_{1i}|+|b_{1j}-b_{2j}|$；

$$d(C_1,C_2)=\left(\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|C_{ij}-C'_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(2|a_{2i}-a_{1i}|+|b_{1j}-b_{2j}|)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}2^p a_{2i}-a_{1i}|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|b_{2j}-b_{1j}|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{2i}-a_{1i}|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}|b_{2j}-b_{1j}|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant 2\frac{b\varepsilon_1}{a-(a-b)\varepsilon_1}+\frac{b\varepsilon_2}{a-(a-b)\varepsilon_2}。$$

令 $\varepsilon=2\dfrac{b\varepsilon_1}{a-(a-b)\varepsilon_1}+\dfrac{b\varepsilon_2}{a-(a-b)\varepsilon_2}$，设 $D(t)=\dfrac{at}{a-(a-b)t}$，由于 $D(t)$是关于 t 的增函数。故

$$D(C_1,C_2)\leqslant\frac{a\varepsilon}{a-(a-b)\varepsilon}。\square$$

定理 7　设 $A_1,A_2\in F(X)$，$B_1,B_2\in F(Y)$，$C_1,C_2\in F(X\times Y)$，$d=d_p$，$C_1=R_n(A_1,B_1)$，$C_2=R_n(A_2,B_2)$。如果 $D(A_1,A_2)\leqslant\varepsilon_1$，$D(B_1,B_2)\leqslant\varepsilon_2$，则：

$$D(C_1,C_2)\leqslant\frac{a\varepsilon}{b+(a-b)\varepsilon},$$

其中：$\varepsilon=\left(\left(\dfrac{b\varepsilon_1}{a-(a-b)\varepsilon_1}\right)^p+\left(\dfrac{b\varepsilon_2}{a-(a-b)\varepsilon_2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$，$R_n\in\{R_{\mathrm{M}},R_{\mathrm{K}}\}$。

模糊关系推理（FRI）中包括两种推理机制，一种是常用的 Zadeh 合成推理方法（CRI）[12]，另一种是 Petrycz 提出的 Bandler-Kohout Subproduct（BKS）推理方法[13]。

模糊推理中最常见的单规则形式的 FMP 可以描述为：

规则：如果 x 是 A，那么 y 是 B；输入：x 是 A^*；输出：B^* 是 $h(A,B,A^*)$。

根据上面推理形式，可以将模糊推理理解成模糊输出关于模糊输入的映射 h，模糊规则“如果 x 是 A，那么 y 是 B”相当于一个推理机制内部的模糊关系 $R(A,B)$。模糊推理输入 A^* 时，A^* 与 $R(A,B)$ 进行合成输出 $B^*=h(A,B,A^*)$。CRI 推理方法和 BKS 推理方法都是基于同样的思想。

针对 CRI 推理方法已经有大量研究，针对 BKS 推理方法的研究相对较少。下面讨论 BKS 推理方法基于广义摄动度的鲁棒性。

首先介绍 BKS 推理方法。该方法用如下方式确定 B^*：

$$B^*=h(A,B,A^*)=A^*\partial R(A,B),$$

$R(A,B)$是一个模糊关系 $R:X\times Y\rightarrow[0,1]^1$，$\partial$ 表述模糊合成算子。

在 BKS 推理中，∂ 取蕴涵算子，即

$B^*=h(A,B,A^*)=\bigwedge_{x\in X}\{A^*\rightarrow R(A(x),B(y))\}$，$y\in Y$。

对于单输入形式的 BKS 推理有如下两种形式：

$B^*=\bigwedge_{x\in X}A^*(x)\rightarrow(A(x)\rightarrow B(x))$，$y\in Y$；

$B^*=\bigwedge_{x\in X}A^*(x)\rightarrow(A(x)\otimes B(x))$，$y\in Y$。

本文仅讨论 BKS 推理的第一种形式，基于广义摄动度讨论当推理中的蕴涵取同型蕴涵时的鲁棒性。

定理 8　设 $A_1,A_2,A_1^*,A_2^*\in F(X)$，$B_1,B_2\in F(Y)$，$B_1^*,B_2^*$ 分别是 BKS 推理方法的结果，推理中蕴涵取 R_L。如果 $D(A_1,A_2)\leqslant\varepsilon_1$，$D(B_1,B_2)\leqslant\varepsilon_2$，$D(A_1^*,A_2^*)\leqslant\varepsilon_3$，则

$$D(B_1^*,B_2^*)\leqslant\frac{a\delta}{b+(a-b)\delta},$$

其中：$\delta=\Bigg(2^p n\left(\dfrac{b\varepsilon_3}{a-(a-b)\varepsilon_3}\right)^p+2^p n$

$\left(\frac{b\varepsilon_1}{a-(a-b)\varepsilon_1}+\frac{b\varepsilon_2}{a-(a-b)\varepsilon_2}\right)^p\Big)^{\frac{1}{p}}$。

证明 设 $A_1=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})$，$A_2=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n})$，$B_1=(b_{11},b_{12},\cdots,b_{1m})$，$B_2=(b_{21},b_{22},\cdots,b_{2m})$，$A_1^*=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$A_2^*=(a'_1,a'_2,\cdots,a'_n)$，$C_1=R_L(A_1,B_1)=(c_{ij})_{n\times m}$，$C_2=R_L(A_2,B_2)=(c'_{ij})_{n\times m}$。

由定理5可知，$D(C_1,C_2)\leqslant\frac{a\varepsilon}{b+(a-b)\varepsilon}$，$\varepsilon=\frac{b\varepsilon_1}{a-(a-b)\varepsilon_1}+\frac{b\varepsilon_2}{a-(a-b)\varepsilon_2}$。令 κ 如下：

$$\kappa=|\min(1\wedge(1-a_1+c_{1j}),\cdots,1\wedge(1-a_n+c_{nj}))-\min(1\wedge(1-a'_1+c'_{1j}),\cdots,1\wedge(1-a'_n+c'_{nj}))|^p,$$

则

$$\begin{aligned}\kappa&\leqslant(\max(1\wedge(1-a_1+c_{1j})-1\wedge(1-a'_1+c'_{1j}),\cdots,1\wedge(1-a_n+c_{nj})-1\wedge(1-a'_n+c'_{nj})))^p\\&\leqslant(\max(|a'_1-a_1+c_{1j}-c'_{1j}|,\cdots,|a'_n-a_n+c_{nj}-c'_{nj}|))^p\\&\leqslant(\max(|a'_1-a_1|+|c_{1j}-c'_{1j}|,\cdots,|a'_n-a_n|+|c_{nj}-c'_{nj}|))^p\\&\leqslant\max((\max(2|a'_1-a_1|,2|c_{1j}-c'_{1j}|),\cdots,\max(2|a'_n-a_n|,2|c_{nj}-c'_{nj}|))^p)\\&\leqslant2^p\sum_{i=1}^n|a'_i-a_i|^p+2^p\sum_{i=1}^n|c_{nj}-c'_{nj}|^p。\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}d^p(B_1^*,B_2^*)&=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m\kappa\\&\leqslant2^p\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m\left(\sum_{i=1}^n|a'_1-a_1|^p+\sum_{i=1}^n|c_{nj}-c'_{nj}|^p\right)\\&\leqslant2^p\sum_{i=1}^n|a'_1-a_1|^p+2^pn\frac{1}{nm}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m|c_{nj}-c'_{nj}|^p\\&\leqslant2^pn\left(\frac{b\varepsilon_3}{a-(a-b)\varepsilon_3}\right)^p+2^pn\varepsilon^p。\end{aligned}$$

令 $\delta=\left(2^pn\left(\frac{b\varepsilon_3}{a-(a-b)\varepsilon_3}\right)^p+2^pn\varepsilon^p\right)^{\frac{1}{p}}$，由于 $D(t)$ 是关于 t 的增函数，因此

$$D(B_1^*,B_2^*)\leqslant\frac{a\delta}{b+(a-b)\delta}。\square$$

定理9 设 $A_1,A_2,A_1^*,A_2^*\in F(X)$，$B_1,B_2\in F(Y)$。$B_1^*,B_2^*$ 分别是BKS推理方法的结果，推理中蕴涵取 R_R。如果 $D(A_1,A_2)\leqslant\varepsilon_1$，$D(B_1,B_2)\leqslant\varepsilon_2$，$D(A_1^*,A_2^*)\leqslant\varepsilon_3$，则

$$D(B_1^*,B_2^*)\leqslant\frac{a\delta}{b+(a-b)\delta},$$

其中：$\delta=\left(4^pn\left(\frac{b\varepsilon_3}{a-(a-b)\varepsilon_3}\right)^p+4^pn\left(2^{\frac{1}{p}}\frac{b\varepsilon_1}{a-(a-b)\varepsilon_1}+\frac{b\varepsilon_2}{a-(a-b)\varepsilon_2}\right)\right)^{\frac{1}{p}}$。

定理10 设 $A_1,A_2,A_1^*,A_2^*\in F(X)$，$B_1,B_2\in F(Y)$。$B_1^*,B_2^*$ 分别是BKS推理方法的结果，推理中蕴涵取 R_Z。如果 $D(A_1,A_2)\leqslant\varepsilon_1$，$D(B_1,B_2)\leqslant\varepsilon_2$，$D(A_1^*,A_2^*)\leqslant\varepsilon_3$，则

$$D(B_1^*,B_2^*)\leqslant\frac{a\delta}{b+(a-b)\delta},$$

其中：$\delta=\left(2n\left(\frac{b\varepsilon_3}{a-(a-b)\varepsilon_3}\right)^p+n\left(2^{\frac{1}{p}}\frac{b\varepsilon_1}{a-(a-b)\varepsilon_1}+\frac{b\varepsilon_2}{a-(a-b)\varepsilon_2}\right)\right)^{\frac{1}{p}}$。

定理11 设 $A_1,A_2,A_1^*,A_2^*\in F(X)$，$B_1,B_2\in F(Y)$。$B_1^*,B_2^*$ 分别是BKS推理方法的结果，推理中蕴涵。如果 $D(A_1,A_2)\leqslant\varepsilon_1$，$D(B_1,B_2)\leqslant\varepsilon_2$，$D(A_1^*,A_2^*)\leqslant\varepsilon_3$，则

$$D(B_1^*,B_2^*)\leqslant\frac{a\delta}{b+(a-b)\delta},$$

其中：$\delta=\left(n\left(\frac{b\varepsilon_3}{a-(a-b)\varepsilon_3}\right)^p+n\left(\frac{b\varepsilon_1}{a-(a-b)\varepsilon_1}\right)^p+n\left(\frac{b\varepsilon_2}{a-(a-b)\varepsilon_2}\right)\right)^{\frac{1}{p}}$。

定理9—11的证明可由定理8类似可得，故不再给出证明。

推论1 当 D 中 $a=b$ 时，基于 R_L,R_R,R_Z,R_M,R_K 蕴涵的BKS推理方法的鲁棒性见表1。

表1 基于5个蕴涵的BKS推理方法鲁棒性

蕴涵	鲁棒性
R_L	$\delta=(2^pn\varepsilon_3^p+2^pn(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^p)^{\frac{1}{p}}$
R_R	$\delta=(4^pn\varepsilon_3^p+4^pn(2^{\frac{1}{p}}\varepsilon_1+\varepsilon_2)^p)^{\frac{1}{p}}$
R_Z	$\delta=(2n\varepsilon_3^p+n(2^{\frac{1}{p}}\varepsilon_1+\varepsilon_2)^p)^{\frac{1}{p}}$
R_M,R_K	$\delta=(n\varepsilon_3^p+n\varepsilon_1^p+n\varepsilon_2^p)^{\frac{1}{p}}$

4 结 语

在模糊推理方法鲁棒性的研究中，评价模糊集摄动程度的指标是十分重要的。本文将评价模糊集摄动程度指标进行统一，提出了广义摄动度这一概念。基于Minkowski距离定义的广义摄动度，研究

了一些常用蕴涵和模糊连接词的摄动程度,并研究了 BKS 推理方法的鲁棒性。本文的工作不但统一了用于评价模糊集摄动程度的指标,而且为实际应用中选取不同的摄动程度指标提供了新的选择。后续的工作之一是以广义摄动度为模糊集的摄动程度指标来研究其它推理方法的鲁棒性。

参考文献:

[1] Pappis C P. Value approximation of fuzzy systems variables[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1991, 39(1): 111-115.

[2] Ying M S. Perturbation of fuzzy reasoning [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1999, 7(5): 625-629.

[3] Hong D H, Hwang S Y. A note on the value similarity of fuzzy systems variables[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 66(3): 383-386.

[4] Dai S S, Pei D W, Wang S M. Perturbation of fuzzy sets and fuzzy reasoning based on normalized Minkowski distances[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2011, 189(1): 63-73.

[5] Montes S, Couso I, Gil P, et al. Divergence measures between fuzzy sets [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2002, 30(2): 91-105.

[6] Wang G J, Duan J Y. On robustness of the full implication triple I inference method with respect to finer measurements [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2014, 55(3): 787-796.

[7] 王国俊,段景瑶.适宜于展开模糊推理的两类模糊度量空间[J].中国科学:信息科学,2014,44(5):623-632.

[8] Li Y F, Qin K Y, He X, et al. Robustness of fuzzy connectives and fuzzy reasoning with respect to general divergence measures[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2016, 294: 63-78.

[9] 裴道武.基于三角模的模糊逻辑理论及其应用[M].北京:科学出版社,2013:7-15.

[10] Cai K Y. qualities of fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1995, 76(1): 97-112.

[11] Duan J Y, Li Y M. Robustness analysis of logic metrics on F(X) F(X) math container loading mathjax [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2015, 61: 33-42.

[12] Zadeh L A. Outline of new approach to the analysis of complex systems and decision processes [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1973, 3(1): 28-44.

[13] Pedrycz W. Applications of fuzzy relational equations for methods of reasoning in presence of fuzzy data[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1985, 16(2): 163-175.

(责任编辑:康　锋)