浙江理工大学学报，2019，41(2)：243-248
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
DOI：10.3969/j.issn.1673-3851(n).2019.02.016

区间上单调递减函数的 Denneberg 积分和 Lebesgue 积分的等价性

苗媛媛，樊太和
（浙江理工大学理学院，杭州 310018）

摘　要：为了使得非可加测度和积分理论有更广泛的适用性，结合实分析的方法，通过把取值为负的递减函数转化为非负函数，证明了 Denneberg 利用分布函数引入的关于区间上单调递减函数的积分与 Lebesgue 积分恒等价；研究了 Denneberg 积分的分析性质，给出了几类收敛定理如单调收敛定理、有界收敛定理、控制收敛定理等，从而为该积分的研究提供更多的方法。

关键词：单调递减函数；Denneberg 积分；Lebesgue 积分；收敛定理
中图分类号：O159　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-3851 (2019) 03-0243-06

Equivalence between the Denneberg integral and Lebesgue integral of monotone decreasing functions on intervals

MIAO Yuanyuan, *FAN Taihe*
(School of Sciences, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: In order to make the non-additive measure and integral theory more widely applied, the real analysis method is used to transform the decreasing function with negative value as non-negative function so as to prove that the integral of monotone decreasing function on the interval introduced by Denneberg with distribution function is equivalent to the Lebesgue integral. Analytic properties of the integral were studied, and some convergence theorems are given such as the monotone convergence theorem, the bounded convergence theorem, and the control convergence theorem so as to provide more methods for the study of Denneberg integral.

Key words: monotone decreasing function; Denneberg integral; Lebesgue integral; convergence theorem

0　引　言

众所周知，Lebesgue 测度[1]是非负的、满足可列可加性的一种集函数，因此基于 Lebesgue 测度的 Lebesgue 积分[1]具有线性性质。Lebesgue 积分无论是在数学还是其他应用学科的研究中应用都非常广泛。然而，实际问题中有大量问题不满足可加性，因此各种非线性积分[2]应运而生。1953 年，法国数学家 Choquet 利用容度概念引入了 Choquet 积分。在各种非线性积分中 Choquet 积分处于重要地位，广泛应用于数据分析、模式识别、经济数学、信息融合等诸多领域[3-4]。

非可加测度[2]是容度的推广。自 20 世纪 70 年代以来有关非可加测度积分的研究越来越受到人们的关注[5-6]。Denneberg[2]利用分布函数引入了区间上的单调递减函数的一种积分，并以此积分为基础

收稿日期：2018－11－16　　网络出版日期：2018－12－28
基金项目：国家自然科学基金项目(61379018)；浙江省自然科学基金项目(LY18A010028)
作者简介：苗媛媛(1993－)，女，河南平顶山人，硕士研究生，主要从事模糊数学方面的研究。
通信作者：樊太和，E-mail：taihefan@163.com

建立了系统的非可加测度和积分理论。近年来,关于非可加测度和积分的研究内容已经非常丰富[7-15]。如巩增泰等[7]引入了区间值和模糊数值函数关于非可加测度的 Choquet 积分;作为 Choquet 积分的推广,Klement 等[9]利用两极容度给出了泛积分的概念;徐鹤萍等[10]将非负可测函数的泛积分定义推广到一般实值可测函数,讨论了基于普通加法和乘法的一般实值可测函数的泛积分等。关于基于非可加测度的积分在信息融合、优化等问题中的应用可参看文献[11-15]等。

Denneberg[2]指出,有限区间上单调递减有界函数的 Denneberg 积分和 Riemann 积分等价,而无界区间上的积分或者有限区间上无界函数的积分与广义 Riemann 积分等价。但他并未给出等价的详细证明,只是讨论了 Denneberg 积分的相关性质,而这些性质的证明过程比较繁琐。需要说明的是文献[2]中没有给出 Denneberg 积分和 Lebesgue 积分的关系。本文将证明单调递减函数的 Denneberg 积分与 Lebesgue 积分恒等价,从而关于 Denneberg 积分的结论可由 Lebesgue 积分的相应结论直接得到,证明过程与直接讨论 Denneberg 积分的方法相比更为简洁,为 Denneberg 积分的研究提供一种新的思路。

1 预备知识

本文中 Lebesgue 积分简称为 L 积分,而 Riemann 积分简称 R 积分,$\bar{R}=\mathbf{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ 为广义实数集。

定义 1[2] 设 $I=(a,b)$ 为一个有限区间,$\mathbf{Z}$ 为整数集。$f:I\rightarrow\bar{R}$ 为递减函数。函数 $d:\mathbf{Z}\rightarrow I$ 称为一个 I 的重分,若 $d_n\leqslant d_{n+1},n\in\mathbf{Z}$,且 $\inf\limits_{n\in\mathbf{Z}}d_n=\inf I,\sup\limits_{n\in\mathbf{Z}}d_n=\sup I$。定义 f 关于 d 的下和为:

$$S(f,d)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(d_n)(d_n-d_{n-1})。$$

定义 2[2] 区间 $I=(a,b)$ 上单调递减函数 $f(x)$ 的 Denneberg 积分(以下简称为 D 积分)定义如下:

$$(D)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sup_d S(f,d)。$$

其中 $\sup\limits_d S(f,d)$ 表示对所有 d 对应的 $f(x)$ 的下和 $S(f,d)$ 取上确界。

由定义可知,若 $S(f,d)$ 对所有 d 都不存在(即为 $\pm\infty$ 或无意义),则 $(D)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 不存在;积分区间 I 的端点值对积分值没有影响,即 $I=(a,b)/(a,b]/[a,b)/[a,b]$ 对应的积分 $(D)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 值是相等的。显然,当 $f<0$ 时,积分值为负值。和 L 积分一样,当函数 f 的 D 积分定义中的级数之和出现 $\infty-\infty$ 时,称 f 的积分无意义;而当 f 的 D 积分为 $\pm\infty$ 时,称 f 的积分确定,但 f 为 D 不可积函数。

定理 1[1] 设 f 为 $[a,b]$ 上的有界函数,若 f 为 $[a,b]$ 上的 R 可积函数,则 f 也为 $[a,b]$ 上 L 可积函数且

$$(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(L)\int_{[a,b]}f(x)\mathrm{d}x。$$

由文献[1]可知,对于无界函数的 R 积分(广义 R 积分)定理 1 不再成立。如果函数不变号,则定理 1 仍然成立。对于无界区间上的广义积分,情况类似。

2 主要结论

引理 1 设 $I=(a,b)$,$f:I\rightarrow\bar{R}$ 为非负递减函数,则:

$$(D)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(L)\int_{(a,b)}f(x)\mathrm{d}x。$$

证明 由 D 积分的定义可知,对任意 I 的重分 d,有 $S(f,d)\leqslant(D)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。设 $d^n=\{d_i^n\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ 为重分列,且 d^{n+1} 为 d^n 的加细,即 d^n 的分点全部是 d^{n+1} 的分点,$\Delta d^n=\sup\limits_{i=-\infty}^{+\infty}(d_i^n-d_{i-1}^n)\rightarrow 0$。记 $f_{d^n}(x)=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\chi_{(d_{k-1}^n,d_k^n]}(x)f(d_k^n)$ 为 d^n 所对应的函数列。显然 f_{d^n} 关于 n 为递增函数列,故 f_{d^n} 为可测函数列。且对任意 $n,x\in(a,b)$,$f_{d^n}(x)\leqslant f(x)$,由 $\Delta d^n\rightarrow 0$,$d^n\leqslant d^{n+1}$ 和 f 为单调递减函数可知,在函数 f 的连续点 $\lim\limits_{n\rightarrow\infty}f_{d^n}(x)=f(x)$。即在 I 上 f_{d^n} 是关于 n 递增的递减函数列且在 I 上几乎处处收敛到 f。

因此由 L 积分的单调收敛定理可得

$$\lim_{n\rightarrow\infty}S(f,d^n)=\lim_{n\rightarrow\infty}(L)\int_{(a,b)}f_{d^n}(x)\mathrm{d}x=(L)\int_{(a,b)}f(x)\mathrm{d}x。$$

由文献[2]中非负可测函数的 L 积分定义和 D 积分的定义可知 $(D)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant(L)\int_{(a,b)}f(x)\mathrm{d}x$。而 f_{d^n} 为单调递增函数列,从而:

$$\lim_{n\rightarrow\infty}S(f,d^n)=\sup_{d^n}S(f,d^n)\leqslant(D)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant(L)\int_{(a,b)}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\rightarrow\infty}S(f,d^n)。$$

这就证明了

$$(D)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(L)\int_{(a,b)} f(x)\mathrm{d}x。$$

证毕。

引理 2　设 $I=(a,b)$，$f:I\to\bar{R}$ 为取值非正的递减函数且 f 是 D 可积函数，则：

$$(D)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(L)\int_{(a,b)} f(x)\mathrm{d}x。$$

证明　f 是 D 可积函数，因此由 f 的递减性可知，对任意 $x\in(a,b)$，$f(x)\in\mathbf{R}$，即 f 为实值函数。在 (a,b) 中任取一个序列 $\{b_n\}$，使得 $b_n<b_{n+1}$ 且 $\{b_n\}$ 收敛于 b。对任意 $x\in(a,b_n)$，$0\geqslant f(x)\geqslant f(b_n)>-\infty$，因此在 (a,b_n) 上 f 为有界递减函数，故 f 在 (a,b_n) 上 R 可积，从而也 L 可积。由于在 (a,b_n) 上 f 为有界函数，因此由 D 积分和 R 积分定义可知：

$$(D)\int_a^{b_n} f(x)\mathrm{d}x=(R)\int_a^{b_n} f(x)\mathrm{d}x。$$

从而：

$$\begin{aligned}(D)\int_a^{b_n} f(x)\mathrm{d}x&=(R)\int_a^{b_n} f(x)\mathrm{d}x\\&=(L)\int_{[a,b_n]} f(x)\mathrm{d}x\\&=-(L)\int_{[a,b_n]}(-f(x))\mathrm{d}x\\&=-(L)\int_{[a,b_n]} f^-(x)\mathrm{d}x。\end{aligned}$$

其中 $f^-(x)$ 为 $f(x)$ 的负部，即 $f^-(x)=-f(x)$。取 $b_0=a$，则由 $\{b_n\}$ 的定义可知：

$$\begin{aligned}(L)\int_{(a,b)} f(x)\mathrm{d}x&=-(L)\int_{(a,b)} f^-(x)\mathrm{d}x\\&=-\sum_{n=0}^{+\infty}(L)\int_{(b_n,b_{n+1})} f^-(x)\mathrm{d}x。\end{aligned}$$

下面证明 $-(L)\int_{(a,b)} f^-(x)\mathrm{d}x=(D)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

对任意 I 的重分 d，令 $f_d(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\chi_{(d_{n-1},d_n]}(x)\cdot f(d_n)$，则在 (a,b) 上 $|f_d(x)|\geqslant|f(x)|$。而由 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(d_n)(d_n-d_{n-1})$ 收敛可知该级数的两个余项(两个方向)都收敛于 0。即 f_d 在 (a,b) 上 D 可积，且积分为 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(d_n)(d_n-d_{n-1})$。

由 $f_d(x)$ 为 (a,b) 上的分段常值递减函数可知，$f_d(x)$ 在 (a,b) 上 L 可积且

$$(D)\int_a^b f_d(x)\mathrm{d}x=(L)\int_{(a,b)} f_d(x)\mathrm{d}x。$$

从而：

$$\begin{aligned}-(D)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=-\sup_d S(f,d)=-\sup_d S(f_d,d)\\&=-\sup_d(L)\int_{(a,b)} f_d(x)\mathrm{d}x\\&=\inf_d(L)\int_{(a,b)}(-f_d(x))\mathrm{d}x。\end{aligned}$$

类似于引理 1，设 $d^n=\{d_i^n\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ 为重分列，且 d^n 为 d^{n+1} 的加细，$\Delta d^n=\sup_{i=-\infty}^{+\infty}(d_i^n-d_{i-1}^n)\to 0$，$n\to\infty$。则非负函数列 $\{-f_{d^n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递减地几乎处处收敛到 $f^-(x)$。由 $-f_{d^n}(x)\geqslant f^-(x)\geqslant 0$ 可知，$-f_{d^1}(x)$ 是 $\{-f_{d^n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的一个控制函数。因此，由控制收敛定理可得：

$$\begin{aligned}\inf_d(L)\int_{(a,b)}(-f_d(x))\mathrm{d}x&=\lim_{n\to+\infty}(L)\int_{(a,b)}(-f_{d^n}(x))\mathrm{d}x\\&=(L)\int_{(a,b)} f^-(x)\mathrm{d}x\\&=-(L)\int_{(a,b)} f(x)\mathrm{d}x。\end{aligned}$$

即

$$-(L)\int_{(a,b)} f^-(x)\mathrm{d}x=(D)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x。$$

证毕。

在引理 2 的证明中，因为函数 f 是非正函数，而 $\{f_{d^n}\}_{n=1}^{\infty}$ 是非正递增函数列，因此证明过程中将 f_{d^n} 转化为非负递减函数列 $\{-f_{d^n}\}_{n=1}^{\infty}$ 进行讨论，进而利用控制收敛定理可得引理 2 的结论成立。

引理 3　设 $I=(a,b)$，$f:I\to\bar{R}$ 为取值非正的递减函数，若 f 为 I 上 D 不可积函数，即 $(D)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\infty$，则 f 也不是 I 上 L 可积函数。

证明　因为 f 为非正函数，因此由 $(D)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\infty$，以及对任意 $c\in(a,b)$，$(D)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(D)\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+(D)\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 可知：

$$(D)\int_c^b f(x)\mathrm{d}x=-\infty \tag{1}$$

从而：

$$(L)\int_{[c,b]} f(x)\mathrm{d}x=-(L)\int_{[c,b]} f^-(x)\mathrm{d}x \tag{2}$$

式(1)即对 $[c,b)$ 任意划分 $\{d_n\}$，$d_n<d_{n+1}$，$n\in\mathbf{Z}$，

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(d_n)(d_n-d_{n-1})=-\infty \tag{3}$$

也就是：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f^{-}(d_n)(d_n - d_{n-1}) = +\infty \qquad (4)$$

因此要完成证明只须证式(2)的值为$+\infty$。

用反证法。若式(2)的值有限,设其值为 m。对任意区间$[c,b]$的划分:$c=c_0<c_1<\cdots<c_n<c_{n+1}<\cdots<b$,由 L 积分的可数可加性知

$$(L)\int_{[c,b]} f^{-}(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}(L)\int_{[c_n,c_{n+1}]} f^{-}(x)\mathrm{d}x。$$

故 $m=\sum_{n=0}^{\infty}(L)\int_{[c_n,c_{n+1}]} f^{-}(x)\mathrm{d}x$。

对任意 n,因为 $f^{-}(x)$ 为$[c_n,c_{n+1}]$上单调函数,故由文献[1]定理 5.5.5 后注可知,$f^{-}(x)$ 也在$[c_n,c_{n+1}]$上广义 Riemann 可积,且

$$(L)\int_{[c_n,c_{n+1}]} f^{-}(x)\mathrm{d}x = (R)\int_{c_n}^{c_{n+1}} f^{-}(x)\mathrm{d}x \qquad (5)$$

用 m_n 表示上述积分值。从而对任意 $\varepsilon>0$,存在$[c_n,c_{n+1}]$的划分$[d_n^0,\cdots,d_n^{k_n}]$使得:

$$\sum_{i=1}^{k_n} f^{-}(d_n^i)(d_n^i - d_n^{i-1}) < m_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \qquad (6)$$

因此$\{d_n^i \mid i=0,\cdots,k_n;n=0,1,2,\cdots\}=\{d_0,d_1,d_2,\cdots\}$构成$(c,b)$一个划分。

由式(6)知:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} f(d_n)(d_{n+1}-d_n)\right| = \sum_{n=1}^{\infty} f^{-}(d_n)(d_{n+1}-d_n) < \sum_{n=1}^{\infty} m_n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n} = m+\varepsilon \qquad (7)$$

矛盾于 f 在(c,b)上不是 D 可积的。从而

$$(L)\int_{[c,b]} f(x)\mathrm{d}x = (D)\int_c^b f(x)\mathrm{d}x = -\infty。$$

证毕。

下面给出本文的主要结论,即对于单调递减函数而言,D 积分与 L 积分恒等价:

定理 2　设 $I=(a,b)$,$f:I\to\bar{R}$ 为任意一个 I 上递减函数,则:

$$(D)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (L)\int_{(a,b)} f(x)\mathrm{d}x。$$

证明　令 $c=\sup\{x \mid x\in(a,b)$ 且 $f(x)\geqslant 0\}$,则 $c\in[a,b]$且在(a,c)上 $f(x)\geqslant 0$;在(c,b)上 $f(x)<0$。由文献[2]知:

$$(D)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (D)\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + (D)\int_c^b f(x)\mathrm{d}x。$$

a)在(a,c)上因为 $f(x)\geqslant 0$,从而由引理 1 可得 $(D)\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = (L)\int_{(a,c)} f(x)\mathrm{d}x$。

b)在(c,b)上因为 $f(x)<0$,因此,无论 $f(x)$ 在(c,b)上是否 D 可积,由引理 2 和引理 3 可知

$$(D)\int_c^b f(x)\mathrm{d}x = (L)\int_{(c,b)} f(x)\mathrm{d}x。$$

从而:

$$\begin{aligned}(D)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= (D)\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + (D)\int_c^b f(x)\mathrm{d}x\\ &= (L)\int_{(a,c)} f(x)\mathrm{d}x + (L)\int_{(c,b)} f(x)\mathrm{d}x\\ &= (L)\int_{(a,b)} f(x)\mathrm{d}x。\end{aligned}$$

证毕。

3　区间上单调递减函数的积分的性质

本文证明了对于单调递减函数而言,D 积分与 L 积分恒等价。因此关于 D 积分的研究可归结为 L 积分的研究。下面基于两个积分的等价性讨论 D 积分的基本性质及收敛定理。

定理 3　设 f,g 为区间 $I=(a,b)$ 上单调递减的 D 可积函数。α,β 为正数,下述结论成立:

a)(线性性)$(D)\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))\mathrm{d}x = \alpha(D)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta(D)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$。

b)若 $g(x)$ 在 I 上 D 可积,而 $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$,则 $f(x)$ 也在 I 上 D 可积。

c)在区间 I 上若 $f(x)\leqslant g(x)$,则 $(D)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant (D)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$。

特别地,若区间 $I=(a,b)$ 为有限区间,且 $m\leqslant f(x)\leqslant M$,则:

$$m(b-a)\leqslant(D)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)。$$

d)(可加性[2])$(D)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (D)\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + (D)\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$,　$a\leqslant c\leqslant b$。

定理 3 中性质 a)—c)是文献[2]未给出的性质,可直接利用 L 积分的相应性质得到。而性质 d)在文献[2]中的证明是利用 D 积分的定义直接证明的,过程比较繁琐。下面利用 D 积分与 L 积分的等价性给出定理 3 d)的一个简单证明。

证明　由定理 2 可得:

$$\begin{aligned}(D)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= (L)\int_{(a,b)} f(x)\mathrm{d}x\\ &= (L)\int_{(a,c)\cup(c,b)} f(x)\mathrm{d}x\\ &= (L)\int_{(a,c)} f(x)\mathrm{d}x + (L)\int_{(c,b)} f(x)\mathrm{d}x\\ &= (D)\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + (D)\int_c^b f(x)\mathrm{d}x。\end{aligned}$$

证毕。

利用 D 积分与 L 积分的等价性，可极大地简化文献[2]中如下命题的证明。

命题 1[2]　（单调收敛定理）　设 $I=(a,b)$，f_n：$I\to\bar{R}$ 为区间 I 上递减函数序列且 $0\leqslant f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}(D)\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=(D)\int_a^b\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x$。

证明　由定理 2 知

$$\lim_{n\to+\infty}(D)\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}(L)\int_{(a,b)}f_n(x)\mathrm{d}x。$$

$f_n(x)$ 为区间 I 上的单调递减函数序列，因此有 $f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)$。利用 L 积分中的单调收敛定理可得：

$$\lim_{n\to+\infty}(D)\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}(L)\int_{(a,b)}f_n(x)\mathrm{d}x=(L)\int_{(a,b)}\lim_{n\to+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=(D)\int_a^b\lim_{n\to+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x。$$

证毕。

在文献[2]中研究非可加函数的积分时，积分的收敛性质起到重要作用，故在本节最后讨论非负单调函数积分的收敛性质。

命题 2　（有界收敛定理）　设 $I=(a,b)$ 为有限区间，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 I 上单调递减函数列，且对任意 $x\in I$，$|f_n(x)|\leqslant M,M>0$。若 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ 在 I 上几乎处处成立，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(D)\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=(D)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。

命题 3　（Fatou 引理）　若 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $I=(a,b)$ 上非负单调递减函数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ 在 I 上几乎处处成立，则 $(D)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\liminf\limits_{n\to\infty}(D)\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$。

推论 1　设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $I=(a,b)$ 上非负单调递减函数列，且 $f_n(x)\leqslant f(x)$ 及 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 在 I 上几乎处处成立，则 $(D)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}(D)\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$。

证明　因为 $f_n(x)\leqslant f(x)$ 在 I 上几乎处处成立，所以由定理 3 中性质 c) 可得 $(D)\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x\leqslant(D)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 对所有 n 成立，故 $\limsup\limits_{n\to\infty}(D)\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x\leqslant(D)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$。再结合命题 3 即知结论成立。证毕。

定理 4（控制收敛定理）　设 g 为区间 $I=(a,b)$ 上可积函数，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 I 上单调递减函数列使得 $|f_n(x)|\leqslant g(x)$，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 在 I 上几乎处处成立，则

$$\lim_{n\to\infty}(D)\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=(D)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x。$$

4　结　论

单调函数的 Denneberg 积分是非可加测度和积分理论的基础。本文主要通过将取值为负的单调函数转化为非负函数，再利用 Lebesgue 积分的收敛性质证明了 Denneberg 积分与 Lebesgue 积分恒等价。利用 Lebesgue 积分，可以较容易地得到 Denneberg 积分的基本性质如积分的线性性、单调性以及各种收敛定理等，从而丰富了 Denneberg 积分的研究方法。基于本文证明的两种积分的等价关系，后续将探索模糊值函数关于模糊测度的模糊积分收敛定理及其他性质。

参考文献：

[1] 樊太和，贺平安. 实变函数论[M]. 北京：清华大学出版社，2016：53-133.

[2] Denneberg D. Non-Additive Measure and Integral[M]. Dordrecht：Kluwer Academic Publishers，1994：1-59.

[3] Choquet G. Theory of capacities[J]. Annales de l'Institut Fourier，1953，5：131-295.

[4] Wang Z，Klir G J. Generalized Measure Theory[M]. New York：Springer Verlag，2008：167-245.

[5] Dubois D，Prade H. Towards fuzzy differential calculus，Part 1：Integration of fuzzy mapping[J]. Fuzzy Sets and Systems，1982，8(1)：1-17.

[6] Murofushi T，Sugeno M. An interpretation of fuzzy measure and the Choquet integral as an integral with respect to a fuzzy measure[J]. Fuzzy Sets and Systems，1989，29(2)：201-227.

[7] 巩增泰，郭元伟.区间值和模糊数值函数的 Choquet 积分[J]. 兰州大学学报，2009，45(4)：112-117.

[8] 巩增泰，寇旭阳.集值函数关于模糊测度 Choquet 积分的表示和积分原函数性质[J]. 山东大学学报，2017，52(8)：1-9.

[9] Klement E P，Mesiar R，Pap E. A universal integral as common frame for Choquet and Sugeno integral[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems，2010，18(1)：178-187.

[10] 徐鹤萍，张承坤，李军. 单调测度空间上一般实值可测

函数的泛积分[J]. 中国传媒大学学报，2018，25(3)：48-54.
[11] Mesia R，Li J，Pap E. Superdecomposition integrals [J]. Fuzzy Sets and Systems，2015，259(5)：3-11.
[12] Li J，Mesia R，Klement E P，Pap E. Convergence theorems for monotone measures[J]. Fuzzy Sets and Systems，2015，281(C)：103-127.
[13] Even Y，Lehrer E. Decomposition-integral：unifying Choquet and the concave integrals [J]. Economic Theory，2014，56(1)：33-58.
[14] Klement E P，Li J，R Mesiar，Pap E. Integrals based on monotone set functions [J]. Fuzzy Sets and Systems，2015，281(C)：88-102.
[15] Torra V，Narukawa Y. Numerical integration for the Choquet integral[J]. Information Fusion，2016，31(C)：137-145.

(责任编辑:康 锋)