浙江理工大学学报，2019，41(1)：113-117
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
DOI：10.3969/j.issn.1673-3851(n).2019.01.016

基于相似度的一般全蕴涵推理方法

王兰婷，裴道武
（浙江理工大学理学院，杭州 310018）

摘　要：自我国著名数学家王国俊提出全蕴涵推理方法以来，对该推理方法的改进或完善已成为模糊推理研究的热点之一。为了使得全蕴涵推理方法有更广泛的适用性，结合相似度推理方法，在全蕴涵推理方法的基础上，提出了一种新的模糊推理方法，即基于相似度的一般全蕴涵推理方法。给出针对两个基本推理模型FMP和FMT的统一算法，并且分别讨论该方法在两个模型下算法的还原性，从而为模糊推理提供了更多的方法。

关键词：模糊逻辑；模糊推理；全蕴涵推理方法；一般全蕴涵推理方法；相似度
中图分类号：O159　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-3851 (2019) 01-0113-05

General full implication fuzzy reasoning method based on similarity

WONG Lanting，*PEI Daowu*
（School of Sciences，Zhejiang Sci-Tech University，Hangzhou 310018，China）

Abstract：Since the Chinese famous mathematician Wang Guojun proposed the full implication reasoning method，improving the reasoning method has become one of the hot topics in the study of fuzzy reasoning. In order to make full implication reasoning method more widely applicable，a new fuzzy reasoning method based on full implication reasoning method is proposed by combining similarity reasoning method，i.e. similarity-based general full implication reasoning method. A unified algorithm for two basic reasoning models FMP and FMT is given，and the reductiveness of the algorithm under the two models is discussed respectively，which provides more methods for fuzzy reasoning.

Key words：fuzzy logic；fuzzy reasoning；full implication reasoning method；general full implication reasoning method；similarity

0　引　言

模糊推理在模糊系统控制、模糊专家系统、模糊模式识别、模糊决策分析、模糊数据挖掘和人工智能等领域中扮演着越来越重要的角色[1-3]。Fuzzy Modus Ponens（FMP）和 Fuzzy Modus Tollens（FMT）是模糊推理中的两个最基本的模型。简单来说，这两个规则即：给定一个模糊规则“如果 A 那么 B”，且给出 A^*，求出 B^*；或者，“如果 A 那么 B”，且给出 B^*，求出 A^*。

1973年，Zadeh提出了模糊推理的合成推理规则，简称为CRI方法[2]。王国俊[4]指出，CRI方法采用了复合运算，缺少严格的逻辑依据。为了解决这一问题，王国俊[2,4]提出了模糊推理的全蕴涵推理方法，简称为三I方法。Pei[5]给出了该方法的统一算法公式；Tang等[6]认为，在三I方法中，可以将第一和第三个蕴涵看作是逻辑系统中的模糊联结词；Zhou等[7]考虑了规则前提对于新输入的支持度，作为三I方法的另一种改进，提出了五蕴涵推理方法。关于基于三I方法的研究，读者可参阅综述文献[8]。

收稿日期：2018－07－08　　网络出版日期：2018－10－14
基金项目：国家自然科学基金项目(11171308，61379018，61472471)
作者简介：王兰婷(1993－)，女，安徽阜阳人，硕士研究生，主要从事模糊数学方面的研究。
通信作者：裴道武，E-mail：peidw@163.com

模糊相似度在近似推理中发挥着重要的作用。Tursken 等[9]提出了基于相似度的模糊推理方法。Wang 等[10]把蕴涵与相似度相结合,提出了基于蕴涵构造相似度的方法。Zhou 等[7]认为,三 I 算法只体现了 A 与 B 之间的关系,以及 A^* 与 B^* 之间的关系,但没有体现出 A 与 A^* 之间的关系。他们认为 A 与 A^* 之间也应该存在某种关系,并把这种关系认为是蕴涵关系。然而,本文认为这种关系应该是相似关系。本文将相似度和本文作者提出的一般全蕴涵推理方法相结合,提出了一种新的推理方法,即基于相似度的一般全蕴涵推理方法(SGTI),并且讨论这一新方法的基本性质。

1 预备知识

本节给出将要用到的一些概念、记号、术语。本文用 E 记实数单位区间$[0,1]$,$F(X)$记论域 X 上的所有模糊集构成的集合。

定义 1[1] 算子 $R:E^2\to E$ 是模糊蕴涵,简称为蕴涵,如果 $\forall a,b,c\in E$,有

a) $a\leqslant b\Rightarrow R(a,c)\geqslant R(b,c)$,

b) $b\leqslant c\Rightarrow R(a,b)\leqslant R(a,c)$,

c) $R(0,a)=R(a,1)=1,R(1,0)=0$。

为了方便起见,本文中有时用 R,有时用$\to$表示蕴涵。

定义 2[1] 函数 $T:E^2\to E$ 是三角模,简称为 t 模。如果 $\forall a,b,c\in E$,有

a) $T(a,1)=a$,

b) $T(a,b)=T(b,a)$,

c) $T(a,T(b,c))=T(T(a,b),c)$,

d) $a\leqslant b\Rightarrow T(a,c)\leqslant T(b,c)$。

如果 T 是 t 模,令

$$R(a,b)=\vee\{c\in E\mid T(a,c)\leqslant b\},a,b,c\in E。$$

这样定义的算子 R 是蕴涵,称之为由 T 生成的剩余蕴涵,简称为 R 蕴涵。

引理 1[1] 设算子 R 是 R 蕴涵,则 R 有如下性质:对于任意的 $a,b,c\in E$,

a) $R(a,1)=1$,

b) $R(a,b)=1$ 当且仅当 $a\leqslant b$,

c) $R(1,a)=a$。

定义 3[1] 设 T 是 t 模,R 是蕴涵,(T,R)是剩余对,如果 $\forall a,b,c\in E$,有

$$T(a,b)\leqslant c \text{ 当且仅当 } a\leqslant R(b,c)。$$

已有研究结果[2]表明,如果 T 是左连续 t 模,R 是由 T 生成的 R 蕴涵,则(T,R)是剩余对。

例 以下给出三个剩余对:

a) Lukasiewicz$t$ 模 T_L 和它对应的剩余蕴涵 R_L:$T_L(a,b)=0\vee(a+b-1),R_L(a,b)=1\wedge(1-a+b)$。

b) Goguen$t$ 模 T_{GO}和它对应的剩余蕴涵 R_{GO}:

$$T_{GO}(a,b)=ab,R_{GO}(a,b)=\begin{cases}1,a\leqslant b\\ \dfrac{a}{b},a>b\end{cases}。$$

c) Godel$t$ 模 T_G 和它对应的剩余蕴涵 R_G:

$$T_G(a,b)=a\wedge b,R_G(a,b)=\begin{cases}1,a\leqslant b\\ b,a>b\end{cases}。$$

定义 4[2] FMP 问题的某个推理方法称为还原的,如果由 $A^*=A$ 可推出 $B^*=B$。类似地,FMT 问题的某个推理方法称为还原的,如果由 $B^*=B$ 可推出 $A^*=A$。

定义 5[11] 称映射 $S:F(X)\times F(X)\to E$ 为 $F(X)$上的相似度,若 S 满足下列条件:

a) $S(X,0)=0$,

b) $S(A,A)=1,A\in F(X)$,

c) $S(A,B)=S(B,A),A,B\in F(X)$,

d) 如果 $A\subset B\subset C$,则 $S(A,C)\leqslant S(A,B)\wedge S(B,C),A,B,C\in F(X)$。

2 SGTI 方法

本文仅考虑模糊推理最基本的形式 FMP 和 FMT,即:

FMP:已知 $A\to B$,且给定 A^*,求 B^*;

FMT:已知 $A\to B$,且给定 B^*,求 A^*。

在以上的推理形式中,$A,A^*\in F(X),B,B^*\in F(Y)$。

Zadeh[12]将 $A\to B$ 视为模糊关系 $R(x,y)$,这里 $R(x,y)=R(A(x),B(y)),(x,y)\in X\times Y$,并提出了模糊推理方法 CRI,其主要做法是用 A^* 简单地和 $A\to B$ 进行复合以求得 B^*。

Wang[4]认为,Zadeh 没有考虑到 $A^*\to B^*$ 与 $A\to B$ 之间的关系,同时他认为这种关系应该是:$R(A^*(x),B^*(y))$与$R(A(x),B(y))$之间应该满足最大可能的蕴涵关系,即表达式

$$(A(x)\to B(y))\to(A^*(x)\to B^*(y)) \tag{1}$$

的值越大越好。本文把能使(1)式取得最大值的集合称为"好集"。对于 FMP 问题来说,当 B^* 等于 1 时,即(1)取得最大值 1 的好集。显然,这里的最大模糊集是不符合要求的。对于 FMP 问题来说,寻求的是使得式(1)取得最大值的最小模糊集 B^*。

然而,本文认为只有考虑 A 和 B 之间的模糊关

系与 A^* 和 B^* 之间的模糊关系之间的联系是不够的。

例如:命题 A 表示“昨天的天气比较阴”,命题 B 表示“昨天下雨”,命题 A^* 表示“今天天气有点阴”,B^* 表示“今天下雨”。如果今天的天气阴的程度和昨天很相近,那么就可以很自然得到“由 A^* 则 B^*”。

因此,本文希望用 $R(A,B)$ 和 $S(A,B)$ 共同去支持 $R(A^*,B^*)$,即使得式(2)取得尽可能大的值:

$$((A(x)\rightarrow_1 B(y))\wedge S(A^*(x),A(x)))\rightarrow_2(A^*(x)\rightarrow_1 B^*(y)) \tag{2}$$

这时要求 B^* 应当是使得上式 $\forall x\in X,\forall y\in Y$ 取得最大值。然而,对于模糊蕴涵只要 $a\leqslant b$ 时就有 $a\rightarrow b=1$,当 $B^*=1$ 时,在 $F(Y)$ 中,式(2)对于任意的 x 和 y 都取最大值 1。显然,这种 B^* 是不适用的。所以本文所求的 B^* 应当是使得式(2)取得最大值的最小模糊集。

显然,$\forall x\in X,\forall y\in Y$,式(2)的最大值总是存在的,本文令 $M(x,y)$ 为其最大值。

命题 1　设 $A,A^*\in F(X),B\in F(Y)$,则当蕴涵算子 $\rightarrow_1$ 是右连续的,则存在使得式(2)取得最大值的最小模糊集 $B^*\in F(Y)$。

证明　首先证明,存在能够使得式(2)取得最大值的模糊集。由蕴涵关于第二个元素不减的性质,当蕴涵 $\rightarrow$ 满足 $a\leqslant b$ 时 $a\rightarrow b=1$,易得

$$\begin{aligned}M(x,y)&=((A(x)\rightarrow_1 B(y))\wedge S(A^*(x),A(x)))\rightarrow_2(A^*(x)\rightarrow_1 1)\\&=((A(x)\rightarrow_1 B(y))\wedge S(A^*(x),A(x)))\rightarrow_2 1=1。\end{aligned}$$

下面证明在 $F(Y)$ 中有最小的好集 B^*。设 $B=\{B\mid B\in F(Y),B$ 是好集$\}$,则由 $1\in B$ 知 B 非空。固定一对 (x,y),则对每一个 $B_i\in B$,

$$M(x,y)=((A(x)\rightarrow_1 B(y))\wedge S(A^*(x),A(x)))\rightarrow_2(A^*(x)\rightarrow_1 B_i) \tag{3}$$

令 $B^*=\wedge\{B_i\mid B_i\in B\}$,则必有某 i_0,使得 $B^*(y)=B_{i0}(y)$,从而

$$M(x,y)=((A(x)\rightarrow_1 B(y))\wedge S(A^*(x),A(x)))\rightarrow_2(A^*(x)\rightarrow_1 B^*(y))。$$

因为反之,B 中有 $B_{i1},B_{i2},\cdots$,使

$$B^*(y)=\lim_{n\rightarrow\infty}B_{in}(y)。$$

因为 $B_{ik}(y)>B^*(y)$,所以上式表明 $B^*(y)$ 是 $\{B_{in}(y)\}$ 的右极限,因为 $\rightarrow_1$ 是右连续的,则当 $i=i_n$ 时式(3)成立,即 B^* 是好集,从而有 i_0,使得 $B^*(y)=B_{i0}(y)$,矛盾。□

本文用基于相似度的一般全蕴涵推理方法来解决模糊推理中的两个基本问题 FMP 和 FMT。

定义 6　设 $\alpha\in E,R:E^2\rightarrow E$ 关于第二个变量不减,$A,A^*\in F(X),B\in F(Y)$。如果论域 Y 上的模糊集 C 满足

$$R_2((R_1(A(x),B(y))\wedge S(A(x),A^*(x))),R_1(A^*(x),C(y)))=M(x,y),x\in X,y\in Y,$$

则称 C 为 FMP 问题的基于相似度的一般全蕴涵推理方法(SGTI)可行解。

定义 7　设 $\alpha\in ER:E^2\rightarrow E$ 关于第二个变量不减,$A\in F(X),B,B^*\in F(Y)$。令

$$N(x,y)=R_2((R_1(A(x),B(y))\wedge S(A(x),A^*(x))),R_1(0,B^*(y)))。$$

如果论域 X 上的模糊集 D 满足

$$R_2((R_1(A(x),B(y))\wedge S(A(x),A^*(x))),R_1(D(x),B^*(y)))=N(x,y),x\in X,y\in Y,$$

则称 D 为 FMT 问题的基于相似度的一般全蕴涵推理方法(SGTI)可行解。

命题 2　设 $\rightarrow_1,\rightarrow_2$ 是两个模糊蕴涵,若 C_1 为 FMP 问题的 SGTI 可行解,且 $C_1\leqslant C_2$,则 C_2 也是 FMT 问题的 SGTI 可行解。

证明　因为 C_1 为 FMP 问题的 SGTI 可行解,则

$$(A(x)\rightarrow_1 B(y)\wedge S(A(x),B(y)))\rightarrow_2(A^*(x)\rightarrow_1 C_1(y))=M(x,y),x\in X,y\in Y。$$

又因为 $C_1\leqslant C_2$,$\rightarrow_1$ 关于第二个变量不减,则

$$A^*(x)\rightarrow_1 C_1(y)\leqslant A^*(x)\rightarrow_1 C_2(y)。$$

这表明 $\rightarrow_2$ 关于第二个变量不减。于是

$$(A(x)\rightarrow_1 B(y)\wedge S(A(x),B(y)))\rightarrow_2(A^*(x)\rightarrow_1 C_1(y))\leqslant(A(x)\rightarrow_1 B(y)\wedge S(A(x),B(y)))\rightarrow_2(A^*(x)\rightarrow_1 C_2(y))。$$

所以

$$M(x,y)\leqslant(A(x)\rightarrow_1 B(y)\wedge S(A(x),B(y)))\rightarrow_2(A^*(x)\rightarrow_1 C_2(y))。$$

又因为

$$M(x,y)\geqslant(A(x)\rightarrow_1 B(y)\wedge S(A(x),B(y)))\rightarrow_2(A^*(x)\rightarrow_1 C_2(y)),$$

由此可以得到

$$M(x,y)=(A(x)\rightarrow_1 B(y)\wedge S(A(x),B$$

$(y)))\to$

$_2(A^*(x)\to_1 C_2(y))$。

所以 C_2 也是 FMP 问题的 SGTI 可行解。□

命题 3 设 $\to_1,\to_2$ 是两个模糊蕴涵,若 D_1 为 FMT 问题的 SGTI 可行解,且 $D_1\leqslant D_2$,则 D_2 也是 FMT 问题的 SGTI 可行解。

证明 根据模糊蕴涵关于第一个变量不减,命题 3 的证明与命题 2 相似,故略去证明细节。□

进一步,如果 FMP 问题的 SGTI 可行解集合中存在最小元 B^*,则称 B^* 是 FMP 问题的 SGTI 解。如果 FMT 问题的 SGTI 可行解集合中存在最大元 A^*,则称 A^* 是 FMT 问题的 SGTI 解。

命题 4 设 T_1,T_2 是左连续 t 模,$R_1=\to_1$,$R_2=\to_2$ 分别是由 T_1,T_2 生成的剩余蕴涵,则 FMP 问题的 SGTI 解如下:

$$B^*(y)=\bigvee_{x\in X}T_1((R_1(A(x),B(y))\wedge S(A(x),A^*(x))),A^*(x)),y\in Y \tag{4}$$

命题 5 设 T_1,T_2 是左连续 t 模,$R_1=\to_1$,$R_2=\to_2$ 分别是由 T_1,T_2 生成的剩余蕴涵,则 FMT 问题的 SGTI 解如下:

$$A^*(x)=\bigwedge_{y\in Y}R_1((R_1(A(x),B(y))\wedge S(B(y),B^*(y))),B^*(y)),x\in X \tag{5}$$

由于以上两个命题是下一节更一般命题的特殊形式,故此省略其证明。

3 α-SGTI 方法

下面本文给出基于相似度的一般全蕴涵推理方法的更一般形式,即 α-一般全蕴涵推理方法,称为 α-SGTI 方法,并分别给出 α-SGTI 关于 FMP 和 FMT 问题的解的统一形式。

定义 8 设 $\alpha\in E$,$R:E^2\to E$ 关于第二个变量不减,$A,A^*\in F(X)$,$B\in F(Y)$。令

$$FMP_\alpha(A,B,A^*)=\{C\in F(Y)\mid R_2((R_1(A(x),B(y))\wedge S(A(x),A^*(x))),R_1(A^*(x),C^*(y)))\geqslant\alpha\} \tag{6}$$

如果 B_α^* 是 $FMP_\alpha(A,B,A^*)$ 中的最大模糊集,则称 B_α^* 是 FMP 问题的 α-基于相似度得一般推理方法(α-SGTI)解。

定义 9 设 $\alpha\in E$,$R:E^2\to E$ 关于第一个变量不增,$A\in F(X)$,$B,B^*\in F(Y)$。令

$$FMT_\alpha(A,B,B^*)=\{D\in F(X)\mid R_2((R_1(A(x),A(y))\wedge S(A(x),A^*(x))),R_1(D^*(x),B^*(y)))\geqslant\alpha\} \tag{7}$$

如果 A_α^* 是 $FMT_\alpha(A,B,B^*)$ 中的最小模糊集,则称 A_α^* 是 FMT 问题的 α-基于相似度得一般推理方法(α-SGTI)解。

命题 6 设 T_1,T_2 是左连续 t 模,$R_1=\to_1$,$R_2=\to_2$ 分别是由 T_1,T_2 生成的剩余蕴涵,则 FMP 的 α-SGTI 解为

$$B_\alpha^*(y)=\bigvee_{x\in X}T_1(T_2(R_1(A(x),B(y))\wedge S(A(x),A^*(x)),\alpha),A^*(x)),y\in Y \tag{8}$$

证明 首先证明 $B_\alpha^*(y)$ 使得式(6)成立。显然,$\forall x\in X$,都有下式成立:

$T_1(T_2(R_1(A(x),B(y))\wedge S(A(x),A^*(x)),\alpha),A^*(x))\leqslant B_\alpha^*(y)$,

$T_2(R_1(A(x),B(y))\wedge S(A(x),A^*(x)),\alpha)\leqslant R_1(A^*(x),B_\alpha^*(y))$,

$\alpha\leqslant R_2(R_1(A(x),B(y))\wedge S(A(x),A^*(x)),\alpha)$,

$R_1(A^*(x),B_\alpha^*(y)))$。

下面证明 $B_\alpha^*(y)$ 是满足式(6)的最小模糊集。对于 $C\in F(Y)$,$x\in X$,$y\in Y$,满足

$\alpha\leqslant R_2(R_1(A(x),B(y))\wedge S(A(x),A^*(x)),\alpha),R_1(A^*(x),C(y)))$,

$T_2(R_1(A(x),B(y))\wedge S(A(x),A^*(x)),\alpha)\leqslant R_1(A^*(x),C(y))$,

$T_1(T_2(R_1(A(x),B(y))\wedge S(A(x),A^*(x)),\alpha),A^*(x))\leqslant C(y)$。

所以,$B_\alpha^*(y)$ 是使得式(6)成立的最小模糊集。□

命题 7 设 T_1,T_2 是左连续 t 模,$R_1=\to_1$,$R_2=\to_2$ 分别是由 T_1,T_2 生成的剩余蕴涵,则 FMT 的 α-SGTI 解为

$$A_\alpha^*(x)=\bigwedge_{y\in Y}R_1(T_2((R_1(A(x),B(y))\wedge S(B(x),B^*(x)),\alpha),B^*(y)),x\in X \tag{9}$$

证明 首先证明 $A_\alpha^*(x)$ 使得式(7)成立。

$A_\alpha^*(x)\leqslant R_1(T_2((R_1(A(x),B(y))\wedge S(B(x),B^*(x)),\alpha),B^*(y))$,

$T_2((R_1(A(x),B(y))\wedge S(B(x),B^*(x)),\alpha)\leqslant R_1(A_\alpha^*(x),B^*(y))$,

$\alpha\leqslant R_2((R_1(A(x),B(y))\wedge S(B(x),B^*(x)),R_1(A_\alpha^*(x),B^*(y))$。

由此可见 $A_\alpha^*(x)$ 使得式(7)成立。

下面证明 $A_\alpha^*(x)$ 是使得式(7)成立的最小模糊集。假设 $D\in FMT_\alpha(A,B,B^*)$,则

$\alpha\leqslant R_2((R_1(A(x),B(y))\wedge S(B(x),B^*(x)),\alpha),R_1(D(x)B^*(y))$,

$$T_2((R_1(A(x),B(y))\wedge S(B(x),B^*(x)),\alpha)\leqslant R_1(D(x),B^*(y)),$$

$$D(x)\leqslant R_1(T_2((R_1(A(x),B(y))\wedge S(B(x),B^*(x)),\alpha),B^*(y))$$

所以 $A_\alpha^*(x)$是使得式(7)成立的最大模糊集。□

4　SGTI 方法的还原性

命题 8　设 A 是 X 上的正规模糊集,即 $\exists x_0\in X$,使得 $A(x_0)=1$,那么由命题 4 给的 FMP 问题的 SGTI 算法是还原的。

证明　$B\in F(Y)$使得式(4)成立,因此

$$B(y)\geqslant B^*(y)=\bigvee_{x\in X}T_1((R_1(A(x),B(y))\wedge S(A(x),A^*(x))),A^*(x))\geqslant T_1((R_1(A(x_0),B(y))\wedge S(A(x_0),A^*(x_0))),A^*(x_0))=T_1((R_1(1,B(y))\wedge S(1,1)),1)=B(y)。$$

故 $B*(y)=B(y)$,$y\in Y$。所以,由命题 4 给出的 FMP 问题的 SGTI 算法是还原的。□

接下来讨论 FMT 问题的 SGTI 算法的还原性。

命题 9　设 B 是 Y 上的正规模糊集,即 $\exists y_0\in Y$,使得 $B(y_0)=1$,那么由命题 5 给出的 FMT 问题的 SGTI 算法是还原的。

证明　显然,如果 $A\in F(X)$使得式(5)成立,则

$$A(x)\leqslant A^*(x)=\bigwedge_{y\in Y}R_1((R_1(A(x),B(y))\wedge S(B(y),B^*(y))),B^*(y))\leqslant R_1((R_1(A(x),B(y_0))\wedge S(B(y_0),B^*(y_0))),B^*(y_0))=R_1((R_1(A(x),1))\wedge S(1,1)),1)=A(x)。$$

由此可知,$A^*(x)=A(x)$,即由命题 5 给出的 FMT 问题的 SGTI 算法是还原的。□

5　结束语

模糊相似度反映了模糊集之间的相似程度。本文提出了一种基于相似度的模糊推理方法,把相似度运用到本文提出的一般全蕴涵推理方法上,得到了基于相似度的一般全蕴涵模糊方法,给出了这种新的推理方法关于 FMP 和 FMT 问题解的统一表达式,并且证明了这种新的模糊推理方法具有很好的还原性。后续将探索这种新的推理方法的鲁棒性等其他性质。

参考文献:

[1] 刘华文.基于三角模的模糊逻辑理论及其应用[M].北京:科学出版社,2013:1-167.

[2] 王国俊.非经典数理逻辑与近似推理[M].北京:科学出版社,2008:69-116.

[3] 刘华文.关于模糊逻辑与模糊推理逻辑基础问题的十年研究综述[J].工程数学学报,2004,21(2):249-258.

[4] Wang G J. On the logic foundation of fuzzy reasoning [J]. Information Sciences,1999,177(1):47-88.

[5] Pei D W. Unified full implication algorithms of fuzzy reasoning[J]. Information Sciences,2008,178(2):520-530.

[6] Tang Y M, Yang X Z. Symmetric implicational method of fuzzy reasoning[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2013,54(8):1034-1048.

[7] Zhou B K, Xu G, Li S. The quintuple implication principle of fuzzy reasoning[J]. Information Sciences,2015,297(10):202-215.

[8] 王国俊,刘华文,宋建社.三 I 方法综述[J].模糊系统与数学,2006,20(6):1-14.

[9] Tursken I B, Zhao Z. An approximate analogical reasoning approach based on similarity measures[J]. IEEE Transactions Systems Man and Cybernetics,1988,18(6):1049-1056.

[10] Wang D G, Meng Y P. A fuzzy similarity inference method for fuzzy reasoning[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2008, 56(10): 2445-2454.

[11] 汪培庄.模糊集合论及其应用[M].上海:上海科技出版社,1983:22-158.

[12] Zadeh L A. Fuzzy Sets. Information and Control,1965,8(3):338-335.

(责任编辑:康　锋)