浙江理工大学学报(自然科学版),第 39 卷,第 6 期,2018 年 11 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University (Natural Sciences)
Vol. 39, No. 6, Nov. 2018

DOI:10.3969/j.issn.1673-3851(n).2018.06.017

耗散修正的 Camassa-Holm 方程解的存在唯一性

冉丽霞,陈 涌
(浙江理工大学理学院,杭州 310018)

摘 要:通过对修正的 Camassa-Holm 方程添加耗散项 $\varepsilon\partial_x^4 u$,改进了其解的存在空间,证明了其在低正则性空间上解的存在唯一性。首先,通过 Sobolev 嵌入定理、Hölder 不等式及傅里叶变换建立了非线性项的估计;其次,由压缩映射原理证明了解的局部存在唯一性;最后,由解的能量估计证明了整体解的存在性。结果表明:对于初值 $u_0\in L^2(\mathbf{R})$,耗散修正的 Camassa-Holm 方程在空间 $C([0,T];L^2(\mathbf{R}))\cap L^2((0,T);H^2(\mathbf{R}))$ 存在唯一的局部解;进一步,对于初值 $u_0\in H^2(\mathbf{R})$,耗散修正的 Camassa-Holm 方程在空间 $C([0,T];L^2(\mathbf{R}))\cap L^2((0,T);H^2(\mathbf{R}))$ 存在整体解。

关键词:修正的 Camassa-Holm 方程;存在性;唯一性;压缩映射

中图分类号:O211.63　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1673-3851 (2018) 11-0759-06

0 引 言

本文主要考虑修正的 Camassa-Holm 方程的 Cauchy 问题,该问题可以描述为:

$$m_t+au_xm+bum_x=0,\quad t>0,x\in\mathbf{R} \tag{1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),x\in\mathbf{R} \tag{2}$$

其中:a,b 为正常数;$m=\Lambda^{2k}u=(1-\partial_x^2)^k u,k\in\mathbf{N}$;$u(x,t)$表示在 t 时刻在空间方向 x 的流体速度;u_0 表示初始时刻的速度;m_t,m_x 分别表示 m 关于 t 和 x 的偏导数。

修正的 Camassa-Holm 方程是作为不变的 H^k 空间中扩散自同态群的测地线方程,由 Constantin 等[1-2]导出。当 $a=2,b=1,k=0$ 或者 1 时,方程(1)分别为 KdV 方程和 Camassa-Holm 方程,其中 Camassa-Holm 方程的形式为:

$$u_t-u_{xxt}+3uu_x=2u_xu_{xx}+uu_{xxx} \tag{3}$$

它最早是被 Fokas 等[3]提出,直到 Camassa 等[4]将其作为浅水波模型才被认真研究。方程(3)从被研究以来,许多人都在关于它的适定性方面做出了贡献,例如,Constantin[5]、Constantin 等[6]以及 Misiolek[7]分别讨论了 $s\geqslant 4,s\geqslant 3$ 和 $s>3/2$ 时关于初值在 $H^s(S),S=[0,2\pi]$上的局部适定性;在非周期情况下,Li 等[8]证明了初值在 $H^s(\mathbf{R})(s>3/2)$上解的局部适定性。关于修正的 Camassa-Holm 方程(1),Malachlan 等[9]研究了其解的适定性以及弱解的存在性,他们证明了周期的 Cauchy 问题在空间 $H^s(s>7/2)$上是局部适定的,并且解持续依赖于初始值;在非周期情况下,Mu 等[10]研究了解在 $H^s(\mathbf{R})(s>7/2)$空间的局部适定性问题,并且证明了解依然持续依赖于初始值。Fu 等[11]研究了方程(1)的 Cauchy 问题并且证明了解在 $H^s(\mathbf{R})(s>7/2)$空间不一致连续。

类似修正的 Camassa-Holm 方程,Escher 等[12]推导了一个二元修正的 Camassa-Holm 方程组:

$$\begin{cases} m_t+au_xm+um_x=\alpha u_x-k\rho\rho_x, & t>0,x\in\mathbf{R}\\ \rho_t+u\rho_x+(a-1)u_x\rho=0, & t>0,x\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=u_0(x),\rho(x,0)=\rho_0(x), & x\in\mathbf{R}\end{cases} \tag{4}$$

收稿日期:2018－05－24　　网络出版日期:2018－09－07
基金项目:国家自然科学基金项目(11401532);浙江省自然科学基金项目(LY010027)
作者简介:冉丽霞(1993－),女,甘肃陇南人,硕士研究生,主要从事随机偏微分方程方面的研究。
通信作者:陈涌,E-mail:youngchen329@126.com

其中：$m=(1-\partial_x^2)^r u$，$r\geqslant 1$；$a\in\mathbf{R}$；α 为常数；$k\in\mathbf{R}$。当 $\rho=0$ 时，方程(4)为修正的 Camassa-Holm 方程。关于二元修正的 Camassa-Holm 方程(4)，Chen 等[13]确立了其在 Besov 空间 $B_{p,q}^{s}\times B_{p,q}^{s-2r+1}$ $\left(1\leqslant p,q\leqslant+\infty,s>\max\left\{2r+\frac{1}{p},2r+1-\frac{1}{p}\right\}\right)$上解的存在唯一性。当 $r=2$ 时，He 等[14]建立了方程(4)在 Besov 空间 $B_{p,r}^{s}\times B_{p,r}^{s-2}$ $\left(1\leqslant p,r\leqslant+\infty,s>\max\left\{3+\frac{1}{p},\frac{1}{2},4-\frac{1}{p}\right\}\right)$上解的存在唯一性。Zhang 等[15]建立了方程(4)在 Besov 空间 $B_{p,r}^{q_m}\times B_{p,r}^{q_m+1}$ $\left(q_m>\max\left\{3+\frac{1}{p},\frac{1}{2},4-\frac{1}{p}\right\},1\leqslant r\leqslant+\infty\right.$，或者 $\left.q_m=\frac{1}{p},1\leqslant p\leqslant 2,r=1\right)$上解的存在唯一性。

以上研究表明，无论是修正的 Camassa-Holm 方程，还是二元修正的 Camassa-Holm 方程组，当 $r=2$ 时其解的存在空间 $H^s(\mathbf{R})$ 都要求 $s>7/2$。本文通过对修正的 Camassa-Holm 方程添加耗散项，利用半群性质、非线性估计、缩映射原理及能量估计，改进了已有的解的适定性，建立了其在低正则性空间中解的存在唯一性。

1 主要定理

本文考虑修正的 Camassa-Holm 方程在低正则性空间中解的存在唯一性，给定初值 $u_0\in L^2(\mathbf{R})$，建立如式(5)描述的耗散修正的 Camassa-Holm 的适定性问题：

$$\begin{cases}m_t+\varepsilon\partial_x^4 m+au_x m+bum_x=0, & t>0,x\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\mathbf{R}\end{cases}\tag{5}$$

当 $k=2$ 时，$m=\Lambda^4 u=(1-\partial_x^2)^2 u$，方程(4)化为

$$\begin{cases}\partial_t u+\varepsilon\partial_x^4 u=f(u),t>0, & x\in\mathbf{R}\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\mathbf{R}\end{cases}\tag{6}$$

其中：

$$f(u)=-bu\partial_x u-\partial_x(1-\partial_x^2)^{-2}\left[\frac{a}{2}u^2+\frac{6b-2a}{2}(\partial_x u)^2+(a-5b)(\partial_x u)(\partial_x^3 u)-\frac{a+5b}{2}(\partial_x^2 u)^2\right].$$

本文提出的主要定理如下：

定理 1 对于 $u_0\in L^2(\mathbf{R})$，存在 $T>0$，方程(6)存在唯一的解 u 满足

$$u\in C([0,T];L^2(\mathbf{R}))\cap L^2((0,T);H^2(\mathbf{R})).$$

定理 2 对于 $u_0\in H^2(\mathbf{R})$，有任意的 $T>0$，当 $a=2,b=1$ 时方程(6)存在解 u 满足

$$u\in C([0,T];L^2(\mathbf{R}))\cap L^2((0,T);H^2(\mathbf{R})).$$

最后，本文给出 $L^p(\mathbf{R}^n)$空间和 $H^s(\mathbf{R}^n)$空间的定义及其范数形式：设 p 为非负实数，则定义 Sobolev 空间 $L^p(\mathbf{R}^n)$为：

$$L^p(\mathbf{R}^n)=\left\{f(x)\mid f(x)\text{ 在 }\mathbf{R}^n\text{ 上可测且 }\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^p\mathrm{d}x<\infty\right\},$$

$L^p(\mathbf{R}^n)$空间 $f(x)$ 的范数为：

$$\|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}=\left(\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

设 s 为非负实数，则定义 Sobolev 空间 $H^s(\mathbf{R}^n)$为：

$$H^s(\mathbf{R}^n)=\left\{f\in L^2(\mathbf{R}^n)\mid(1+|\xi|^2)^{S/2}\hat{f}(\xi)\in L^2(\mathbf{R}^n)\right\},$$

$H^s(\mathbf{R}^n)$空间 $f(x)$ 的范数为：

$$\|f\|_{H^s(\mathbf{R}^n)}=\|(1+|\xi|^2)^{S/2}\hat{f}(\xi)\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}.$$

2 非线性估计

考虑方程(6)所给出的初值问题，其中它的积分形式为：

$$u(x,t)=S(t)u_0+\int_0^t S(t-s)f(u)\mathrm{d}s\tag{7}$$

这里 $S(t)=\mathrm{e}^{-\varepsilon t\partial_x^4}$。为了证明定理1与定理2，需要给出如下引理。

引理 1 $\|f(u)\|_{L_x^2}\leqslant C(\|u\|_{L_x^2}^2+\|u\|_{H_x^2}^2)$ (8)

证明 由 $f(u)$ 的表达式，再结合 Sobolev 嵌入定理[16]有

$$\|f(u)\|_{L_x^2}=\left\|-bu\partial_x u-\partial_x(1-\partial_x^2)^{-2}\left[\frac{a}{2}u^2+\frac{6b-2a}{2}(\partial_x u)^2+(a-5b)(\partial_x u)(\partial_x^3 u)-\frac{a+5b}{2}(\partial_x^2 u)^2\right]\right\|_{L_x^2}\leqslant$$

$$C(\|uu_x\|_{L_x^2}+\|u^2\|_{L_x^2}+\|u_x^2\|_{L_x^2}+\|\partial_x(1-\partial_x^2)^{-2}(u_x u_{xxx})\|_{L_x^2}+\|u_{xx}^2\|_{L_x^2})\leqslant$$

$$C(\|u_x\|_{L_x^\infty}\|u\|_{L_x^2}+\|u\|_{L_x^\infty}\|u\|_{L_x^2}+\|u_x\|_{L_x^\infty}\|u_x\|_{L_x^2}+\|\partial_x(1-\partial_x^2)^{-2}(u_x u_{xxx})\|_{L_x^2}+\|u_{xx}^2\|_{L_x^2})\leqslant$$

$$C(\|u_x\|_{H^1}\|u\|_{L_x^2}+\|u\|_{H^1}\|u\|_{L_x^2}+\|u_x\|_{H^1}\|u_x\|_{L_x^2}+\|\partial_x(1-\partial_x^2)^{-2}(u_x u_{xxx})\|_{L_x^2}+\|u_{xx}^2\|_{L_x^2}),$$

其中，右边第四项的估计为：

$$\|\partial_x(1-\partial_x^2)^{-2}(\partial_x u)(\partial_x^3 u)\|_{L_x^2}=$$

$$\|F[\partial_x(1-\partial_x^2)^{-2}(\partial_x u)(\partial_x^3 u)]\|_{L_\xi^2}=$$

$$\xi\cdot(1+\xi^2)^{-2}F[\partial_x u]*F[\partial_x^3 u]=$$
$$\int_{\mathbf{R}}\left(\int_{\mathbf{R}}(\xi\cdot(1+\xi^2)^{-2}(\xi-\eta)F[u](\xi-\eta)\cdot\eta^3 F[u](\eta)\mathrm{d}\eta\right)^2\mathrm{d}\xi\leqslant$$
$$\int_{\mathbf{R}}\left(\int_{\mathbf{R}}(\xi\cdot(1+\xi^2)^{-2}(\xi-\eta)F[u](\xi-\eta)\,|\eta-\xi|\cdot\eta^2 F[u](\eta)\mathrm{d}\eta\right)^2\mathrm{d}\xi+$$
$$\int_{\mathbf{R}}\left(\int_{\mathbf{R}}(\xi\cdot(1+\xi^2)^{-2}(\xi-\eta)F[u](\xi-\eta)\xi\cdot\eta^2 F[u](\eta)\mathrm{d}\eta\right)^2\mathrm{d}\xi\leqslant$$
$$\|(\partial_x^2 u)^2\|_{L_x^2}+\|(\partial_x u)(\partial_x^3 u)\|_{L_x^2}\leqslant\|u\|_{H_x^2}^2,$$

其中,$F[\cdot]$ 表示对 $\cdot$ 做傅里叶变换。再由 Hölder 不等式有

$$\|f(u)\|_{L_x^2}\leqslant C(\|u\|_{L_x^2}^2+\|u\|_{H_x^2}^2).$$

引理 2　$$\left\|\int_0^t S(t-s)f(u)\mathrm{d}s\right\|_{L_t^\infty L_x^2}\leqslant C(\|u\|_{L_x^2}^2+\|u\|_{H_x^2}^2)\qquad(9)$$

证明　结合引理 1 即可证明引理 2 成立。

引理 3　考虑线性方程

$$\begin{cases}\partial_t\omega=-\varepsilon\partial_x^4\omega\\ \omega(x,0)=\omega_0\end{cases}\qquad(10)$$

对任意的 $\omega_0\in L_x^2(\mathbf{R})$,方程(10) 的解 ω 满足

$$\|\omega\|_{L_t^2L_x^2}^2\leqslant\frac{1}{2\varepsilon}\|\omega_0\|_{L_x^2}^2\qquad(11)$$

证明　在方程(10) 两边同乘 ω 并在 $\mathbf{R}$ 上对 x 积分可得:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{R}}\omega^2\mathrm{d}x=-2\varepsilon\int_{\mathbf{R}}\omega(\partial_x^4\omega)\mathrm{d}x=-2\varepsilon\int_{\mathbf{R}}(\partial_x^2\omega)^2\mathrm{d}x,$$

两边同时对 t 从 0 到 T 积分可得:

$$\int_{\mathbf{R}}(\omega(x,T))^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}}(\omega(x,0))^2\mathrm{d}x=-2\varepsilon\int_0^T\int_{\mathbf{R}}(\partial_x^2\omega)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

则可得到上式的估计为:

$$\int_0^T\int_{\mathbf{R}}(\partial_x^2\omega)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\mathbf{R}}\omega_0^2\mathrm{d}x.$$

即证明了引理 3。

引理 4　对任意 $u_0\in L_x^2(\mathbf{R}),\varepsilon>0,\delta>0$ 的,存在 $T=T(u_0,\varepsilon)>0$ 使得

$$\|s(t)u_0\|_{L_T^2H_x^2}\leqslant\left(\int_0^T\int_{\mathbf{R}}|\partial_x s(t)u_0|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{1/2}\leqslant\delta\qquad(12)$$

证明　令 $\{u_0^n\}\subset H_x^2(\mathbf{R})$,且 u_0^n 在 L^2 空间收敛到 u_0,即 $n\to\infty,\|u_0^n-u_0\|_{L_x^2}\to 0$。

由引理 3 得:

$$\begin{aligned}\|s(t)u_0\|_{L_t^2H_x^2}&\leqslant\|s(t)(u_0^n-u_0)\|_{L_t^2H_x^2}+\|s(t)u_0^n\|_{L_t^2H_x^2}=\\&\left(\int_0^T\int_{\mathbf{R}}|\partial_x^2 s(t)(u_0^n-u_0)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{1/2}+\left(\int_0^T\int_{\mathbf{R}}|\partial_x^2 s(t)u_0^n|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{1/2}\leqslant\\&\frac{1}{(2\varepsilon)^{1/2}}\|u_0^n-u_0\|_{L_x^2}+\left(\int_0^T\int_{\mathbf{R}}|\partial_x^2 s(t)u_0^n|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{1/2}\leqslant\\&\frac{1}{(2\varepsilon)^{1/2}}\|u_0^n-u_0\|_{L_x^2}+T^{1/2}\|u_0^n\|_{H_x^2}\end{aligned}\qquad(13)$$

对 $\forall\delta>0,N\in\mathbf{N}$,则对任意的 $n>N$ 有

$$\frac{1}{(2\varepsilon)^{1/2}}\|u_0^n-u_0\|_{L_x^2}\leqslant\frac{\delta}{2},$$

再取 $T>0$,对使得 $n\geqslant N$ 有

$$T^{1/2}\|u_0^n\|_{H_x^2}\leqslant\frac{\delta}{2},$$

综上所述,对 $\forall\delta>0,\exists T>0$,使得

$$\|s(t)u_0\|_{L_t^2H_x^2}\leqslant\delta.$$

方程(7) 的非线性部分的估计为:

令 $v=u-s(t)u_0$,则 v 可以看作是如下初值问题的解,

$$\begin{cases}\partial_t v+\varepsilon\partial_x^4 v=f(u)\\ v(x,0)=0\end{cases}\qquad(14)$$

方程(14) 的积分形式表示为:

$$v(x,t)=\int_0^t s(t-t')f(u)(x,t')\mathrm{d}t'\qquad(15)$$

引理 5　$$\|v\|_{L_t^\infty L_x^2}\leqslant C\left(\|u\|_{L_t^2L_x^2}^2+\|u\|_{L_t^2H_x^2}^2\right)\qquad(16)$$

$$\|\partial_x^2 v\|_{L_t^\infty L_x^2}\leqslant C\varepsilon^{-1/2}(\|u\|_{L_t^2L_x^2}^2+\|u\|_{L_t^2H_x^2}^2)\qquad(17)$$

证明　先证式(16) 成立,

$$\|v\|_{L_t^\infty L_x^2}=\left\|\int_0^t s(t-t')f(u)(x,t')\mathrm{d}t'\right\|_{L_t^\infty L_x^2}\leqslant\int_0^T\|f\|_{L_x^2}\mathrm{d}t=\|f\|_{L_t^1L_x^2}.$$

由引理 2 可知式(16) 成立。

式(17) 的证明为:

方程(14) 两边同乘 v 并在 $\mathbf{R}$ 上对 x 积分可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbf{R}}\frac{v^2}{2}\mathrm{d}x=-\varepsilon\int_{\mathbf{R}}(\partial_x^2 v)^2\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}}vf\mathrm{d}x,$$

两边同时对 t 从 0 到 T 积分可得

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}}v^2(T)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}}v^2(0)\mathrm{d}x+\varepsilon\int_0^T\int_{\mathbf{R}}(\partial_x^2 v)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=$$

$$\int_0^T\int_{\mathbf{R}} vf\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

则对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\varepsilon\int_0^T\int_{\mathbf{R}}(\partial_x^2 v)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant\int_0^T\int_{\mathbf{R}} vf\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant$$
$$\int_0^T\|v\|_{L_x^2}\|f\|_{L_x^2}\,\mathrm{d}s\leqslant\int_0^T(\|f\|_{L_x^2})^2\,\mathrm{d}s,$$

则有

$$\|\partial_x^2 v\|_{L_t^\infty L_x^2}\leqslant C\varepsilon^{-1/2}(\|u\|_{L_t^2L_x^2}^2+\|u\|_{L_t^2H_x^2}^2).$$

$\partial_x^2 u$ 的估计为：

引理 6 $\|\partial_x^2 u\|_{L_t^2L_x^2}\leqslant\delta+C\varepsilon^{-1/2}(\|u\|_{L_t^2L_x^2}^2+\|u\|_{L_t^2L_x^2}^2)$ (18)

证明 通过引理 2－5，有

$$\|\partial_x^2 u\|_{L_t^2L_x^2}\leqslant\|\partial_x s(t)u_0\|_{L_t^2L_x^2}+\left\|\mathrm{e}^{-\varepsilon t\partial_x^4}\int_0^t s(t-t')f(x,t')\mathrm{d}t'\right\|_{L_t^2L_x^2}\leqslant$$
$$\delta+\frac{1}{\varepsilon^{1/2}}\|f\|_{L_t^2L_x^2}\leqslant$$
$$\delta+\frac{C}{\varepsilon^{1/2}}\left(\|u\|_{L_t^2L_x^2}^2+\|u\|_{L_t^2H_x^2}^2\right).$$

3 适定性

利用压缩映射原理证明解的存在唯一性，如此令

$$X_a^T=\left\{u\in C([0,T]:L_x^2(\mathbf{R}))\cap L^2((0,T):H_x^2(\mathbf{R})):\||u|\|=\|u\|_{L_t^\infty L_x^2}+\|u\|_{L_t^\infty H_x^2}\leqslant a\right\}\tag{19}$$

定义映射 $\Phi:X_a^T\to X_a^T$，

$$\Phi(u)=s(t)u_0+\int_0^t s(t-t')f(u)\mathrm{d}t'\tag{20}$$

证明 $\Phi:X_a^T\to X_a^T$ 为压缩映射，从而得到解的局部适定性。

定理 1 的证明 令 $u\in X_a^T$，则通过式(19) 有

$$\||\Phi u|\|=\|\Phi u\|_{L_t^\infty L_x^2}+\|\Phi u\|_{L_t^2H_x^2}\tag{21}$$

通过引理 2 及引理 6，得

$$\|\Phi u\|_{L_t^\infty L_x^2}=\left\|\int_0^t s(t-t')f(u)(x,t')\mathrm{d}t'\right\|_{L_t^\infty L_x^2}\leqslant$$
$$C\left(\|u\|_{L_t^\infty L_x^2}^2+\|u\|_{L_t^\infty H_x^2}^2+\|u_0\|_{L_t^\infty L_x^2}^2\right)\leqslant$$
$$C\left(a+\|u_0\|_{L_t^\infty L_x^2}^2\right)\tag{22}$$

$$\|\Phi u\|_{L_t^2H_x^2}=\left\|\partial_x^2 s(t-t')u_0+\partial_x^2\int_0^t s(t-t')f(u,\partial_x u)(x,t')\mathrm{d}t'\right\|_{L_t^2L_x^2}\leqslant$$
$$\|\partial_x^2 s(t-t')u_0\|_{L_t^2L_X^2}+\left\|\partial_x^2\int_0^t s(t-t')f(u,\partial_x u)(x,t')\mathrm{d}t'\right\|_{L_t^2H_x^2}\leqslant$$
$$\delta+\frac{C}{\varepsilon^{1/2}}(\|u\|_{L_t^2L_x^2}^2+\|u\|_{L_t^2H_x^2}^2)\leqslant$$
$$\delta+\frac{C}{\varepsilon^{1/2}}\||u|\|\tag{23}$$

联立式(22)—(23)，得到

$$\||\Phi u|\|=\|\Phi u\|_{L_t^\infty L_x^2}+\|\Phi u\|_{L_t^2H_x^2}\leqslant$$
$$\|\partial_x^2 s(t-t')u_0\|_{L_t^\infty L_x^2}+\left\|\partial_x^2\int_0^t s(t-t')f(u,\partial_x u)(x,t')\mathrm{d}t'\right\|_{L_t^2H_x^2}\leqslant$$
$$\delta+C(a+\|u_0\|_{L_x^2}^2+\frac{1}{\varepsilon^{1/2}}|u|)\leqslant$$
$$\delta+C\left(a+\|u_0\|_{L_x^2}^2+\frac{a}{\varepsilon^{1/2}}\right),$$

选取适当的 δ,a,T 有

$$\||\Phi u|\|\leqslant a.$$

类似可以得到：

$$\||\Phi(u)-\Phi(v)|\|\leqslant C'\||u-v|\|\tag{24}$$

则 $\Phi:X_a^T\to X_a^T$ 为压缩映射，这里 $C'=C'(T,a,\varepsilon)$，选取适当的 a,T，使得 $0<C'<1$。由压缩映射原理得方程(6) 存在唯一的解

$$u\in C([0,T]:L_x^2(\mathbf{R}))\cap L^2((0,T):H_x^2(\mathbf{R})).$$

综上即证明定理 1 成立。

证明定理 2，首先有能量估计为：

引理 7 对于 $u_0\in H^2$，当方程(6) 中 $a=2,b=1$ 时，有

$$\|u\|_{H^2}^2\leqslant\|u_0\|^2\tag{25}$$

证明 当 $a=2,b=1$ 时，方程(6) 为：

$$\partial_t u+\varepsilon\partial_x^4 u=-u\partial_x u-\partial_x(1-\partial_x^2)^{-2}\left[u^2+(\partial_x u)^2+3(\partial_x u)(\partial_x^3 u)-\frac{7}{2}(\partial_x^2 u)^2\right]\tag{26}$$

给方程(26) 两边同乘算子 $(1-\partial_x^2)^2$ 可得

$$(1-\partial_x^2)^2\,\partial_t u+\varepsilon(I-\partial_x^2)^2\partial_x^4 u=-(1-\partial_x^2)^2u\partial_x u-\partial_x\left[u^2+(\partial_x u)^2+3(\partial_x u)(\partial_x^3 u)-\frac{7}{2}(\partial_x^2 u)^2\right]\tag{27}$$

两边同乘 u 并在 $\mathbf{R}$ 上对 x 积分可得

$$\int_{\mathbf{R}}u(1-\partial_x^2)^2\partial_t u\,\mathrm{d}x+\varepsilon\int_{\mathbf{R}}u(1-\partial_x^2)^2\partial_x^4 u\,\mathrm{d}x=$$
$$\int_{\mathbf{R}}\left\{-(1-\partial_x^2)^2u^2\partial_x u-u\partial_x\left[u^2+(\partial_x u)^2+3(\partial_x u)(\partial_x^3 u)-\frac{7}{2}(\partial_x^2 u)^2\right]\right\}\mathrm{d}x,$$

由 H^2 守恒率有

$$\int_{\mathbf{R}}\left\{-(1-\partial_x^2)^2u^2\partial_x u-u\partial_x\left[u^2+(\partial_x u)^2+3(\partial_x u)(\partial_x^3 u)-\frac{7}{2}(\partial_x^2 u)^2\right]\right\}\mathrm{d}x=0,$$

则有

$$\int u(1-\partial_x^2)^2\partial_t u\,\mathrm{d}x+\varepsilon\int u(1-\partial_x^2)^2\partial_x^4 u\,\mathrm{d}x=0,$$

因为

$$\int u(1-\partial_x^2)^2\partial_t u\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int u^2+\partial_x u+(\partial_x^2 u)^2\mathrm{d}x\right),$$

$$\varepsilon\int u(1-\partial_x^2)^2\partial_x^4 u\,\mathrm{d}x=-\varepsilon\int u\partial_x^4 u-2u\partial_x^6 u+u\partial_x^8 u\,\mathrm{d}x\leqslant 0,$$

所以

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int u^2+\partial_x u+(\partial_x^2 u)^2\mathrm{d}x\right)=-\varepsilon\int u\partial_x^4 u-2u\partial_x^6 u+u\partial_x^8 u\,\mathrm{d}x\leqslant 0.$$

从而证明了引理 7 成立。

结合定理 1 及引理 7 的证明,就可以得到方程(26)存在全局解,则证明了定理 2。

4　结　论

本文通过加入耗散项 $\varepsilon\partial_x^4 u$,控制住了方程中高阶项的影响,从而验证了修正的 Camassa-Holm 方程在低正则空间上解的适定性,提高了其解的存在空间,证明了在不同的初值条件下,其在 H^2 空间上解的的存在唯一性。在之后的研究中,可以考虑在不加入耗散项的情况下,能否得到类似的结果。

参考文献:

[1] Constantin A, Kolev B. Geodesic flow on the diffeomorphism group of the circle [J]. Commentarii Mathematici Helvetici,2003,78(4):787-804.

[2] Constantin A, Kolev B. Integrability of invariant metrics on the diffeomorphism group of the circle[J]. Journal of Nonlinear Science,2006,16(2):109-122.

[3] Fokas A, Strauss W. Stability of peakons[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2000, 53 (5): 603-610.

[4] Camassa R, Holm D. An integrable shallow water equations with peaked solutions [J]. Physical Review Letters,1993,71(11):1661-1664.

[5] Constantin A. On the Cauchy problem for the periodic Camassa-Holm equation[J]. Journal of Differential Equations,1997,141(2):218-235.

[6] Constantin A, Escher J. Global weak solutions for a shallow water equation [J]. Indiana University Mathematics Journal,1998,47(4):1527-1545.

[7] Misiolek G. Classical solutions of the periodic Camassa-Holm equation[J]. Geometric and Functional Analysis Gafa,2002,12(5):1080-1104.

[8] Li Y, Olver P J. Well-posedness and blow-up solutions for an integrable nonlinearly dispersive model wave equation[J]. Journal of Differential Equations,2000,162(1):27-63.

[9] Mclachlan R, Zhang X. Well-posedness of modified Camassa-Holm equation[J]. Journal of Differential Equations,2009,246(8):3241-3259.

[10] Mu C L, Zhou S,Zeng R. Well-posedness and blow-up phenomena for a higher-order shallow water equation [J]. Journal of Differential Equations,2011,251(12):3488-3499.

[11] Fu Y G, Liu Z R, Tang H. Non-uniform dependence on initial data for the modified Camassa-Holm equation on the line[J]. Acta Mathematica Scientia, 2014, 34B (6):1781-1794.

[12] Escher J, Henry D, Kolev B. Two-component equations modelling water waves with constant vorticity[J]. Annali di Matematica Pura ed Applicata,2016,195(1):249-271.

[13] Chen R, Zhou S M. Well-posedness and persistence properties for two-component higher-order Camassa-Holm system with fractional inertia operator [J]. Nonlinear Analysis,2017,33:121-138.

[14] He H J, Yin Z Y. On the cauchy problem for a ceneralized two-component shallow water wave system with fractional higher-order inertia operators [J]. Discrete and Continuous Dynamical System, 2017, 37 (3):1509-1537.

[15] Zhang L, Li X T. The local well-posedness, blow-up criteria and gevrey regularity of solutions for a two-component higher-order Camassa-Holm system [J]. Nonlinear Analysis,2017,35:414-440.

[16] 王术. Sobolev 空间与偏微分方程引论[M]. 北京:科学出版社,2009:102-106.

Existence and uniqueness of solution to the dissipation modified Camassa-Holm equation

RAN Lixia, CHEN Yong
(School of Sciences, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: By adding a dissipative term to the modified Camassa-Holm equation, the existence space of its solution is improved, and the existence and uniqueness of the solution in the low regularity space are proven. Firstly, by Sobolev embedding theorem, Hölder inequality and Fourier transform are used to estimate the nonlinear term. Secondly, the local existence and uniqueness of the solution are proven by the contraction mapping principle. Finally, the existence of the global solution is proven by estimating the energy of the solution. The results show that there is a unique local solution to the modified Camassa-Holm equation in space $C([0,T];L^2(\mathbf{R}))\cap L^2((0,T);H^2(\mathbf{R}))$ for the initial value $u_0\in L^2(\mathbf{R})$, and further, for the initial value $u_0\in H^2(\mathbf{R})$, there is a global solution in space $C([0,T];L^2(\mathbf{R}))\cap L^2((0,T);H^2(\mathbf{R}))$.

Key words: modified Camassa-Holm equation; existence; uniqueness; contraction mapping

(责任编辑：康　锋)