浙江理工大学学报(自然科学版),第 39 卷,第 3 期,2018 年 5 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University (Natural Sciences)
Vol. 39, No. 3, May 2018

DOI:10.3969/j.issn.1673-3851(n).2018.03.017

反初等矩阵的一些性质及应用

郭传好,刘贝贝
(浙江理工大学经济管理学院,杭州 310018)

摘　要:在初等矩阵性质综合研究的基础上,定义了一类反初等矩阵,并研究了其相关性质及应用。首先基于 Flip-矩阵的定义,给出了一类新的矩阵-反初等矩阵的定义及其表述形式;然后研究并给出其相关基本性质以及与初等矩阵的关系;最后给出反初等矩阵在计算方面的一些应用。相关研究成果对进一步研究次对称矩阵的相关理论具有潜在的重要意义。

关键词:Flip-矩阵;反初等矩阵;三对角形矩阵;Vandermonde 矩阵

中图分类号:O151.21　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1673-3851 (2018) 05-0362-05

0 引　言

矩阵这一概念最初由 19 世纪的英国数学家 Cayley 提出[1]。经过几个世纪的发展,其现在不仅是高等代数学中的常见工具,相关理论结果也被广泛应用于应用数学、物理学、计算机科学等众多学科中。矩阵是将重要的信息数据存储在一个数据表中,把复杂和抽象的问题进行简化,通过代数的方法对其进行研究,从而得到一些重要的结论,实际的很多应用中都渗透着相关矩阵理论。麻曰亮等[2]利用阈值函数收缩 Gram 矩阵非对角线上较大值,设计了一个新优化算法,通过平均化 Gram 矩阵特征值来降低测量矩阵的整体相关系数,该算法在保证整体相关系数最低的同时,又使最大值相关系数显著降低。程昀等[3]针对传统 DEA 模型无法有效评价矩阵型网络系统效率的问题,构建了矩阵型网络决策单元的生产可能集,建立了矩阵型网络 DEA 模型,实验结果表明矩阵型网络 DEA 模型能精确地计算出各个子过程的效率,并辨识出具体需要改进的子过程。Cheng[4]为了处理多维数据和使用线性方法来解决非线性的问题,定义了一个新的矩阵乘积-半张量积,并给出了该乘积的性质描述和应用。

次对角线矩阵是矩阵中的重要一类分支,其相关理论[5-6]也非常重要,如表示具有反对称性质的图像数据等。袁晖坪等[7]研究了反对称矩阵的性质,给出了反对称矩阵相关秩分解和广义逆计算的快速方法。李珍珠[8]研究了线性流形上的广义次对称矩阵的逆特征值问题,同时给出了左右逆特征值的最佳近似解的求解方法。胡丽莹等[9]基于共轭梯度法的思想,研究了一类矩阵方差的最小二乘反对称次对称解,并给出了求解最佳近似解的方法。陈特清等[10]给出了实次对称矩阵和次对称变换的若干性质,并把二者统一起来。

初等矩阵是矩阵理论中一个重要且最基本的概念,它在求矩阵的秩、逆矩阵的计算以及线性方程组的求解等方面都起着重要的作用,众多高等代数学相关教材[1,11]都对初等矩阵的性质做了相关的介绍。本文首先对初等矩阵的相关性质做一简单综述;然后,鉴于对称矩阵与反对称矩阵间的某种潜在联系,在 Flip-矩阵[12-14]的基础上,定义一种新的矩阵,即反初等矩阵;其次,给出了反初等矩阵的相关性质以及与初等矩阵的关系;最后,给出了反初等矩阵在矩阵行列式计算方面的一些初等应用。该研究可进一步丰富矩阵理论的相关内容,为次对称矩阵

收稿日期:2017－09－05　　网络出版日期:2017－12－29
基金项目:国家自然科学基金项目(11501350);浙江理工大学科研启动基金项目(16092098-Y)
作者简介:郭传好(1980－),男,安徽滁州人,讲师,博士,主要从事最优化理论与算法方面的研究。

性质及其相关理论研究提供参考。

1　初等矩阵定义及性质

假定全文所出现的矩阵都是 $n\times n$ 阶方阵，$\boldsymbol{E}$ 表示单位矩阵。对于任给的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}^*$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$R(\boldsymbol{A})$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的秩，$\boldsymbol{A}\backsim\boldsymbol{B}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$。下面给出初等矩阵的定义及其性质。

定义 1[11]　由单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 经过一次初等变换而得到的矩阵称为初等矩阵。初等矩阵有下面三种基本形式：

a) $\boldsymbol{E}(i,j)$，即将 $\boldsymbol{E}$ 中的第 i,j 两行(列)交换所得到的矩阵；

b) $\boldsymbol{E}(i(k))$，即将 $\boldsymbol{E}$ 中的第 i 行(列)乘以非零常数 k 所得到的矩阵；

c) $\boldsymbol{E}(i,j(k))$，即将 $\boldsymbol{E}$ 中的第 i 行加上第 j 行的 k 倍(第 j 列加上第 i 列的 k 倍)所得到的矩阵。

根据初等矩阵的定义，易得初等矩阵的一些基本性质：

性质 1　a) $\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(i,j)=\boldsymbol{E}(i,j)$，$\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(i(k))=\boldsymbol{E}(i(k))$，$\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(i,j(k))=\boldsymbol{E}(j,i(k))$；

b) $\|\boldsymbol{E}(i,j)\|=-1$，$\|\boldsymbol{E}(i(k))\|=|k|$，$\|\boldsymbol{E}(i,j(k))\|=1$.

由性质 1 可知：i) 初等矩阵的转置也是初等矩阵，且都是同一类型的初等矩阵；ii) 初等矩阵都是可逆的。

根据逆矩阵的定义和性质 1，可得初等矩阵的逆矩阵，分别为：

$$\boldsymbol{E}^{-1}(i,j)=\boldsymbol{E}(i,j),\quad \boldsymbol{E}^{-1}(i(k))=\boldsymbol{E}\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right),$$
$$\boldsymbol{E}^{-1}(i,j(k))=\boldsymbol{E}(i,j(-k)) \tag{1}$$

性质 2　a) $\boldsymbol{E}^n(i,j)=\boldsymbol{E}$，$n$ 为偶数；$\boldsymbol{E}^n(i,j)=\boldsymbol{E}(i,j)$，$n$ 为奇数；b) $\boldsymbol{E}^n(i(k))=\boldsymbol{E}(i(k^n))$；c) $\boldsymbol{E}^n(i,j(k))=\boldsymbol{E}(i,j(nk))$.

性质 2 的结论由定义 1 立得，其中 $\boldsymbol{E}^n(i(k))$，$\boldsymbol{E}^n(i,j(k))$ 均是初等矩阵，与初等变换次数 n 无关。

性质 3　$\boldsymbol{E}^*(i,j(k))$ 是初等矩阵，$\boldsymbol{E}^*(i,j)$ 和 $\boldsymbol{E}^*(i(k))$ 不是初等矩阵。

证明：根据伴随矩阵的公式 $\boldsymbol{A}^*=\|\boldsymbol{A}\|\boldsymbol{A}^{-1}$，由性质 1b) 和式(1)可得：

$$\boldsymbol{E}^*(i,j)=-\boldsymbol{E}(i,j),\boldsymbol{E}^*(i(k))=|k|\boldsymbol{E}\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right),$$
$$\boldsymbol{E}^*(i,j(k))=\boldsymbol{E}(i,j(-k)).$$

结合定义 1，性质 3 表明 $\boldsymbol{E}^*(i,j(k))$ 是初等矩阵，$\boldsymbol{E}^*(i,j)$ 和 $\boldsymbol{E}^*(i(k))$ 不是初等矩阵，但分别与其对应的逆矩阵仅相差一个常数倍 -1 和 $|k|$。

2　反初等矩阵定义及性质

为了引入反初等矩阵的定义，首先定义反单位矩阵为下面的 Flip-矩阵

$$\boldsymbol{Q}_n:=\begin{bmatrix} & & 1\\ & \iddots & \\ 1 & & \end{bmatrix} \tag{2}$$

为了简化下文中表达式的记号，$\boldsymbol{Q}_n$ 简记为 $\boldsymbol{Q}$。下面性质 4 给出了矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的一些基本性质。

性质 4　a) $\boldsymbol{Q}^2=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}$，$\|\boldsymbol{Q}\|=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$；b) $\boldsymbol{Q}^n=\boldsymbol{E}$，$n$ 为偶数；$\boldsymbol{Q}^n=\boldsymbol{Q}$，$n$ 为奇数；c) $\boldsymbol{Q}$ 是对合矩阵，$\boldsymbol{Q}$ 的特征根是 1 或 -1，且

$$\boldsymbol{Q}\sim\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & 0\\ 0 & -\boldsymbol{E}_{n-r}\end{bmatrix},R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{Q})+R(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{Q})=n,$$

$\boldsymbol{F}^n=\boldsymbol{W}_1\oplus\boldsymbol{W}_2$，

其中：$\boldsymbol{W}_1=\{(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{Q})x : x\in\boldsymbol{F}^n\}$，$\boldsymbol{W}_2=\{(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{Q})x : x\in\boldsymbol{F}^n\}$.

引理 1　性质 4 中的三条性质相互等价，即 a)$\Leftrightarrow$b)$\Leftrightarrow$c)。

证明：本文仅证明 a)$\Rightarrow$c)，其余等价性显然成立。由性质 4a) 可得，$\boldsymbol{Q}^2=\boldsymbol{E}$，则 x^2-1 是 $\boldsymbol{Q}$ 的零化多项式且无重根，从而 $\boldsymbol{Q}$ 相似于对角阵。设 λ 是 $\boldsymbol{Q}$ 的任意一个特征根，则 $\lambda^2=1$，即 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-1$，从而存在可逆的矩阵 $\boldsymbol{T}$，使得

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & 0\\ 0 & -\boldsymbol{E}_{n-r}\end{bmatrix} \tag{3}$$

由式(3)可得

$$\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{Q})\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\boldsymbol{E}_{n-r}\end{bmatrix};$$
$$\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{Q})\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}2\boldsymbol{E}_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

所以

$$R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{Q})+R(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{Q})=n \tag{4}$$

由 $\boldsymbol{W}_1$ 和 $\boldsymbol{W}_2$ 的定义立得 $\boldsymbol{F}^n=\boldsymbol{W}_1+\boldsymbol{W}_2$，再利用式(4)得

$$\boldsymbol{F}^n=\boldsymbol{W}_1\oplus\boldsymbol{W}_2.$$

下面的性质给出了矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 左乘或右乘一个矩阵时，被乘矩阵的变化情况，矩阵的变化结果可通过 $\boldsymbol{Q}$ 的表达式(2)得到。

性质 5　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，则：

a) 若 $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，则 $b_{ij}=a_{n-i+1,j}$；b) 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$，则 $b_{ij}=a_{i,n-j+1}$.

性质5的结论表明：$\boldsymbol{Q}$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 时，相当于将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 垂直翻转180°；而当右乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 时，相当于将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 水平翻转180°。

基于矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的表达式(2)，类似于初等矩阵的定义，下面给出反初等矩阵的定义。

定义2　由 $\boldsymbol{Q}$ 经过一次初等变换而得到的矩阵称为反初等矩阵，其具有下面三种形式：

a) 将 $\boldsymbol{Q}$ 中的第 i,j 两行(第 $n-i+1,n-j+1$ 两列)互换得到的矩阵，记为

$$\boldsymbol{Q}(i,j):=\begin{bmatrix} & & & & & & 1 \\ & & & & & \iddots & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & \vdots & \iddots & \vdots & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & \iddots & & & & & \\ 1 & & & & & & \end{bmatrix}.$$

b) 将 $\boldsymbol{Q}$ 中的第 i 行(第 $n-i+1$ 列)乘以非零的常数 k 得到的矩阵，记为

$$\boldsymbol{Q}(i(k)):=\begin{bmatrix} & & & & 1 \\ & & & \iddots & \\ & & k & & \\ & \iddots & & & \\ 1 & & & & \end{bmatrix}.$$

c) 将 $\boldsymbol{Q}$ 中的第 i 行加上第 j 行的 k 倍(第 $n-j+1$ 列加上第 $n-i+1$ 列的 k 倍)而得到的矩阵，记为

$$\boldsymbol{Q}(i,j(k)):=\begin{bmatrix} & & & & & 1 \\ & & & & \iddots & \\ & & k & 1 & & \\ & & \iddots & & & \\ & & 1 & & & \\ & \iddots & & & & \\ 1 & & & & & \end{bmatrix}.$$

基于上述反初等矩阵的定义和性质4，类似于初等矩阵的性质，本文可得反初等矩阵的相关性质及其与初等矩阵的关系如下。

性质6　a) $\|\boldsymbol{Q}(i,j)\|=-\|\boldsymbol{Q}\|$，$\|\boldsymbol{Q}(i(k))\|=|k|\|\boldsymbol{Q}\|$，$\|\boldsymbol{Q}(i,j(k))\|=\|\boldsymbol{Q}\|$；

b) $\boldsymbol{Q}(i,j)=\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{QE}(n-i+1,n-j+1)$，$\boldsymbol{Q}(i(k))=\boldsymbol{E}(i(k))\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{QE}((n-i+1)(k))$，$\boldsymbol{Q}(i,j(k))=\boldsymbol{E}(i,j(k))\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{QE}(n-i+1,(n-j+1)(k))$；

c) $\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{Q}(i,j)=\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{E}(i(k))\boldsymbol{Q}(i(k))=\boldsymbol{Q}(i(k^2))$，$\boldsymbol{E}(i,j(k))\boldsymbol{Q}(i,j(k))=\boldsymbol{Q}(i,j(2k))$.

性质7　a) $\boldsymbol{Q}(i,j)\boldsymbol{A}$ 相当于先将 $\boldsymbol{A}$ 垂直翻转180°(记为 $\boldsymbol{A}'$)，再交换 $\boldsymbol{A}'$ 的第 i,j 两行；$\boldsymbol{AQ}(i,j)$ 相当于先将 $\boldsymbol{A}$ 水平翻转180°(记为 $\boldsymbol{A}''$)，再交换 $\boldsymbol{A}''$ 的第 $n-i+1,n-j+1$ 两列。

b) $\boldsymbol{Q}(i(k))\boldsymbol{A}$ 相当于先将 $\boldsymbol{A}$ 垂直翻转180°(记为 $\boldsymbol{A}'$)，再将 $\boldsymbol{A}'$ 的第 i 乘以非零常数 k；$\boldsymbol{AQ}(i(k))$ 相当于先将 $\boldsymbol{A}$ 水平翻转180°(记为 $\boldsymbol{A}''$)，再将 $\boldsymbol{A}''$ 的第 $n-i+1$ 乘以非零的常数 k。

c) $\boldsymbol{Q}(i,j(k))\boldsymbol{A}$ 相当于先将 $\boldsymbol{A}$ 垂直翻转180°(记为 $\boldsymbol{A}'$)，再把 $\boldsymbol{A}'$ 的第 i 行加上第 j 行的 k 倍；$\boldsymbol{AQ}(i,j(k))$ 相当于先将 $\boldsymbol{A}$ 水平翻转180°(记为 $\boldsymbol{A}''$)，再把 $\boldsymbol{A}''$ 的第 $n-i+1$ 列的 k 倍加到第 $n-j+1$ 列上。

上述性质的证明可结合性质5和反初等矩阵的相关定义，经过简单分析得到。为了进一步说明反初等矩阵的相关性质，下面的几个性质将分别从转置、逆矩阵和伴随矩阵等方面给出反初等矩阵的相关性质介绍。

性质8　反初等矩阵的转置是同一类型的反初等矩阵，且有

$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(i,j)=\boldsymbol{Q}(n-i+1,n-j+1)$，

$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(i(k))=\boldsymbol{Q}((n-i+1)(k))$，

$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(i,j(k))=\boldsymbol{Q}(n-j+1,(n-i+1)(k))$.

证明：由性质4a)、6b)，分别可得

$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(i,j)=(\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{Q})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{QE}(i,j)=\boldsymbol{Q}(n-i+1,n-j+1)$，

$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(i(k))=(\boldsymbol{E}(i(k))\boldsymbol{Q})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{QE}(i(k))=\boldsymbol{Q}((n-i+1)(k))$，

$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(i,j(k))=(\boldsymbol{E}(i,j(k))\boldsymbol{Q})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{QE}^{\mathrm{T}}(i,j(k))=\boldsymbol{QE}(j,i(k))=\boldsymbol{Q}(n-j+1,(n-i+1)(k))$.

再由反初等矩阵的定义2可知反初等矩阵的转置与原矩阵是同一类型的反初等矩阵。

性质9　反初等矩阵均可逆，且有

$\mathbf{Q}^{-1}(i,j)=\boldsymbol{Q}(n-i+1,n-j+1)$，

$\boldsymbol{Q}^{-1}(i(k))=Q((n-i+1)(1/k))$，

$\boldsymbol{Q}^{-1}(i,j(k))=\boldsymbol{Q}(n-i+1,(n-j+1)(-k))$.

证明：根据逆矩阵的定义，由性质6、8，依次可得

$\boldsymbol{Q}(i,j)\boldsymbol{Q}(n-i+1,n-j+1)=\boldsymbol{QE}(n-i+1,n-j+1)\boldsymbol{Q}(n-i+1,n-j+1)=\boldsymbol{Q}^2=\boldsymbol{E}$，

$\boldsymbol{Q}(i(k))\boldsymbol{Q}((n-i+1)(1/k))=\boldsymbol{Q}(i(k))\boldsymbol{E}((n-i+1)(1/k))\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{QE}((n-i+1)(k))E((n-i+1)(1/k))\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^2=\boldsymbol{E}$，

$\boldsymbol{Q}(i,j(k))\boldsymbol{Q}(n-i+1,(n-j+1)(-k))=\boldsymbol{QE}(n-i+1,(n-j+1)(k))\boldsymbol{Q}(n-i+1,(n-j+1)(-k))=\boldsymbol{QE}(n-i+1,(n-j+1)(k))\boldsymbol{E}(n-i+1,(n-j+1)(-k))\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^2=\boldsymbol{E}$.

值得注意的是，再结合性质8易知 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(i,j)=\boldsymbol{Q}^{-1}(i,j)$，$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(i(k))=\boldsymbol{Q}^{-1}(i)(k))$，即反初等矩阵的

前两类矩阵的转置与逆矩阵相同。根据性质 6a),性质 9 立得下面反初等伴随矩阵的性质。

性质 10　a) $\boldsymbol{Q}^*(i,j)=-\|\boldsymbol{Q}\|\boldsymbol{Q}(n-i+1,n-j+1)$;

b) $\boldsymbol{Q}^*(i(k))=|k|\,\|\boldsymbol{Q}\|\boldsymbol{Q}((n-i+1)(1/k))$;

c) $\boldsymbol{Q}^*(i,j(k))=\|\boldsymbol{Q}\|\boldsymbol{Q}(n-i+1,(n-j+1)(-k))$.

3　计算应用

本文给出 Flip-矩阵和反初等矩阵在一些特殊矩阵行列式计算方面的应用。

例 1　称具有如下形式的矩阵为三对角形矩阵

$$\boldsymbol{D}_n:=\begin{bmatrix} a & b & & & & \\ c & a & b & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & a & b \\ & & & & c & a \end{bmatrix},$$

其对应的行列式称为三对角形行列式。对于三对角形行列式的计算已有公式

$$\|\boldsymbol{D}_n\|=\begin{cases}(n+1)(a/2)^n, & a^2-4bc=0\\ \dfrac{(a+\sqrt{a^2-4bc})^{(n+1)}-(a-\sqrt{a^2-4bc})^{(n+1)}}{2^{(n+1)}\sqrt{a^2-4bc}}, & a^2-4bc\neq 0\end{cases}\tag{5}$$

但是对于形如

$$\boldsymbol{M}_n:=\begin{bmatrix} & & & & b & a \\ & & & b & a & c \\ & & \iddots & \iddots & \iddots & \\ & \iddots & \iddots & \iddots & & \\ b & a & c & & & \\ a & c & & & & \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{N}_n:=\begin{bmatrix} & & & & c & a \\ & & & c & a & b \\ & & \iddots & \iddots & \iddots & \\ & \iddots & \iddots & \iddots & & \\ c & a & b & & & \\ a & b & & & & \end{bmatrix}$$

的矩阵行列式的计算,可利用 Flip-矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 可以得到一定的简化。因 $\boldsymbol{M}_n=\boldsymbol{D}_n\boldsymbol{Q}_n$,$\boldsymbol{N}_n=\boldsymbol{Q}_n\boldsymbol{D}_n$。由性质 4a)可得 $\|\boldsymbol{M}_n\|=\|\boldsymbol{N}_n\|=\|\boldsymbol{D}_n\|(-1)\dfrac{n(n-1)}{2}$,再由式(5)可得矩阵 $\boldsymbol{M}_n$,$\boldsymbol{N}_n$ 行列式的值。

例 2　在计算类似 Vandermonde 矩阵行列式的时候,应用反初等矩阵也可以起到一定的简化作用。例如计算下面矩阵的行列式的值:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \sum\limits_{i\neq 1}^{n} a_i & \sum\limits_{i\neq 2}^{n} a_i & \cdots & \sum\limits_{i\neq n}^{n} a_i \end{bmatrix}.$$

利用反初等矩阵的定义可得

$$\boldsymbol{Q}(1,2(1))\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i & \sum\limits_{i=1}^{n} a_i & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}\tag{6}$$

式(6)右端矩阵即为 Vandermonde 矩阵。在式(6)的两边同时取行列式可得

$$\|\boldsymbol{Q}(1,2(1))\boldsymbol{A}\|=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)。$$

再由性质 6a),4a) 可得 $\|\boldsymbol{Q}(1,2(1))\|=\|\boldsymbol{Q}\|=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$。所以

$$\|\boldsymbol{A}\|=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(\alpha_i-\alpha_j)。$$

4　结　论

对称矩阵与反对称矩阵都具有丰富的理论知识和应用背景,但对两者之间关系的研究甚少。本文在 Flip-矩阵的基础上,定义了一种新的矩阵,即反初等矩阵。研究了反初等矩阵的相关性质,及其与初等矩阵的关系。同时也给出了反初等矩阵在矩阵行列式计算等方面的一些初等应用。该研究成果对进一步研究对称矩阵与反对称矩阵的相关理论性质及其应用具有潜在的重要价值。

参考文献:

[1] Johnson L W, Riess R D, Arnold T D. Introduction to Linear Algebra[M]. Boston: Addison Wesley Longman, 2001:32-45.

[2] 麻曰亮,裴立业,江桦.改进的压缩感知测量矩阵优化方法[J].信号处理,2017,33(2):192-197.

[3] 程昀,杨印生.矩阵型网络 DEA 模型及其实证检验[J].中国管理科学,2013,21(5):103-109.

[4] Cheng D Z. Semi-tensor product of matrices and its application to Morgen's problem[J]. Science in China (Series F),2001,44(3):195-212.

[5] 袁晖坪.关于复次亚正定矩阵的研究[J].数学杂志,

2002,22(4):481-486.

[6] 秦兆华.关于次对称阵与反次对称阵[J].西南师范学院学报(自然科学版),1985(1):100-110.

[7] 袁晖坪,王行荣,李庆玉.行(列)反对称矩阵的满秩分解和广义逆[J].数学杂志,2009,29(4):513-518.

[8] 李珍珠.线性流形上广义次对称矩阵的左右逆特征值问题[J].数学的实践与认识,2011,41(11):157-161.

[9] 胡丽莹,郭躬德,马昌凤.一类矩阵方程的最小二乘反对称次对称解及其最佳逼近[J].福建师范大学学报(自然科学版),2014,30(3):12-18.

[10] 陈特清,徐金平,谢溪庄.实次对称矩阵的推广与次对称变换[J].内江师范学院学报,2012,27(10):1-3.

[11] 北京大学数学力学系.高等代数[M].北京:高等教育出版社,1978:56-100.

[12] 李改,李磊.基于矩阵分解的协同过滤算法[J].计算机工程与应用,2011,47(30):4-7.

[13] 秦建国,史成唐.中心自共轭矩阵的一些性质[J].郑州轻工业学院学报(自然科学版),2010,25(1):117-119.

[14] 袁晖坪.次亚正定矩阵[J].数学杂志,2001,21(1):29-32.

Some properties and applications about anti-elementary matrix

GUO Chuanhao, *LIU Beibei*

(School of Economics and Management, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: Based on comprehensive researches on the properties of elementary matrix, a kind of anti-elementary matrixes is given and the relevant properties ad applications are studied in this paper. Firstly, the definition and the expression of a new kind of matrixes anti-elementary matrix are given according to the definition of Flip matrix. Secondly, its basic properties and the relationship with elementary matrix are studied and given. Finally, some applications about anti-elementary matrix are given. The relevant research results have potential important significance for further studying the relevant theories of sub-symmetric matrix.

Key words: Flip-matrix; anti-elementary matrix; three diagonal matrix; Vandermonde matrix

(责任编辑:康　锋)