

## 基于扩展分形模型的织物组织设计方法

熊宇龙<sup>a</sup>,张华熊<sup>a</sup>,鲁佳亮<sup>b</sup>,林翔宇<sup>a</sup>,金耀<sup>a</sup>

(浙江理工大学,a.信息学院;b.材料与纺织学院,杭州 310018)

**摘 要:** 基于分形的织物组织设计是一种新型的数字化方法,设计空间不断扩大,但目前现有方法存在一定限制,因此对现有研究提出的分形织物组织模型进行扩展,提出了一种具有普适性的模型与设计方法。该方法基于分形的思想,通过组织矩阵的三种代数运算,并结合不同层次的局部变换,构造出一个生成分形织物组织的统一模型。该方法提供了更广泛、多维度的变化形式与手段,通过不同层次组织变化、面填充组织与地填充组织的变化,不仅可设计出现有方法所能设计的织物组织,而且在更大程度上拓宽了设计空间,能够设计出更多独特的组织。通过 VC++ 实现了该扩展模型并进行了仿真实验,实验结果表明:运用该方法设计织物组织,其变化手段更为灵活,形式更为多样、丰富。

**关键词:** 扩展分形;织物组织;分形组织;Kronecker 积

**中图分类号:** TS195.644

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1673-3851(2018)05-0341-05

### 0 引言

织物组织用于表现机织物经纱和纬纱相互交错或彼此浮沉的规律,是影响织物的结构、外观以及物理机械性能的重要因素<sup>[1]</sup>。研究新颖、高效的织物组织设计方法是纺织品设计的一个重要课题。织物组织的数字化设计方法已有很多,如:赵良臣等<sup>[2]</sup>通过组织矩阵的旋转变换设计织物组织;施国生等<sup>[3]</sup>将织物组织看作图像,并运用图像变形技术设计新组织;周赆等<sup>[4]</sup>引入了全息组织的概念,并结合数码技术进行组织设计;金耀等<sup>[5]</sup>运用置换群表达织物组织,利用代数运算进行织物组织设计。这些方法均从不同的角度建立织物组织的数学模型,不仅提高了设计效率,而且提供了丰富的织物组织类型。

在众多的数字化设计方法中,基于分形的组织设计是其中一类新型的方法。这类方法根据分形几何的思想,借助组织矩阵<sup>[2]</sup>、图像变换<sup>[3]</sup>、代数<sup>[5]</sup>等工具建立数学模型,设计具有层次结构且相互嵌套

的分形组织,所设计的组织具有结构复杂、风格多变、不易模仿等特点。现有的分形组织设计方法大致可分为两类:基于 L 系统法与基于 IFS 法,分别从分形理论的 L 系统和 IFS 的角度设计组织。张聿等<sup>[6]</sup>首次将分形理论中的 L 系统引入织物组织设计,运用 L 系统的链式语言生成规则生成多层次嵌套的分形组织。基于该方法,贾静静等<sup>[7]</sup>与岑科军等<sup>[8]</sup>分别针对缎纹组织与 3×3 平纹,设计出具有特殊纹理效果的分形织物组织。但是这类方法具有一定的局限性,一般要求基础组织具有循环数小且组织点对称布局等特点,其所能设计的组织比较有限。为此,张聿等<sup>[9-10]</sup>通过 Kronecker 积运算,运用迭代函数的思想,提出了基于 IFS 的分形组织设计方法。该方法所设计的组织具有严格的自相似性,是一种特殊的 IFS 分形组织,突破了 L 系统的局限性,能够针对任意形式的基础组织设计出对应的分形组织。雷韩等<sup>[11]</sup>与熊丽丽等<sup>[12]</sup>采用该 IFS 法,分别探索了麦粒分形组织与回纹分形组织的设计方

收稿日期:2017-12-18 网络出版日期:2018-02-27

基金项目:国家自然科学基金项目(61702458);浙江省自然科学基金项目(LY17F020031);浙江省服装个性化定制协同创新中心项目(浙教高科[2016]63号);浙江理工大学科研启动基金项目(15032166-Y,13032157-Y)

作者简介:熊宇龙(1992-),男,湖北宜昌人,硕士研究生,主要从事智能信息处理方面的研究。

通信作者:金耀,E-mail:fool1025@163.com

法。马铃琳等<sup>[13]</sup>改进了该 IFS 法,运用迭代方法在分形组织的不同层次嵌入不同的基础组织,丰富了织物组织的变换形式。章平等<sup>[14]</sup>则从 IFS 的定义出发,研究了仿射变换意义下的分形组织,将其中的仿射变换由恒等变换扩充为旋转变换,从而进一步扩展了分形组织的设计空间。上述方法均在分形理论的框架下进行变化,其局部组织的变换形式单一,因此变化空间因此受到限制而有待进一步增大。

本文在现有分形织物组织设计的研究基础上,对其进行进一步扩展,提出了具有一般性的分形织物组织设计方法。该方法基于所定义的组织矩阵的代数运算,将 IFS 法的仿射变换扩展为一般形式的变换,且增加对填充组织的变化,建立了扩展分形织物组织数学模型。它突破了传统分形织物组织的设计思路,不仅能设计出传统方法所能获得的织物组织,而且具有更大、更灵活的变化自由度,能够设计出传统方法所不能获得的新颖织物组织,从而为织物组织的数字化设计提供了一种新的思路。

## 1 扩展分形织物组织的数学模型

本文提出的扩展分形织物组织模型是对传统分形织物组织模型的一种推广,其基本思想是增加局部组织的变换形式,包括各种基础组织及填充组织等,为设计者提供更多变化的可能性。本文运用矩阵代数的工具建立扩展分形织物组织的数学模型,首先针对织物组织定义其代数运算。运用 Kronecker 积描述分形织物组织模型<sup>[9-10]</sup>的思想,本文同样将织物组织看作布尔矩阵(组织矩阵),并对其定义三种基本的代数运算,由此建立分形织物组织的统一模型。设有组织矩阵 $(a_{ij})_{m \times n}$ 与 $(b_{ij})_{m \times n}$ ,其中 $a_{ij}, b_{ij} \in \{0, 1\}$ ,则有:

a) 逻辑加 $\oplus$ :  $(a_{ij})_{m \times n} \oplus (b_{ij})_{m \times n} = (\max(a_{ij}, b_{ij}))_{m \times n}$ ;

b) 异或: $\bar{A} = E - A$ ,其中 $E$ 为全1矩阵;

c) Kronecker 积 $\otimes$ : 设 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ , 则有 $A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}$ 。

$\otimes \cdots A_n$  表示 $n$ 个组织矩阵 $A_i$ 连乘,记为: $\prod_{i=1}^n A_i$ 。

设用于生成分形组织结构的基础组织的集合为 $W_b$ ,其 $n \in \mathbf{N}$ 阶分形变换可看作一种算子 $f^n$ ,则基础组织 $W_b$ 在该算子作用下生成的分形组织集合为 $W_f^n$ ,即 $f^n: W_b \mapsto W_f^n$ 。具体讲,具有严格自相似性的织物组织分形变换 $f^n$ 可由 Kronecker 积进行递推

定义:

$$f^n = A \otimes f^{n-1} (n \in \mathbf{N} - \{0\}, A \in W_b), f^0 = A \quad (1)$$

由式(1)所定义的递推关系可知,织物组织 $A$ 的 $n$ 阶分形组织的结果即对 $A$ 自身连续施加 $n$ 次 Kronecker 积运算: $A \otimes A \otimes \cdots \otimes A$ ,本文称之为“Kronecker 幂”,记为 $A^n$ 。

为避免分形组织因浮长过长而无法用于实际生产,通常分形组织需配合另一种组织(称作“填充组织”)对浮长过长区域进行填充,由此生成的组织称为“分形织物组织”。设填充组织集合为 $W_c$ ,则分形织物组织的变换 $F^n$ 定义了映射 $F^n: W_b \times W_c \mapsto W_F$ ,其中 $W_F$ 为所生成的分形织物组织集合。如标准的分形织物组织模型<sup>[9-12]</sup>为:

$$F^n(A, B) = A^n \oplus \bar{A}^{n-1} \otimes B \quad (2)$$

其中运算优先级 $\otimes$ 高于 $\oplus$ 。

根据生成分形织物组织的数学模型<sup>[9-12]</sup>可知,分形织物组织由基础组织与填充组织的具体形式唯一确定。其设计过程可分为两大步骤:a) 根据基础组织生成分形组织;b) 运用填充组织生成分形织物组织。因此,分形织物组织可通过对基础组织和填充组织施加变换实现组织结构与形式的变化。

现有数学模型<sup>[13-14]</sup>的基础组织变换受限于指定的恒等变换或旋转变换,且地填充组织是固定不变的,它们虽然在一定程度上增加了变化形式,但仍未能充分扩大设计空间。为此,本文提出一种扩展的分形织物组织模型。为了方便描述,本文亦将用于设计的组织分为两大类:基础组织 $W_b$ 与填充组织 $W_c$ 。它们的含义与其原始定义<sup>[6,10]</sup>略有不同:基础组织用于生成分形组织的层次结构;填充组织用于对分形组织的组织点进行填充形成最终的织物组织,其中分形组织的经组织点和纬组织点分别填充以不同的组织,在本文中对应地称之为“面填充组织”与“地填充组织”。

由此,本文提出的扩展分形织物组织的数学模型描述如下:

$$F^n(A_1, \cdots, A_n, B, C, r_{ij}^k, h, g) = f^{n-1}(A_1, \cdots, r_{ij}^{n-1}(A_n)) \otimes g_{ij}(C) \oplus \bar{f}^{n-1}(A_1, \cdots, r_{ij}^{n-1}(A_n)) \otimes h_{ij}(B) \quad (3)$$

其中: $f^{n-1}(A_1, \cdots, r_{ij}^{n-1}(A_n)) = A_1 \prod_{k=2}^n r_{ij}^{k-1}(A_k)$ ,对 $A_1, \cdots, A_n$ 先对同层组织施加 $r_{ij}^{k-1}$ 变换再对所有组织进行分形变换, $g_{ij}$ 与 $h_{ij}$ 表示对分形组织的组织点 $(i, j)$ 处填充的组织施加某种变换。这里所指的变换不限于仿射变换,可以是具有一般形式的各种变换。因此,本文称之为“扩展分形织物组织”模型。

由该模型的定义(式(3))可见,它是对传统分形

织物组织模型的扩展,而后者仅是前者的特例。具体讲,它们存在如下关系:

a) 当  $A_1 = \dots = A_n = C, r_{ij}^k = h = g = I$  时( $I$  是恒等变换),该模型退化为式(2),即原始分形组织模型<sup>[9-10]</sup>:  $F^n(A, B) = C^n \oplus \overline{C^{n-1}} \otimes B$ 。

b) 当  $r_{ij}^k = h = I$  时,该模型退化为各层基础组织互异的分形组织模型<sup>[13]</sup>,即:  $A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_{n+1} \oplus \overline{A_1 \otimes A_2 \otimes \dots \otimes A_n} \otimes B$ 。

c) 当  $g = I, r_{ij}^k \in SO(2)$  ( $SO(2)$  为旋转变换群) 时,该模型退化为同层仿射分形织物模型<sup>[14]</sup>,即:  $A_1 \otimes \prod_{k=2}^n 1_{k=2} r_{ij} (A_k) \oplus \overline{A_1 \otimes \prod_{k=2}^n r_{ij} (A_k)} \otimes B$ 。

## 2 扩展分形织物组织的设计方法

异于传统的分形织物组织设计方法,本文所提出的分形织物组织模型(式3)增加了更多的可控自由度,其组织设计过程也略有区别,具体步骤为:

步骤一:选定基础组织集  $W_b$ 、填充组织集  $W_c$ 、分形变换的层数  $n$  以及最里层变换函数  $g, h$  与其它层组织变换函数  $r^k$ ;

步骤二:从  $W_b$  中依次选取  $n$  个组织并分别对其施加变换  $r^k$ ,然后再进行分形变换  $f^{n-1}$  生成分形组织,其中选取组织的方法可以是人为指定的,也可以是随机生成的(下同);

步骤三:从  $W_c$  中选取一个面填充组织,在变换  $g$  作用下,按坐标填入分形组织的经组织点;

步骤四:从  $W_c$  中选取一个地填充组织,对其进行  $h$  变换后按坐标填入分形组织的纬组织点。

在上述步骤中,关键是组织集的选取、分形层数确定以及变换函数的设计。

基础组织决定分形组织的整体结构。在选取基础组织集时,织物组织的组织循环数的大小和组织点分布形式可以自由选取,如可以是常见的规则组织和不规则组织。填充组织的作用是为防止浮点过长,对组织最终形成的肌理效果影响较大,理论上它也可以选取各类组织。但是考虑到局部组织的变换,为使得组织便于在固定大小的空间内进行“填充”,基础组织和填充组织的循环数需满足一定的约束:对于  $W_b$  中的组织,其循环数可互不相同;但对于  $W_c$  中的组织,其循环数均需相同。

分形层数  $n$  很大程度上决定了分形组织结构的复杂性。当  $n=0$  时,即为原组织本身;当  $n>0$  时,便出现层次嵌套的现象, $n$  越大层次越深,分形组织的结构也越复杂。分形层数一般根据实际设计意图

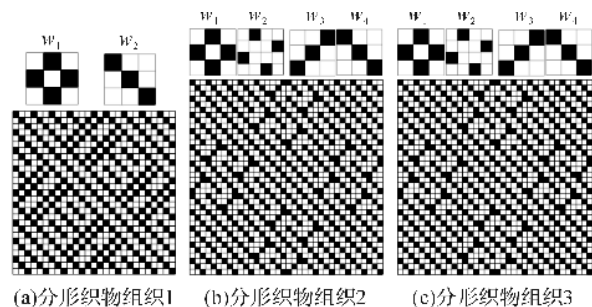
和需求确定,通常取作:  $3 \geq n \geq 1$ 。

变换函数决定了肌理的复杂性与多样性。变换函数可以根据基础组织与填充组织的特点进行设计。例如可以将组织看作几何图形进行旋转变换,亦可以将组织看作矩阵进行转置变换等。此外,变换函数不仅可以对同层组织施加同一种变换,也可以对各个组织点分别进行独立变换,即可设计关于组织点坐标的任意函数,因此其设计空间非常大,也非常灵活。但需要注意的是变换  $r^k, g$  和  $h$  均不能改变原组织的循环数。

## 3 实验

本文在 Visual C++ 2017 开发环境下实现了分形织物组织的生成算法,其中采用 Eigen 库实现组织矩阵的存储与运算,并运用 MFC 的文档与视图框架实现组织意匠图的可视化。

本文提出的方法能够生成传统分形组织模型所能设计的任何组织。图1是由本文算法生成的三个分形织物组织,置于其上方的组织为生成该组织所选用的基础组织和填充组织。其中对于组织1,选取  $n=2, W_b = \{w_1\}, W_c = \{w_1, w_2\}$ ,  $w_1, w_2$  分别对应面填充组织和地填充组织,且所有变换都取作恒等变换;对于组织2选取  $n=2, W_b = \{w_1, w_2\}, W_c = \{w_3, w_4\}$ ,  $w_3, w_4$  分别对应面填充组织和地填充组织,且所有变换也都取作恒等变换;对于组织3选取  $n=2, W_b = \{w_1, w_2\}, W_c = \{w_3, w_4\}$ ,  $w_3, w_4$  分别对应面填充组织和地填充组织,  $r^k$  与  $g$  取作旋转变换,  $r_{ij}^k$  为恒等变换。由生成分形织物组织的参数可知,该三个组织分别可用文献[10, 13-14]方法设计得到,而运用本文提出的模型仅需设置一些特殊参数便可设计完成。因此,本文提出的方法所生成的组织能够涵盖该三种方法所生成的组织,其设计空间更大。



(a)分形织物组织1 (b)分形织物组织2 (c)分形织物组织3

图1 本文算法生成的分形织物组织

注:其中组织(a)上方的两个小组织分别生成下方的基础组织与地填充组织;(b)、(c)上方四个组织中前两个是基础组织,第三个是面填充组织,第四个是地填充组织。



与传统的 IFS 模型及其变种<sup>[10,13-14]</sup>比较,本文提出的扩展分形织物组织模型具有更大的优势,它所能设计的组织空间更大,既能够设计出传统方法所能设计的组织,也能设计出传统方法不能设计的组织。下面给出两个例子进行说明。

本文方法对同层组织的变换不仅扩展了仿射函数的范畴,可以选择为任意函数,而且引入了组织点的坐标作为变量,进一步增加了可变的自由度和灵活性。文献[14]需人工指定同层中每一个组织点的仿射变换,若组织点数量较大,将大大增加设计的工作量,而本文方法可以实现自动设计。例如,可以将式(5)中的  $r_{ij}^k$  设计成旋转变换  $r_{ij}^k = \text{rot}_{p_{ij}}(\omega)$ ,表示对组织  $\omega$  进行逆时针旋转  $\frac{\pi}{2} p_{ij}$ ,其中  $p_{ij}$  可以设计成关于组织点所在组织坐标系中的坐标  $(i, j)$  的函数,  $p_{ij} = l(i, j) \bmod 4$  ( $l(i, j)$  可以是任意整数函数)。同理,对变换  $g$  和  $h$  的变化形式亦然。本文选取  $n=2$ ,

$W_b = \{w_1, w_2\}, W_c = \{w_3, w_4\}, w_3, w_4$  分别对应面填充组织和地填充组织,  $r_{ij}^k$  和  $g_{ij}$  设计成上述旋转变换,并将函数  $l(i, j)$  分别取作  $l(i, j) = i+j$  与  $l(i, j) = i \times j$ ,其所生成的分形组织见于图 2(b)–(c),其中上图是未加地填充组织的分形组织图,下图是填充组织后的分形织物组织图。可见,函数  $l$  选取不同的形式,所生成的组织将呈现不同的结构,而  $l$  的选取方式可以是任意的,因此由此带来的组织的变化也是无穷无尽的。对于变换  $r_{ij}^k$  和  $g_{ij}$ ,本文方法能够支持其它变换形式,如转置变换。由于组织矩阵有 2 条对角线,因此转置变换根据不同的对角线可定义不同的转置变换(2 种)。进而可导出 3 种变换算子  $T^k (k=0, 1, 2)$  分别对应恒等变换与该 2 种转置变换,其中  $k = l(i, j)$  由组织点坐标确定:  $k = l(i, j) \bmod 3$ 。图 2(d)–(e)分别由  $l(i, j) = i+j$  与  $l(i, j) = i \times j$  所生成的分形织物组织图。这种组织图是传统的分形织物组织模型无法设计得到的。

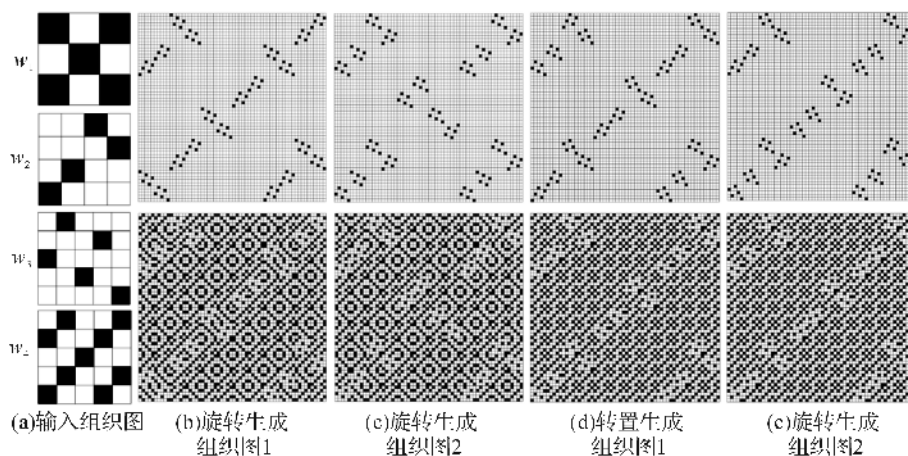


图2 不同变换生成的分形组织图

本文方法增加了对地填充组织的变化。传统方法在设计分形织物组织时,所用的“填充组织”,即对应本文的地填充组织均是单一不变的,而本文方法可对地填充组织进行选择性地变化。该变化形式取决于用户所给的变换  $h_{ij}$  (见式(5))。除了采用常用的旋转变换外,亦可以采用其它形式的变换,例如上述的转置变换。图 3 给出了由(a)某分形组织配合由三个函数  $l(i, j) = 0, l(i, j) = i+j$

和  $l(i, j) = 2i+j$  生成的地填充组织所形成的分形织物组织,其它参数为:  $n=2, W_b = \{w_1, w_2\}, W_c = \{w_3, w_4\}, r_{ij}^k$  为恒等变换,  $g_{ij}$  为关于组织点坐标的旋转变换,  $h_{ij}$  为上述转置变换。由图 3 可见,比起恒等变换下的地填充组织<sup>[10,13-14]</sup>,使用变化填充组织能够获得更多风格各异、变化多样的组织,使得组织的设计可供选择的自由度增大,设计更为灵活。

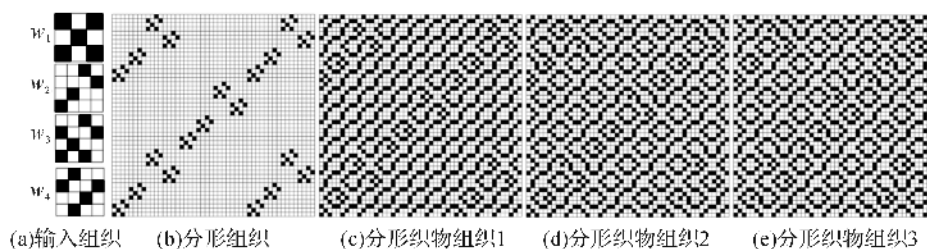


图3 不同变换算子作用下所形成的分形织物组织

本文算法的时间复杂度是  $O(m^{2(n+1)})$ , 其中  $m$  是输入基础组织和填充组织的平均组织循环数。该算法尽管采用了 Kronecker 积定义分形织物组织, 但实际计算时并不直接根据 Kronecker 积的运算法则进行, 而是利用组织矩阵的特点, 仅在组织矩阵元素为 1 的位置填充组织, 从而避免了大量的乘法计算, 节省了计算时间。大量实验表明, 对于生成一般的分形织物组织(基础组织与填充组织的循环数小于 10, 层数小于 3), 本文算法均能达到实时响应的速度, 能够满足交互设计的需求。

#### 4 结 论

本文提出了基于扩展分形模型的织物组织设计方法。该方法基于代数运算, 并引入针对组织的各种变换算子, 建立了具有一般性的分形织物组织模型, 并提出了基于该模型的分形组织设计方法。计算机仿真实验表明, 运用该方法进行组织设计是可行的。它提高了组织设计的自由度与灵活性, 能够设计出比传统方法更为复杂多变的组织; 从而更进一步拓展了组织设计的空间, 为分形织物组织设计提供了新的思路。在今后的工作中, 将引入更多的变换算子并研究变换算子对最终形成的组织外观的影响规律。

#### 参考文献:

- [1] 蔡陆霞. 织物结构与设计[M]. 北京: 中国纺织出版社, 2008: 32-40.
- [2] 赵良臣, 闻涛. 旋转组织设计的数学原理[J]. 纺织学报, 2003; 24(6): 33-4.
- [3] 施国生, 张瑜秋, 熊超. 图像变换在多臂织物组织设计上的应用[J]. 纺织学报, 2006, 27(7): 23-26.
- [4] 周超, 吴文正. 基于数码技术的机织物组织设计原理和方法[J]. 纺织学报, 2007, 28(4): 48-51.
- [5] 金耀, 张聿. 织物组织的群表达方法[J]. 纺织学报, 2010, 31(6): 48-51.
- [6] 张聿, 金耀, 孙家武, 等. 基于 L 系统的织物分形组织设计方法[J]. 纺织学报, 2007, 28(5): 51-54.
- [7] 贾静静, 张聿. 基于 L 系统的缎纹分形组织及其织纹效果设计[J]. 丝绸, 2011; 48(5): 32-4.
- [8] 岑科军, 贾静静, 孙家武, 等. 基于 L 系统的  $3 \times 3$  平纹分形组织设计应用方法[J]. 纺织学报, 2011, 32(11): 49-52.
- [9] ZHANG Y, Han L. Design method of plain fractal weave based on IFS & Kronecker product[C]//2011 4th IEEE International Conference on Computer Science and Information Technology (IEEE ICCSIT 2011). IEEE, 2011: 401-404.
- [10] 张聿, 金耀, 岑科军. 基于 IFS 的非规则分形组织设计方法[J]. 纺织学报, 2012, 33(12): 30-34.
- [11] 雷韩, 张聿. 基于 IFS 确定性迭代算法的麦粒分形组织设计法[J]. 丝绸, 2012; 49(8): 26-9.
- [12] 熊丽丽, 张聿. 基于斜纹基本组织的回纹分形组织设计方法[J]. 丝绸, 2015, 52(1): 31-34.
- [13] 马铃琳, 张聿. 各层基础组织互异的分形组织设计方法[J]. 丝绸, 2013; 50(9): 45-9.
- [14] 章平, 张聿. 同层仿射分形织物的设计方法[J]. 丝绸, 2014; 51(12): 35-8.

## Fabric-weave design method based on extended fractal model

XIONG Yulong<sup>a</sup>, ZHANG Huaxiong<sup>a</sup>, LU Jialiang<sup>b</sup>, LIN Xiangyu<sup>a</sup>, JIN Yao<sup>a</sup>

(a. School of Information Science and Technology; b. College of Materials and Textiles, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

**Abstract:** The design of fabric weave based on fractal is a new type of digital method. Existing work presented much related work which increasingly expands the design space, but is still restricted. To this end, the paper extended these methods, and proposed a more general design model of fractal fabric weaves. Following the idea of fractal theory, the model defines three kinds of algebra operators for weave matrices, introduces various local transformations and builds a unified formula to generate fractal fabric weaves. The model provides more general and more dimensional variations, such as varying forms of weaves in different layers as well as the foreground-filling weaves and background-filling weavings. It is capable of designing traditional fractal fabric weaves and extending the space to designing more special weaves. The computer simulation experiment is conducted based on the platform of VC++. And it demonstrates that the fabric weaves designed with our proposed method are flexible in design and rich in change with diversity forms.

**Key words:** extended fractal-fabric-weave model; fabric weave; fractal weave; Kronecker product

(责任编辑: 康 锋)