

## 基于直曲线判断的曲线拟合研究

杨亮亮<sup>1</sup>, 胡鑫杰<sup>1</sup>, 王秀锋<sup>2</sup>

(1. 浙江理工大学机械与自动控制学院, 杭州 310018; 2. 杭州琦星机器人科技有限公司, 杭州 310012)

**摘 要:** 针对数控加工中任意形状的轮廓拟合速度慢、精度低等问题, 提出一种基于直曲线判断的非均匀有理 B 样条曲线自适应逼近方法。该方法首先得到直线和曲线的过渡点, 并按离散点顺序判断出直线或曲线。若是直线, 采用最小二乘法拟合该直线; 若是曲线, 采用曲率与斜率相结合的方法求出曲率极大值点, 作为关键点插值非均匀有理 B 样条曲线, 利用德布尔递推公式反求出控制点, 生成初始插值曲线。然后求出所有原始离散点与初始插值曲线上对应点的误差, 若最大误差满足给定要求, 则在最大误差处自适应增加一个关键点形成新的插值曲线, 反复迭代直到最大误差满足给定误差条件。相比传统算法, 该方法能够更好地凸显整体轮廓的主要特征。实验证明该方法不仅可以得到最少的控制点数目, 还具有速度快、逼近精度高等特点。

**关键词:** 非均匀有理 B 样条; 曲线逼近; 直线或曲线; 自适应

**中图分类号:** TP391.7

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1673-3851 (2017) 04-0551-06

### 0 引言

在数控加工中, 非均匀有理 B 样条 (non-uniform rational B-spline, NURBS) 曲线拟合应用非常广泛<sup>[1-3]</sup>。在满足精度的前提下, NURBS 逼近曲线能够大幅度提高加工速度, 提升加工效率。最早研究有理 B 样条方法的主要有美国的皮格尔和蒂勒, 他们的研究使非均匀有理 B 样条曲线成为了全球化技术, 并一度成为当时最流行的曲线拟合方法。法林等<sup>[4]</sup>的研究使 NURBS 样条曲线的理论更加牢固。在利用 B 样条曲线拟合离散数据点的领域, 有大量学者提出不同的方法, 如黄丽琴等<sup>[5]</sup>提出的基于切矢控制的 B 样条曲线逼近的 PIA 算法、段振云等<sup>[6]</sup>提出的一种改进 B 样条曲线插值法。传统的非均匀有理 B 样条曲线逼近有两种方法<sup>[7-8]</sup>: a) 从最少的或较少数量的控制点开始, 构造一条逼近于所给数据点的曲线, 然后检查曲线与给定数据点的偏差, 如果每点处的偏差都小于给定误差则返回, 否则继续迭代直到满足条件为止; b) 从最多控

制点开始或足以使第一次逼近的结果精度满足给定误差的控制点数开始, 构造一条逼近于所给数据点的曲线, 然后检查曲线与给定数据点的偏差, 如果不再满足给定精度, 返回上一次的曲线, 否则减少控制点个数继续迭代。韩江等<sup>[9]</sup>提出的基于轮廓关键点的曲线拟合算法和江本赤等<sup>[10]</sup>提出的面向密集数据点的曲线逼近算法, 都是基于上述传统的曲线拟合方法。但是这两种传统方法在大量原始离散数据点的情况下, 需要进行多次迭代拟合, 耗费时间较长, 这一状况往往难以使人满意。

本文提出了一种基于直曲线判断的三次非均匀有理 B 样条曲线 (NURBS) 拟合的算法。首先, 观察所有的离散样本点并进行分析, 通过斜率比较法寻找到直线和曲线的过渡点; 对直线区域内的所有离散样本点进行最小二乘拟合, 对曲线区域内的离散样本点通过斜率与局部曲率极大值共同比较法, 得到拟合曲线最重要的关键点序号并进行插值。然后, 根据误差条件计算出误差最大处的离散样本点并重新组合成关键点进行曲线插值, 重复步骤, 在误

差最大处逐个增加新的关键点并重新进行插值计算,直到满足误差;最后得到拟合曲线。

## 1 非均匀有理 B 样条曲线

$K$  次非均匀有理 B 样条(NURBS)曲线可以表示为一段有理多项式矢函数,具有如下形式:

$$p(u) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i d_i N_{i,k}(u)}{\sum_{i=0}^n w_i N_{i,k}(u)} \quad (1)$$

式中

$$\begin{cases} N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1, u_i \leq u \leq u_{i+1} \\ 0, \text{其他} \end{cases} \\ N_{i,k}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+k} - u_i} N_{i,k-1}(u) + \frac{u_{i+k+1} - u}{u_{i+k+1} - u_{i+1}} N_{i+1,k-1}(u) \\ 0/0 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

其中  $w_i (i = 0, 1, \dots, n)$  为权或者权因子,  $d_i (i = 0, 1, \dots, n)$  为控制顶点,  $N_{i,k}(u)$  是由节点矢量  $U = [u_0, u_1, \dots, u_{n+k+1}]$  计算确定的  $K$  次规范 B 样条基函数,通常取两端节点的重复度为  $K+1$ ,即  $u_0 = u_1 = \dots = u_k, u_{n+1} = u_{n+2} = \dots = u_{n+k+1}$ 。在这里采用三次非均匀有理 B 样条曲线进行轮廓拟合,即  $K = 3$ 。

## 2 非均匀有理 B 样条曲线逼近

### 2.1 选取轮廓中直线和曲线的过渡点

直线和曲线过渡点的选取对整个曲线的逼近精度至关重要。不合适的选取不仅会增加迭代计算的次数,增大工作量和耗时时间,而且还会直接影响到整条曲线逼近的初始精度。

本文采取斜率比较法求得过渡点。在计算机图形学中,任意一条直线都是由无数个点集构成,但是这些点并不是完全共线的,而是存在着一定的梯度。因此只要判断出哪些点构成了一条直线,那么剩下的点分别都构成了曲线。

首先根据离散点  $P_i (i = 1, 2, \dots, n)$  相邻两点求取每一点的斜率  $k = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$ ,然后将相邻第一个点的斜率与第二个点的斜率相减,如果斜率差的绝对值小于等于  $m$  或大于等于  $n$ ,再将第一个点的斜率与第三个点的斜率相减进行比较,如果满足要求则继续比较后一个点。如果至少有连续的  $r$  个点满足要求,就判定这是一条直线,并计算出直线的两个端点。准确地判断出直线后,剩下的离散数据点则分段构成了样条曲线。一般情况下,  $m = 0.25, n = 1 \times$

$10^{10}, r = 12 \sim 14$ 。直线和曲线的过渡点示意图如图 1 所示。

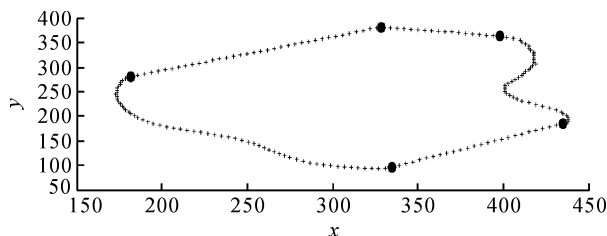


图 1 直线和曲线的过渡点示意图

图 1 中的数据是由实体剪裁,通过相机拍摄后经过 Matlab 处理获取的实体轮廓离散数据点,该处理方法旨在模拟数控零件的轮廓。从图 1 可以看出,本文算法准确地判断了直线和曲线以及直线与直线之间的过渡点,为后续分段拟合作铺垫。

### 2.2 曲线的关键点的选择

根据斜率比较法求得的所有直线的两个端点,按所有离散点的顺序进行整体轮廓的拟合。

首先判断区域内的离散点集是否是直线。如果是直线,采用最小二乘法对直线上的所有点进行拟合,使其均方误差达到最小。如果是曲线,首先计算出曲线上的关键点序号和对应的坐标。这些关键点选择正确与否,不仅会影响到这部分曲线拟合的迭代次数,而且会直接影响到初次拟合曲线的精度。通过关键点的正确选取,可以大大提高曲线的拟合速度和精度。一般情况下,可以通过求取离散点的局部曲率极大值来获得关键点,但这种传统方式计算的关键点会有所偏差,因此本文采用曲率极大值和斜率相结合的方法来获得所需的关键点。

本文采用近似求解法,通过 3 个相邻的离散点  $p_{i-1}, p_i, p_{i+1}$  的曲率半径来计算每一点的曲率近似值,首末两个端点的曲率设定为零。

$$k_i = \frac{1}{\rho_i} = \frac{2 | \mathbf{p}_i \mathbf{p}_{i+1} \times \mathbf{p}_i \mathbf{p}_{i-1} |}{| \mathbf{p}_i \mathbf{p}_{i+1} | | \mathbf{p}_i \mathbf{p}_{i-1} | | \mathbf{p}_i \mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i \mathbf{p}_{i-1} |} = \frac{2 \sin \angle \mathbf{p}_i \mathbf{p}_{i+1}, \mathbf{p}_i \mathbf{p}_{i-1}}{| \mathbf{p}_{i-1} \mathbf{p}_{i+1} |} \quad (3)$$

若点  $i$  上  $k_i > k_{i+1}, k_i > k_{i+2}$  且  $k_i > k_{i-1}, k_i > k_{i-2}$ ,则将该点视为初定曲率极大值点。根据初定曲率极大值点,计算出该点和周围 4 点的斜率,通过比较 5 点的斜率,将斜率最小的一点视为所需的关键点。当某个离散点处在曲率极大值处,且该点的斜率大于某个阈值  $t$ ,则直接把该离散点作为初始关键点,不需要比较该点与周围 4 点的斜率。一般  $t = 5$ 。离散点的曲率变化如图 2 所示,传统算法曲率极大

值求得关键点和本文算法曲率极大值和斜率结合求得关键点示意如图3和图4所示。

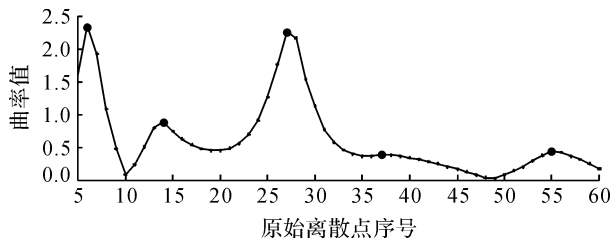


图2 离散点的曲率示意图

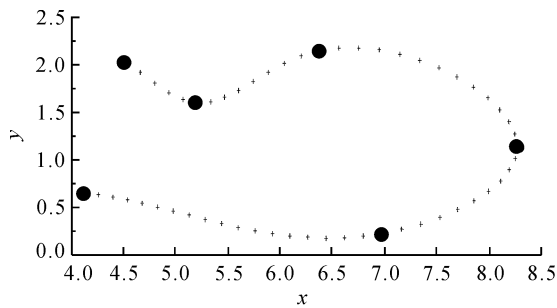


图3 曲率极大值求得关键点示意图

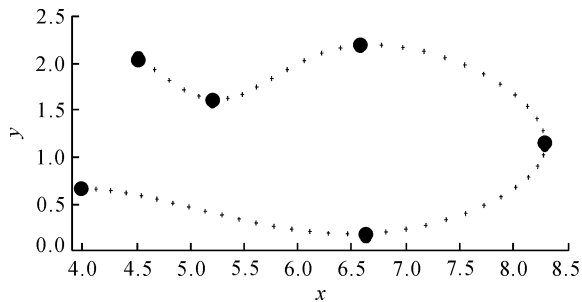


图4 曲率极大值与斜率结合求得关键点示意图

比较图3和图4可以发现,除了首末端点外,另外5个局部曲率极大值点中的2个都被改善了,总体上的初始逼近精度得到了有效地提高。

### 2.3 反算控制点

反算控制点一般分为2个步骤。首先确定节点矢量,最常用的参数化方法有3种,包括均匀参数化法、向心参数化法和弦长参数化法。均匀参数化法和向心参数化法都不能很好地反映数据点的折拐情况<sup>[11]</sup>。本文采用弦长参数化法,这是目前最常用的方法。弦长参数化法计算公式:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_i = u_{i-1} + |\Delta \mathbf{P}_{i-1}| \quad i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (4)$$

式中:向前差分矢量: $\Delta \mathbf{P}_{i+1}$ ,弦长矢量: $\Delta \mathbf{P}_i = \Delta \mathbf{P}_{i+1} + \Delta \mathbf{P}_i$ ,即两个关键点之间的距离。然后计算控制点。确定节点矢量后,通过式(5)反算出控制点,其中首末端点即为首末控制顶点。

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_n & b_n & c_n \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \\ d_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \\ e_{n+1} \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中: $d_i$ 为各自对应的控制顶点。取 $\Delta_i = u_{i+1} - u_i$ ,

$$i = 0, 1, \dots, n, \text{ 则: } a_i = \frac{(\Delta_{i+2})^2}{\Delta_i + \Delta_{i+1} + \Delta_{i+2}},$$

$$b_i = \frac{\Delta_{i+2}(\Delta_i + \Delta_{i+1})}{\Delta_i + \Delta_{i+1} + \Delta_{i+2}} + \frac{\Delta_{i+1}(\Delta_{i+2} + \Delta_{i+3})}{\Delta_i + \Delta_{i+1} + \Delta_{i+2}},$$

$$c_i = \frac{(\Delta_{i+1})^2}{\Delta_{i+1} + \Delta_{i+2} + \Delta_{i+3}}, e_i = (\Delta_{i+1} + \Delta_{i+2})p_{i-1}.$$

### 2.4 算法逼近偏差的计算

将所有的原始离散点 $P_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 都弦长参数化,并将初始插值曲线上与原始离散点 $P_i$ 对应的点设定为 $C_i (i = 0, 1, \dots, n)$ ,本文将 $D_i = |C_i - P_i|$ 视为初始逼近曲线的偏差。如果 $D_i$ 大于用户给定的误差 $E$ ,找出逼近偏差 $D_i$ 中的最大值,并在误差最大处增加一个关键点。通过只增加一个关键点,不仅能有效改善局部偏差,而且不会影响全局的逼近效果,从而可以使控制点数量达到最少。

重复上述的步骤反复迭代,直到逼近偏差 $D_i$ 的最大值小于或等于给定误差 $E$ 。初始逼近曲线误差示意图和改进后逼近曲线示意图如图5和图6所示。

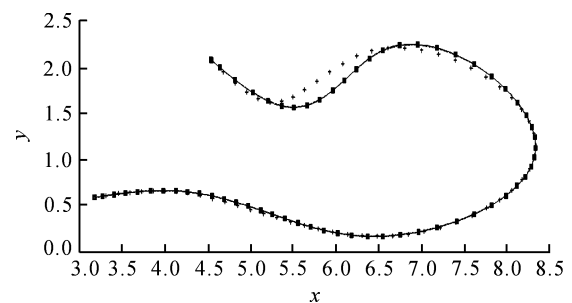


图5 初始逼近曲线误差示意图

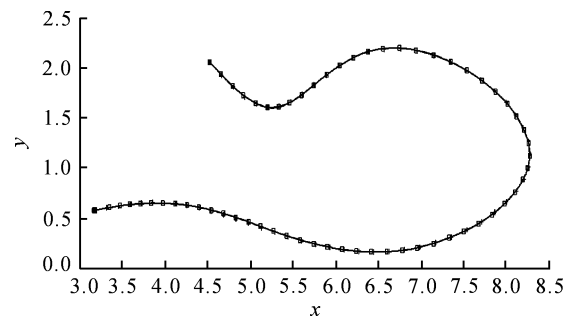


图6 改进后逼近曲线示意图

### 3 算法应用举例

#### 3.1 应用举例 1

图7中的数据点集共包含186个原始离散点,如果以每一个离散点为插值点,则会产生188个控制点,虽然能达到很高的逼近精度,但计算复杂度同时也大幅度增加,计算耗费时间也相当长。因此采用本文算法先进行直线和曲线过渡点的计算,并采用局部曲率极大值和斜率相结合的方法选取包含轮廓主特征的关键点进行插值,该算法在满足精度的条件下,使控制点的数量达到了最少,并有效地提高了计算速度。实验参数取值为 $m=0.25$ ,  $n=1 \times 10^{10}$ ,  $r=12$ ,  $t=5$ 。仿真结果如图8—图10所示,分析结果如表1所示。图8为利用斜率比较法准确地判断得到直线和曲线的过渡点示意图,图9为利用曲率极大值和斜率结合得到整体轮廓的初始逼近曲线示意图,图10为在最大误差处自适应增加一个新的关键点并重新插值,反复迭代直到满足精度的逼近曲线示意图。

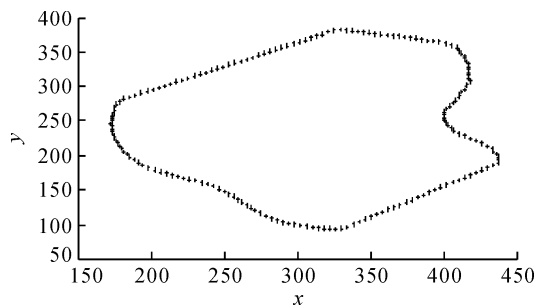


图7 原始离散点示意图

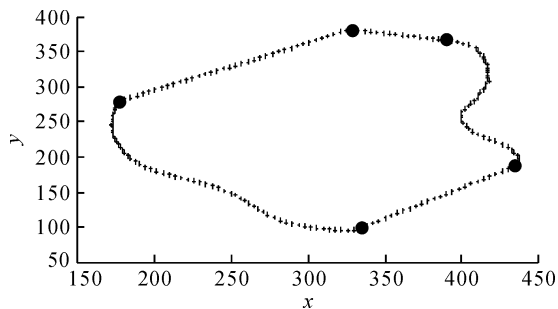


图8 直曲线过渡点示意图

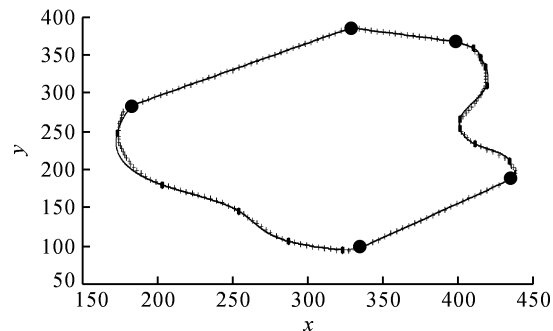


图9 初始逼近曲线示意图

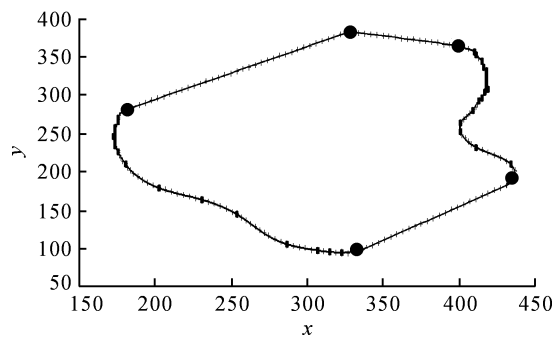


图10 改进后的逼近曲线示意图

表1 本文算法和传统算法参数比较结果

原始离散 点个数	逼近 精度	本文算法			传统算法		
		分段关键点数	分段迭代次数	算法时间/s	关键点数	迭代次数	算法时间/s
186	18.00	10,5	1,1	0.046941	82	1	0.152940
186	4.00	11,8	2,4	0.098641	83	2	0.262114
186	1.00	19,12	10,8	0.356701	91	10	1.266052
186	0.50	33,32	24,28	1.547886	112	31	4.293833
186	0.30	35,42	26,38	2.188056	136	56	8.700903
186	0.10	43,52	34,48	3.330162	166	85	15.012498
186	0.08	45,43	36,49	3.605626	170	90	16.333745

#### 3.2 应用举例 2

图11中的数据点集共包含165个原始离散点。实验参数取值为 $m=0.25$ ,  $n=1 \times 10^{10}$ ,  $r=12$ ,  $t=5$ 。仿真结果如图12—图14所示,分析结果如表2所示。图12为利用斜率比较法准确地判断得到直

线和曲线的过渡点示意图,图13为利用曲率极大值和斜率结合得到整体轮廓的初始逼近曲线示意图,图14为在最大误差处自适应增加一个新的关键点并重新插值,反复迭代直到满足精度的逼近曲线示意图。

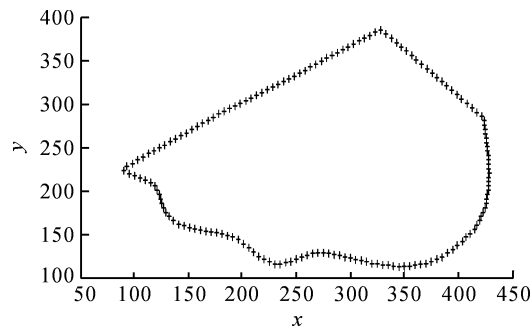


图 11 原始离散点示意图

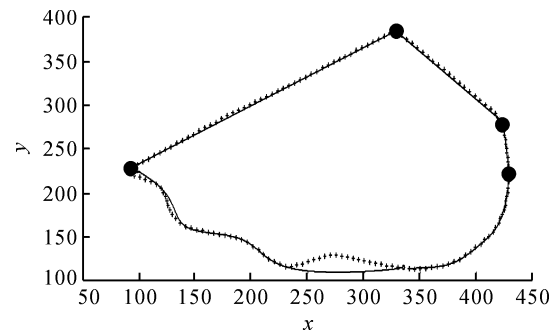


图 13 初始逼近曲线示意图

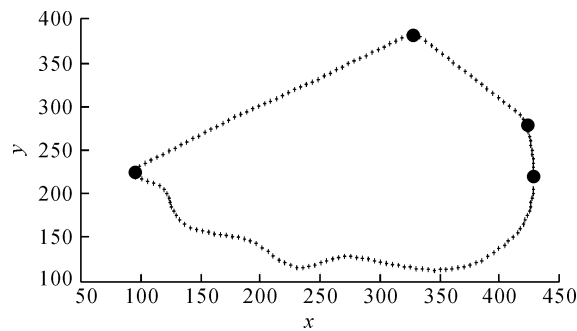


图 12 直线过渡点示意图

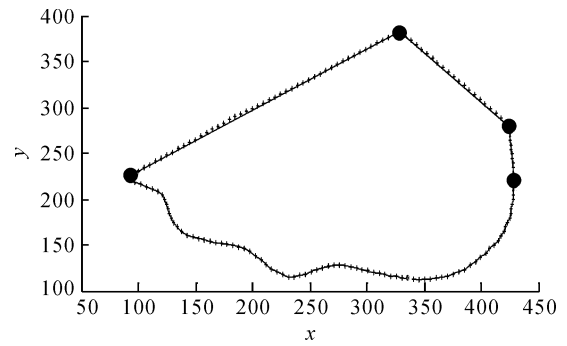


图 14 改进后的逼近曲线示意图

表 2 本文算法和传统算法参数比较结果

原始离散 点个数	逼近 精度	本文算法			传统算法		
		分段关键点数	分段迭代次数	算法时间/s	关键点数	迭代次数	算法时间/s
165	24.0	6, 8	1, 1	0.041472	64	1	0.231194
165	9.0	6, 10	1, 3	0.067429	66	3	0.332934
165	5.0	8, 12	3, 5	0.130683	68	5	0.522312
165	1.0	15, 23	10, 16	0.535429	85	22	2.469137
165	0.7	23, 34	18, 27	1.214205	94	31	3.655856
165	0.4	24, 41	19, 34	1.645595	121	58	7.878063
165	0.1	28, 51	23, 44	2.453527	148	85	13.358331

由表 1 和表 2 分析可得,在相同的逼近精度条件下,本文算法采取分段拟合的思想,相比于传统算法,在计算效率和计算时间方面得到了有效地提高。

## 4 结 语

非均匀有理 B 样条(NURBS)曲线的形状可以由少数的关键点大致描述。因此对于任意形状的样条曲线,本文算法在准确判断出直线和曲线的过渡点的前提下,对直线采取最小二乘法进行直线拟合,对曲线寻找出最合适的若干个关键点后进行曲线逼近,并不断增加关键点、提高轮廓的逼近精度。本文采取了多组数据进行了仿真实验,验证了该算法的有效性和可靠性。本算法为后续的数控加工提供了可靠的

理论依据,并为后期的加工优化奠定了良好的基础。

## 参考文献:

- [1] 方晨曦,叶佩青. 面向高速高精加工的高性能数控系统展望[J]. 航空制造技术,2014,18(3):44-47.
- [2] WEN W G, JIAN K L, LUO S M. 2D numerical manifold method based on quartic uniform B-spline interpolation and its application in thin plate bending[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2013, 34(8): 1017-1030.
- [3] 彭小军. 曲线曲面的 NURBS 造型技术与数控仿真[D]. 西安:长安大学,2013:11-54.
- [4] 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条[M]. 北京:高等教育出版社,2013:378-381.



- [5] 黄丽琴,潘日晶. 基于切矢控制的 B 样条曲线逼近的 PIA 算法[J]. 福建师范大学学报,2015,31(2):32-41.
- [6] 段振云,王宁,杨旭,等. 一种改进 B 样条曲线拟合算法研究[J]. 机械设计与制造,2016(5):17-23.
- [7] 金伟,刘志杰,景凤宣. 基于最小二乘逼近的 B 样条曲线插值法[J]. 贵州师范大学学报,2015,33(1):98-102.
- [8] 段振云,王宁,赵文辉,等. 一种一阶连续分段曲线拟合方法[J]. 组合机床与自动化加工技术,2016,5:29-35.
- [9] 韩江,江本赤,夏链,等. 基于轮廓关键点的 B 样条曲线拟合算法[J]. 应用数学和力学,2015,36(4):423-431.
- [10] 江本赤,韩刚. 一种面向密集数据点的 B 样条曲线逼近算法[J]. 陕西理工学院学报,2015,31(1):58-61.
- [11] 江本赤,韩江,夏链. B 样条曲线逼近偏差的精确求解算法[J]. 制造技术与机床,2015(7):67-70.

## Research on Curve Fitting Based on Straight Curve Judgment

YANG Liangliang<sup>1</sup>, HU Xinjie<sup>1</sup>, WANG Xiufeng<sup>2</sup>

(1. Faculty of Mechanical Engineering & Automation, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China;

2. Hangzhou Qixin Robot Science & Technology Co., Ltd, Hangzhou 310012, China)

**Abstract:** Aiming at the problem of slow speed and low precision of arbitrary shape in NC machining, a non-uniform rational B-spline curve adaptive approximation method based on straight curve judgement is proposed. The method first obtains the transition point of the straight line and the curve, and in accordance with the order of discrete points to determine the straight line or curve. In the case of a straight line, the straight line is fitted by the least squares method. If the curve, using the combination of curvature and slope method to find the curvature of the maximum point, as a key point interpolation non-uniform rational B-spline curve. Using the De Boer recursion formula to find out the control points, generating the initial interpolation curve. And then find out error between all the original discrete points and the corresponding points on the initial interpolation curve. If the maximum error does not meet the given requirement, then the maximum error in the adaptive increase of a key to form a new interpolation curve. Repeatedly iterate until the maximum error satisfies the given error conditions. Compare with the traditional algorithm, the method can meet the specified accuracy requirements faster. Experiments show that the method can not only get the minimum number of control points, but also has the characteristics of fast speed and high precision.

**Key words:** non-uniform rational B-spline; curve approximation; straight line or curve; adaptive

(责任编辑:康 锋)