浙江理工大学学报(自然科学版),第 37 卷,第 1 期,2017 年 1 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University (Natural Sciences)
Vol. 37, No. 1, Jan. 2017

DOI:10.3969/j.issn.1673-3851.2017.01.016

多重模糊蕴涵关于三角模的分配性

李 芳,裴道武

(浙江理工大学理学院,杭州 310018)

摘 要: 通过对模糊蕴涵进行多重迭代可以得到新的模糊蕴涵,新蕴涵保持原蕴涵的许多性质。主要讨论这些模糊蕴涵满足相互交换律,以及一些与分配律相关的逻辑重言式,给出了这些重言式成立的充分必要条件。这些结论进一步表明了多重迭代方法生成新蕴涵的优点,为模糊蕴涵在其它领域的应用有一定的指导意义。

关键词: 模糊逻辑;模糊蕴涵;多重模糊蕴涵;分配律;相互交换律

中图分类号: O221;F272.3　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1673-3851 (2017) 01-0099-05

0 引 言

模糊蕴涵是模糊逻辑的重要组成部分之一,它在很多领域都有非常重要的作用,如图像处理、模糊控制、数据挖掘等[1-4]。

通过对模糊蕴涵进行多重迭代或多重组合,可以得到新的模糊蕴涵。本文主要研究这些蕴涵的性质,以及这些蕴涵关于一些逻辑重言式成立的充分必要条件。

常见的逻辑重言式有以下几个:

$$I(T(x,y),z) = I(x,I(y,z)) \tag{1}$$

$$I(S(x,y),z) = T(I(x,y),I(y,z)) \tag{2}$$

$$I(T(x,y),z) = S(I(x,z),I(y,z)) \tag{3}$$

$$I(x,T_1(y,z)) = T_2(I(x,y),I(x,z)) \tag{4}$$

$$I(x,S_1(y,z)) = S_2(I(x,y),I(x,z)) \tag{5}$$

其中:T、T_1、T_2 为 t-模,S、S_1、S_2 为 t-余模,I 为蕴涵,上述 5 个重言式的含义请参阅 Zhang 等[1] 的研究。

1 多重蕴涵的交换原则

本节介绍本文相关内容的一些知识。本文中 $\boldsymbol{U} = [0,1]$。

定义 1[2] 如果 $\boldsymbol{U}$ 上的二元运算 T 满足交换律、结合律、单调性,并且以 1 为单位元,则称其为三角模,简称 t-模。

定义 2[2] 如果 $\boldsymbol{U}$ 上的二元运算 S 满足交换律、结合律、单调性,并且以 0 为单位元,则称其为三角余模,简称 t-余模。

t-模、t-余模有很多种,但是幂等 t-模和 t-余模分别只有下面介绍的取小运算 T_M 和取大运算 S_M:

$$T_M(x,y) = \min(x,y), S_M(x,y) = \max(x,y)。$$

更多性质可参阅 Klement 等[2] 的研究。

定义 3[3] 如果 $\boldsymbol{U}$ 上的二元运算 I 关于第一变元不增,关于第二变元不减,并且满足以下边界条件:

$$I(0,0) = I(0,1) = I(1,1) = 1, I(1,0) = 0,$$

则称其为模糊蕴涵,简称为蕴涵。

一些特殊类型的蕴涵 I 和 J,还满足以下一些性质:

a) 左单位元(NP):$I(1,y) = y, y \in U$;

b) 交换原则(EP):$I(x,I(y,z)) = I(y,I(x,z))$,$x$、$y$、$z \in \boldsymbol{U}$;

c) 相互交换律(ME):$I(x,J(y,z)) = J(y,I(x,z))$,

收稿日期:2016-05-12　　网络出版日期:2016-12-09

基金项目:国家自然科学基金项目(11171308,61379018,61472471)

作者简介:李 芳(1992-),女,安徽宿州人,硕士研究生,主要从事模糊数学方面的研究。

通信作者:裴道武,E-mail:peidw@163.com

x、y、$z\in\boldsymbol{U}$。

相互交换律(ME)是交换原则(EP)的推广。关于具有上述性质的模糊蕴涵的进一步研究可参阅 Vemuri 等[4] 的研究。

因为模糊蕴涵关于第一变量递减,所以关于第二变量递增可以证得以下结论。

定理 1[1] 设 I 为模糊蕴涵,则对任意 x、y、$z\in$ $\boldsymbol{U}$,以下结论成立:

a) $I(\min(x,y),z)=\max(I(x,z),I(y,z))$;

b) $I(x,\min(y,z))=\min(I(x,y),I(x,z))$.

受 Vemuri 等[5] 的启发,本文通过多个蕴涵逐次迭代生成新的蕴涵,即有定义 4。

定义 4 设$\{I_1,I_2,\cdots,I_n\}$为 n 个模糊蕴涵构成的集合,对其进行 n 重组合,得到的算子称为由$\{I_1,I_2,\cdots,I_n\}$生成的多重模糊算子,即:

$$J_{I_1,I_2,\cdots,I_n}(x,y)=I_1(x,I_2(x,I_3(x,\cdots,I_n(x,y)\cdots))),\quad x、y\in\boldsymbol{U}.$$

特别地,当 $I=I_1=I_2=\cdots=I_n$ 时,记 $F_I^n=J_{I_1,I_2,\cdots,I_n}$,称之为由 I 生成的 n 重模糊算子。如果算子是蕴涵,则称之为由$\{I_1,I_2,\cdots,I_n\}$生成的多重蕴涵。同理,若算子 F_I^n 是蕴涵,则称其为由 I 生成的 n 重蕴涵。

由定义 3 可知,当$\{I_1,I_2,\cdots,I_n\}$都是蕴涵时,对其进行多重迭代而得到的模糊算子 $J_{I_1,I_2,\cdots,I_n}$ 也是蕴涵。

定理 2 设 $I,I_1,I_2,\cdots,I_n$ 为蕴涵,则:

a) 当 I 满足(EP)时,F_I^n 也满足(EP);

b) 当 $I_1,I_2,\cdots,I_n$ 两两都满足(ME)时,$J_{I_1,I_2,\cdots,I_n}$ 满足(EP)。

证明:对任意 x、y、$z\in\boldsymbol{U}$,

a) 取 $n=2$,当 I 满足(EP)时,$I(x,I(y,z))=I(y,I(x,z))$,于是

$$\begin{aligned}F_I^2(x,F_I^2(y,z))&=I(x,I(x,I(y,I(y,z))))\\&=I(x,I(y,I(x,I(y,z))))\\&=I(y,I(y,I(x,I(x,z))))\\&=F_I^2(y,F_I^2(x,z))。\end{aligned}$$

这表明 F_I^2 满足(EP)。由归纳法可知 F_I^n 也满足(EP);

b) 由 Vemuri 等[5] 的研究可知,当 $n=2$,且 I_1、I_2 满足(ME)时,J_{I_1,I_2} 满足(EP);

令 $n=3$,当 I_1、I_2、I_3 满足(ME)时,

$$I_1(x,J_{I_2,I_3}(y,z))=J_{I_2,I_3}(y,I_1(x,z)),$$

$$J_{I_1,I_2}(x,J_{I_1,I_2}(y,z))=J_{I_1,I_2}(y,J_{I_1,I_2}(x,z)),$$

因此:

$$\begin{aligned}&J_{I_1,I_2,I_3}(x,J_{I_1,I_2,I_3}(y,z))\\&=J_{I_1,I_2,I_3}(x,I_1(y,J_{I_2,I_3}(y,z)))\\&=I_1(x,J_{I_2,I_3}(x,I_1(y,J_{I_2,I_3}(y,z))))\\&=I_1(x,I_1(y,J_{I_2,I_3}(x,J_{I_2,I_3}(y,z))))\\&=I_1(x,I_1(y,J_{I_2,I_3}(y,J_{I_2,I_3}(x,z))))\\&=I_1(y,J_{I_2,I_3}(y,I_1(x,J_{I_2,I_3}(x,z))))\\&=J_{I_1,I_2,I_3}(y,J_{I_1,I_2,I_3}(x,z)).\end{aligned}$$

这表明 $n=3$ 时结论成立,由数学归纳法可知,当 n 为任意正整数时,$J_{I_1,I_2,\cdots,I_n}$ 也满足(EP)。□

定义 5 设$\{I_1,I_2,\cdots,I_n\}$为 n 个蕴涵构成的集合,当其中任意两个蕴涵都满足(ME)时,称该集合为(ME)蕴涵族。

2 多重蕴涵关于 $t-$模及 $t-$余模的分配性

命题 1 当(ME)蕴涵族$\{I_1,I_2,\cdots,I_n\}$关于 t－模 T 满足等式(1)时,蕴涵 $J_{I_1,I_2,\cdots,I_n}$ 也满足等式(1)。

证明:对任意 x、$y\in U$,由 Vemuri 等[5] 的研究可知,当 $n=2$ 时,如果 I_1、I_2 关于 t－模 T 满足等式(1)和(ME),则 J_{I_1,I_2} 也满足等式(1);当 $n=3$ 时,若(ME)蕴涵族$\{I_1,I_2,I_3\}$关于 t－模 T 满足(1)式,则:

$$I_1(x,J_{I_2,I_3}(y,z))=J_{I_2,I_3}(y,I_1(x,z)),$$

$$J_{I_1,I_2}(T(x,y),z)=J_{I_1,I_2}(x,J_{I_1,I_2}(y,z)),$$

从而:

$$\begin{aligned}&J_{I_1,I_2,I_3}(T(x,y),z)\\&=I_1(T(x,y),J_{I_2,I_3}(T(x,y),z))\\&=I_1(T(x,y),J_{I_2,I_3}(x,J_{I_2,I_3}(y,z)))\\&=I_1(x,I_1(y,J_{I_2,I_3}(x,J_{I_2,I_3}(y,z))))\\&=I_1(x,J_{I_2,I_3}(x,I_1(y,J_{I_2,I_3}(y,z))))\\&=J_{I_1,I_2,I_3}(x,J_{I_1,I_2,I_3}(y,z)),\end{aligned}$$

这表明 $n=3$ 时结论成立,进一步,由数学归纳法可以证得,当 n 为任意正整数时结论同样成立。□

如果$\{I_1,I_2,\cdots,I_n\}$不是(ME)蕴涵族,则命题 1 不再成立,反例如下。

例 1 设 t－模 T,蕴涵 I_1 和 I_2 分别为:

$$T(x,y)=\min(x,y),$$

$$I_1(x,y)=\min(1,1-x+y),$$

$$I_2(x,y)=1-x+xy,$$

则 I_1 和 I_2 关于 T 满足等式(1)。但是,如果取 $x=\frac{3}{5}$,$y=\frac{4}{5}$,$z=\frac{1}{4}$,则:

$$I_1(x,I_2(y,z))=\frac{4}{5},I_2(y,I_1(x,z))=\frac{18}{25}.$$

这表明 I_1 和 I_2 不满足(ME),因为:

$J_{I_1,I_2}(T(x,y),z)=\frac{19}{25}$，$J_{I_1,I_2}(x,J_{I_1,I_2}(y,z))=1$，

这表明 J_{I_1,I_2} 不满足等式(1)。□

命题 2　取 $I_1,I_2,\cdots,I_n$ 为值域为 $\boldsymbol{U}$ 的模糊蕴涵，且关于 t－模 T 和 t－余模 S 满足等式(2)，则 $J_{I_1,I_2,\cdots,I_n}$ 满足等式(2)的充分必要条件为 $T=T_M$ 且 $S=S_M$。

证明：对 x、$y\in\boldsymbol{U}$，考虑当 $n=2$ 的情形。

必要性。由 J_{I_1,I_2} 的定义及 I_1 和 I_2 满足等式(2)可得：

$$\begin{aligned}J_{I_1,I_2}(S(x,y),z)&=I_1(S(x,y),I_2(S(x,y),z))\\&=I_1(S(x,y),T(I_2(x,z),I_2(y,z)))\\&=T(I_1(x,T(I_2(x,z),I_2(y,z))),\\&\qquad I_1(y,T(I_2(x,z),I_2(y,z)))),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&T(J_{I_1,I_2}(x,z),J_{I_1,I_2}(y,z))\\&=T(I_1(x,I_2(x,z)),I_1(y,I_2(y,z))).\end{aligned}$$

再由 J_{I_1,I_2} 满足等式(2)可得：

$$\begin{aligned}&T(I_1(x,T(I_2(x,z),I_2(y,z))),\\&\quad I_1(y,T(I_2(x,z),I_2(y,z))))\\&=T(I_1(x,I_2(x,z)),I_1(y,I_2(y,z))),\end{aligned}$$

当 $x=y$ 时，

$$\begin{aligned}&T(I_1(x,T(I_2(x,z),I_2(x,z))),\\&\quad I_1(x,T(I_2(x,z),I_2(x,z))))\\&=T(I_1(x,I_2(x,z)),I_1(x,I_2(x,z))),\end{aligned}$$

由 t－模 T 关于第二个变元是递增的，I_1 关于第二个变元也是递增的，所以当且仅当 $I_1(x,T(I_2(x,z),I_2(x,z)))=I_1(x,I_2(x,z))$ 时上式成立，因为 I_1 关于第二个变元是递增的，从而 $T(I_2(x,z),I_2(x,z))=I_2(x,z)$。取 $k=I_2(x,z)$，因为 I_2 的值域为$[0,1]$，从而 $k\in[0,1]$。综上可得，对任意 $k\in[0,1]$，$T(k,k)=k$，从而 $T=T_M$。

当 $T=T_M$ 时，由定理 1 可得 $S=S_M$。

充分性。当 $T=T_M$，$S=S_M$ 时，由定理 1 可知，

$$\begin{aligned}&J_{I_1,I_2}(S(x,y),z)=J_{I_1,I_2}(\max(x,y),z)\\&=\min(J_{I_1,I_2}(x,z),J_{I_1,I_2}(y,z))\\&=T(J_{I_1,I_2}(x,z),J_{I_1,I_2}(y,z)),\end{aligned}$$

因此等式(2)当 $n=2$ 时成立。由 $J_{I_1,I_2,\cdots,I_n}$ 的结构形式可知，当 n 为一般正整数时，等式(2)也成立。□

当 t－模不是 $T_M(x,y)=\min(x,y)$ 时，命题 1 不一定成立，反例如下。

例 2　取 I_1 为 Kleene-Dienes 蕴涵，I_2 为 Godel 蕴涵。即：

$$I_1(x,y)=\max(1-x,y),I_2(x,y)=\begin{cases}1 & x\leqslant y\\ y & x\geqslant y\end{cases}.$$

再取 $x=\frac{3}{5}$，$y=\frac{2}{5}$，$z=\frac{1}{5}$.

a) 当 $T_M(x,y)=\min(x,y)$，$S_M(x,y)=\max(x,y)$ 时，

$$J_{I_1I_2}(S(x,y),z)=\frac{2}{5},T(J_{I_1,I_2}(x,z),J_{I_1,I_2}(y,z))=\frac{2}{5},$$

故 J_{I_1,I_2} 满足等式(2)。

b) 当 $T_M(x,y)=xy$，$S_M(x,y)=\max(x,y)$ 时，

$$J_{I_1,I_2}(S(x,y),z)=\frac{2}{5},T(J_{I_1,I_2}(x,z),J_{I_1,I_2}(y,z))=\frac{6}{25},$$

因此 J_{I_1,I_2} 不满足等式(2)。

命题 3　设 T 为 t－模，S 为 t－余模，$I_1,I_2,\cdots,I_n$ 为关于 T 和 S 满足等式(3)的值域为 $\boldsymbol{U}$ 的模糊蕴涵，则 $J_{I_1,I_2,\cdots,I_n}$ 满足等式(3)的充分必要条件是 $T=T_M$ 且 $S=S_M$。

证明：对 x、$y\in\boldsymbol{U}$，考虑 $n=2$ 的情形。

必要性。由 J_{I_1,I_2} 的定义及 I_1,I_2 满足等式(3)可得：

$$\begin{aligned}J_{I_1,I_2}(T(x,y),z)&=I_1(T(x,y),I_2(T(x,y),z))\\&=I_1(T(x,y),S(I_2(x,z),I_2(y,z)))\\&=S(I_1(x,S(I_2(x,z),I_2(y,z))),\\&\qquad I_1(y,S(I_2(x,z),I_2(y,z)))),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&S(J_{I_1,I_2}(x,z),J_{I_1,I_2}(y,z))\\&=S(I_1(x,I_2(x,z)),I_1(y,I_2(y,z))),\end{aligned}$$

再由 J_{I_1,I_2} 满足等式(3)可得：

$$\begin{aligned}&S(I_1(x,S(I_2(x,z),I_2(y,z))),\\&\quad I_1(y,S(I_2(x,z),I_2(y,z))))\\&=S(I_1(x,I_2(x,z)),I_1(y,I_2(y,z))).\end{aligned}$$

当 $x=y$ 时，

$$\begin{aligned}&S(I_1(x,S(I_2(x,z),I_2(x,z))),\\&I_1(x,S(I_2(x,z),I_2(x,z))))\\&=S(I_1(x,I_2(x,z)),I_1(x,I_2(x,z))).\end{aligned}$$

因此 t－余模 S 关于第二个变元递增，I_1 关于第二个变元也是递增的，所以当且仅当 $I_1(x,S(I_2(x,z),I_2(x,z)))=I_1(x,I_2(x,z))$ 时上式成立，再由 I_1 关于第二个变元是递增的，可知，$S(I_2(x,z),I_2(x,z))=I_2(x,z)$。取 $k=I_2(x,z)$，因为 I_2 的值域为$[0,1]$，故 $k\in[0,1]$，综上可得对任意 $k\in[0,1]$，有 $S(k,k)=k$，从而 $S=S_M$，

当 $S=S_M$ 时，由定理 1 可得 $T=T_M$。

充分性。当 $T=T_M$ 且 $S=S_M$ 时，由定理 1 可

知，

$$J_{I_1,I_2}(T(x,y)z)=J_{I_1,I_2}(\min(x,y),z)$$
$$=\max(J_{I_1,I_2}(x,z),J_{I_1,I_2}(y,z))$$
$$=S(J_{I_1,I_2}(x,z),J_{I_1,I_2}(y,z)),$$

因此等式(3)当 $n=2$ 时成立，由 $J_{I_1,I_2,\cdots,I_n}$ 的结构形式可知，当 n 为一般正整数时，等式(3)也成立。□

定理 3[1] a) 设 T_1 和 T_2 为 t－模，若模糊蕴涵 I 满足(NP)，且关于 t－模 T_1 和 T_2 满足等式(4)，则 $T_1=T_2$；

b) 设 S_1 和 S_2 为 t－余模，若模糊蕴涵 I 满足(NP)，且关于 t－余模 S_1 和 S_2 满足等式(5)，则 $S_1=S_2$。

若模糊蕴涵满足(NP)，则等式(4)、(5)分别具有下述形式：

$$I(x,T(y,z))=T(I(x,y),I(x,z)) \tag{6}$$

$$I(x,S(y,z))=S(I(x,y),I(x,z)) \tag{7}$$

下面分析等式(6)和(7)的情形。

命题 4 若模糊蕴涵 $I_1,I_2,\cdots,I_n$ 关于 t－模 T 满足等式(6)(n 大于 1)，则 $J_{I_1,I_2,\cdots,I_n}$ 关于 t－模 T 也满足等式(6)。

证明：对任意 x、y、$z\in \boldsymbol{U}$，当 $n=2$ 时，由 I_1,I_2 关于 t－模 T 满足等式(6)可知：

$$J_{I_1,I_2}(x,T(y,z))=I_1(x,I_2(x,T(y,z)))$$
$$=I_1(x,T(I_2(x,y),I_2(x,z)))$$
$$=T(I_1(x,I_2(x,y)),I_1(x,I_2(x,z)))$$
$$=T(J_{I_1,I_2}(x,y),J_{I_1,I_2}(x,z)),$$

这表明 $n=2$ 时结论成立。进一步，如果命题结论当 $n=k$ 时成立，则：

$$J_{I_1,I_2,\cdots,I_k}(x,T(y,z))$$
$$=T(J_{I_1,I_2,\cdots,I_k}(x,y),J_{I_1,I_2,\cdots,I_k}(x,z)),$$

因此当 $n=k+1$ 时，

$$J_{I_1,I_2,\cdots,I_k,I_{k+1}}(x,T(y,z))$$
$$=J_{I_1,I_2,\cdots,I_k}(x,I_{k+1}(x,T(y,z)))$$
$$=J_{I_1,I_2,\cdots,I_k}(x,T(I_{k+1}(x,y),I_{k+1}(x,z)))$$
$$=T(J_{I_1,I_2,\cdots,I_k,I_{k+1}}(x,y),J_{I_1,I_2,\cdots,I_k,I_{k+1}}(x,z)).$$

由数学归纳法可知，命题的结论成立。□

命题 5 若模糊蕴涵 $I_1,I_2,\cdots,I_n$ 关于 t－余模 S 满足等式(7)(n 大于 1)，则 $J_{I_1,I_2,\cdots,I_n}$ 关于 t－余模 S 也满足等式(7)。

证明：对任意 x、y、$z\in \boldsymbol{U}$，当 $n=2$ 时，由 I_1,I_2 关于 t－余模 S 满足等式(7)可知，

$$J_{I_1,I_2}(x,S(y,z))=I_1(x,I_2(x,S(y,z)))$$
$$=I_1(x,S(I_2(x,y),I_2(x,z)))$$
$$=S(I_1(x,I_2(x,y)),I_1(x,I_2(x,z)))$$
$$=S(J_{I_1,I_2}(x,y),J_{I_1,I_2}(x,z)),$$

这表明 $n=2$ 时结论成立。进一步，如果命题结论当 $n=k$ 时成立，则：

$$J_{I_1,I_2,\cdots,I_k}(x,S(y,z))$$
$$=S(J_{I_1,I_2,\cdots,I_k}(x,y),J_{I_1,I_2,\cdots,I_k}(x,z)),$$

从而当 $n=k+1$ 时，

$$J_{I_1,I_2,\cdots,I_k,I_{k+1}}(x,S(y,z))$$
$$=J_{I_1,I_2,\cdots,I_k}(x,I_{k+1}(x,S(y,z)))$$
$$=J_{I_1,I_2,\cdots,I_k}(x,S(I_{k+1}(x,y),I_{k+1}(x,z)))$$
$$=S(J_{I_1,I_2,\cdots,I_k,I_{k+1}}(x,y),J_{I_1,I_2,\cdots,I_k,I_{k+1}}(x,z)).$$

由数学归纳法可知命题的结论成立。□

注：当 $I=I_1=I_2=\cdots=I_n$ 时，由 F_I^n 为 $J_{I_1,I_2,\cdots,I_n}$ 的特例可知，以上关于 $J_{I_1,I_2,\cdots,I_n}$ 的命题及定理对 F_I^n 同样成立。

3 结 语

本文对由模糊蕴涵 $\{I_1,I_2,\cdots,I_n\}$ 进行多重迭代得到的模糊蕴涵 $J_{I_1,I_2,\cdots,I_n}$ 的相互交换律进行了研究，并通过数学归纳法对它们在一些逻辑重言式上的性质进行了分析，得到若干重言式成立的充分必要条件。本文的工作对模糊蕴涵在近似推理[6-7]和模糊控制等领域有一定的实用价值，关于其具体应用将另做研究。

参考文献：

[1] ZHANG F X, LIU H W. On a new class of implication: (g, u)-implications and the distributive equations [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2013, 54(8): 1049-1065.

[2] KLEMENT E P, MESIAR R, PAP E. Triangular Norms [M]. Dordrecht: Kluwer, 2000: 1-13.

[3] BACZYNSKI M, JAYARAM B. Fuzzy Implications [M]. Heidelberg: Springer, 2008: 1-25.

[4] VEMURI N R. Mutually exchangeable fuzzy implications [J]. Information Sciences, 2015, 317(C): 1-24.

[5] VEMURI N R, JAYARAM B. The ○-composition of fuzzy implications: Closures with respect to properties, powers and families [J]. Fuzzy Set and Systems, 2015, 275: 58-87.

[6] 裴道武. 模糊推理的基本理论[J]. 高校应用数学学报, 2012, 27(3): 340-350.

[7] 裴道武. 基于三角模的模糊逻辑理论及其应用[M]. 科学出版社, 2013: 220-330.

Distributivity of Multiple Fuzzy Implications about Triangle Module

LI Fang, *PEI Daowu*

(School of Sciences, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: Some new fuzzy implications can be gained by multiple iterations of fuzzy implications. The new fuzzy implications maintain many properties of original implications. In this paper, based on the multiple fuzzy implications, we mainly discuss the mutual exchange law and logical tautologies about distribution. Some necessary and sufficient conditions are given for these logical tautologies. These results will further indicate the advantages of new implications generated by multiple iterations and have certain guidance significance for application of fuzzy implications in related fields.

Key words: fuzzy logic; fuzzy implication; multiple fuzzy implication; distributive law; mutual exchange law

(责任编辑:康　锋)