浙江理工大学学报(自然科学版),第 35 卷,第 6 期,2016 年 11 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University (Natural Sciences)
Vol. 35, No. 6, Nov. 2016

DOI:10.3969/j.issn.1673-3851.2016.11.024

拟齐次平面多项式系统的逆积分因子

韩美佳,黄土森
(浙江理工大学理学院,杭州 310018)

摘　要: 逆积分因子是研究平面多项式系统可积性问题的重要工具。对于拟齐次多项式系统,利用广义 Euler 定理证明了它一定存在多项式逆积分因子,并给出了具体表达式;对于由两个拟齐次多项式系统的和所定义的多项式系统,给出存在多项式逆积分因子的一个充分条件,并由此给出几类特殊多项式系统的逆积分因子的计算公式。给出的几个多项式逆积分因子计算例子表明这些结论推广了已有成果。

关键词: 拟齐次多项式系统;多项式逆积分因子;拟齐次分解

中图分类号: O175.14　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1673-3851 (2016) 06-0939-06　　**引用页码:** 110801

0 引　言

平面自治微分系统可表示为:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=P(x,y),\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Q(x,y) \tag{1}$$

其中 P 和 Q 是一个从 $\mathbf{R}^2$ 的一个开集 $\boldsymbol{U}$ 到 $\mathbf{R}$ 的 C^r 映射,$r\geqslant 1$。令 $\boldsymbol{W}$ 是 $\boldsymbol{U}$ 的一个开子集。对于一个可微的非常值函数 V:

$$V:\boldsymbol{W}\rightarrow \mathbf{R}.$$

如果它满足一阶线性偏微分方程:

$$P(x,y)\frac{\partial V(x,y)}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial V(x,y)}{\partial y}=\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}\right)V(x,y) \tag{2}$$

则称 $V(x,y)$ 为系统(1) 的在 $\boldsymbol{W}$ 上的一个逆积分因子[1]。进一步,如果 $\boldsymbol{W}=\mathbf{R}^2$,且 $V:\mathbf{R}^2\rightarrow\mathbf{R}$ 还是一个多项式,则称 $V(x,y)$ 为系统(1) 的多项式逆积分因子。

系统(1) 的逆积分因子具有以下一些重要性质:

a)$V^{-1}(0)=\{(x,y)\in\boldsymbol{W}\mid V(x,y)=0\}$ 由系统(1) 的轨线组成[2-3]。

b)$R(x,y)=\dfrac{1}{V(x,y)}$ 是定义在 $\boldsymbol{W}\backslash V^{-1}(0)$ 上的积分因子[1],从而系统(1) 在 $\boldsymbol{W}\backslash V^{-1}(0)$ 上的首次积分为:

$$H(x,y)=-\int\frac{P(x,y)}{V(x,y)}\mathrm{d}y+\int\left(\frac{Q(x,y)}{V(x,y)}+\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{P(x,y)}{V(x,y)}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

c) 若系统(1) 在 $\boldsymbol{W}$ 上存在极限环 γ,则 $\gamma\subset V^{-1}(0)$[4];进一步,如果 $\boldsymbol{\Gamma}$ 是位于 $\boldsymbol{W}$ 中由鞍点与正则轨线组成的多环,则 $\boldsymbol{\Gamma}\subset V^{-1}(0)$[3]。

系统(1) 的这些性质表明:逆积分因子是研究可微平面系统的可积性问题[1,5]、中心问题[6-7] 和平面多项式系统极限环个数与分布问题[2,8] 的重要工具之一。一般而言,系统的逆积分因子的表达式比首次积分简单,定义域比首次积分的大[1]。因此,如何求得给定系统(1) 的逆积分因子对确定系统性态具有重要作用[9]。

然而,对于一个给定的系统,要判断它是否存在逆积分因子以及如何求它的逆积分因子十分困难[1]。已有研究仅对一些特殊形式的系统给出了逆积分因子的求法。例如:对于线性系统 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a_{11}x+a_{12}y,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=a_{21}x+a_{22}y$,总存在一个简单的逆积分因

收稿日期:2016－03－02
基金项目:浙江省自然科学基金项目(LY15A010021)
作者简介:韩美佳(1992－),女,山东青岛人,硕士研究生,主要从事微分方程定性理论方面的研究。

子 $V(x,y)=a_{21}x^2+(a_{22}-a_{11})xy-a_{12}y^2$[1]；如果系统(1)中的 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 是具有相同次数的实或复多项式，则多项式 $V(x,y)=yP(x,y)-xQ(x,y)$ 是其一个逆积分因子[1]；如果系统是一个二次多项式系统并且原点是一个中心，则总存在一个三次或五次多项式为它的逆积分因子[10]；如果在系统(1)中，$P(x,y)=-y+P_3(x,y)$，$Q(x,y)=x+Q_3(x,y)$，其中 $P_3(x,y)$ 与 $Q_3(x,y)$ 是三次齐次多项式，则总存在次数至多为十次的多项式逆积分因子[10]；Chavarriga等[11] 寻找当 $P(x,y)=-y+P_s(x,y)$，$Q(x,y)=x+Q_s(x,y)$，$s\geqslant 2$ 时，系统(1)的逆积分因子；当系统(1)为多项式系统时，Chavarriga等[12] 找到了其逆积分因子存在的必要条件；Walcher[13] 研究了多项式系统的多项式逆积分因子的结构；Ferragut[14] 研究了二次多项式系统的多项式逆积分因子的构造，并给出求多项式逆积分因子的5种常用方法；Al-Dosary [15]先给出平面可微系统存在逆积分因子的几个充分条件，再给出由两个齐次多项式系统的和所定义的多项式系统的多项式逆积分因子的构造；而 Hu[16] 把文献[15]中第一部分结果推广到高维系统。

本文首先给出拟齐次多项式系统的多项式逆积分因子的表达式；然后把文献[15]中由两个齐次多项式系统的和所定义的多项式系统推广到拟齐次的情形，给出存在多项式逆积分因子的一个充分条件，并由此给出几类特殊多项式系统的多项式逆积分因子的计算公式；最后给出例子以说明这些推广的实用性。

1 主要结果及其证明

考虑多项式系统：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=P(x,y),\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Q(x,y) \tag{3}$$

其中 P 和 Q 是含变量 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$ 的多项式，并且设原点是它的一个孤立奇点(即 P 和 Q 不含常数项且无公因式)。设 $\boldsymbol{t}=(t_1,t_2)$ 是不同时为零、互素的有序自然数对，且不妨设 $t_1\leqslant t_2$(否则只需交换 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 即可)。对于一个多项式 $f(x,y)$，如果存在自然数 k，对任意的实数使得 $f(\varepsilon^{t_1}x,\varepsilon^{t_2}y)=\varepsilon^k f(x,y)$，则称 $f(x,y)$ 是一个 $\boldsymbol{t}$ 型 k 次的拟齐次多项式。把全体 $\boldsymbol{t}$ 型 k 次的拟齐次多项式的集合记为 $\mathscr{P}_k$。对于系统(3)，如果 $P\in\mathscr{P}_{k+t_1}$ 且 $Q\in\mathscr{P}_{k+t_2}$，则称(3)为 $\boldsymbol{t}$ 型 k 次的拟齐次多项式系统。把全体 $\boldsymbol{t}$ 型 k 次的拟齐次多项式系统的集合记为 $\mathscr{Q}_k$。显然，如果 $\boldsymbol{t}=(1,1)$，则上面的拟齐次多项式与拟齐次多项式系统就是齐次多项式与齐次多项式系统。对于任意给定的 $\boldsymbol{t}=(t_1,t_2)$，利用牛顿图[17]，任意一个多项式系统都可以进行如下分解[16]：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=P(x,y)=\sum_{k=r}^{n}P^{t}_{k+t_1}(x,y),$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Q(x,y)=\sum_{k=r}^{n}Q^{t}_{k+t_2}(x,y) \tag{4}$$

其中：$P^t_{k+t_1}\in\mathscr{P}^t_{k+t_1}$，$Q^t_{k+t_2}\in\mathscr{P}^t_{k+t_2}$，并且 $(P^t_{i+t_1})^2+(Q^t_{i+t_2})^2\neq 0$，$i=r,\cdots,n$，$r\geqslant 1$。关于拟齐次多项式系统的其它一些性质可以参考文献[16]。

引理1 (广义 Euler 定理) 设 $f(x,y)$ 是 $\boldsymbol{t}$ 型 k 次的拟齐次多项式，则恒等式(5)成立。

$$t_1x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+t_2y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\equiv kf(x,y) \tag{5}$$

定理1 对于 t 型 k 次的拟齐次多项式系统：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=P^t_{k+t_1}(x,y),\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Q^t_{k+t_2}(x,y) \tag{6}$$

则它有多项式逆积分因子：

$$V(x,y)=t_1xQ^t_{k+t_2}(x,y)-t_2yP^t_{k+t_1}(x,y) \tag{7}$$

显然，$V(x,y)\in\mathscr{P}_{k+t_1+t_2}$。

证明 只需验证(7)满足(2)。实际上，因为：

$$\frac{\partial V}{\partial x}=t_1Q^t_{k+t_2}(x,y)+t_1x\frac{\partial Q^t_{k+t_2}(x,y)}{\partial x}-t_2y\frac{\partial P^t_{k+t_1}}{\partial x},$$
$$\frac{\partial V}{\partial y}=t_1x\frac{\partial Q^t_{k+t_2}}{\partial y}-t_2P^t_{k+t_1}(x,y)-t_2y\frac{\partial P^t_{k+t_1}(x,y)}{\partial y}.$$

又由引理1知，

$$t_1x\frac{\partial P^t_{k+t_1}(x,y)}{\partial x}+t_2y\frac{\partial P^t_{k+t_1}(x,y)}{\partial y}=(t_1+k)P^t_{k+t_1}(x,y),$$
$$t_1x\frac{\partial Q^t_{k+t_2}(x,y)}{\partial x}+t_2y\frac{\partial Q^t_{k+t_2}(x,y)}{\partial y}=(t_2+k)Q^t_{k+t_2}(x,y).$$

所以：

$$P^t_{k+t_1}(x,y)\frac{\partial V(x,y)}{\partial x}+Q^t_{k+t_2}(x,y)\frac{\partial V(x,y)}{\partial y}$$
$$=\left(\frac{\partial P^t_{k+t_1}(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial Q^t_{k+t_2}(x,y)}{\partial y}\right)V(x,y).$$

证毕。

文献[12]研究如下形式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=P(x,y)=\sum_{k=0}^{n}P_k(x,y),$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Q(x,y)=\sum_{k=0}^{n}Q_k(x,y) \tag{8}$$

的多项式系统存在多项式逆积分因子的必要条件，其中 $P_k(x,y)$ 和 $Q_k(x,y)$ 均为 k 次齐次多项式，$k=0,1,\cdots,n$。而文献[15]研究如下形式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = P(x,y) = P_n(x,y) + P_m(x,y),$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Q(x,y) = Q_n(x,y) + Q_m(x,y) \qquad (9)$$

的多项式系统存在多项式逆积分因子的充分条件，其中 $P_k(x,y)$ 和 $Q_k(x,y)$ 均为 k 次齐次多项式，$k=n,m$。本文把这些结论推广到多项式系统进行拟齐次分解的情形，即对任意给定的 $\boldsymbol{t}=(t_1,t_2)$，把系统(3)写成系统(4)的形式。因为系统(6)有形如

$$V(x,y) = (t_1x, -t_2y)\cdot(Q^t_{k+t_2}(x,y), P^t_{k+t_1}(x,y) \qquad (10)$$

的多项式逆积分因子，其中“•”表示内积，因此有理由假设式(4)有形如

$$V(x,y) = \sum_{k=r}^{n} C_k[(t_1x, -t_2y)\cdot(Q^t_{k+t_2}(x,y), P^t_{k+t_1}(x,y))] \qquad (11)$$

的多项式逆积分因子，其中 C_k 是待定常数，$k=r,\cdots,n$。为使系统(11)是系统(4)的多项式逆积分因子，只需把系统(11)代入系统(2)，并让等式两边的同次幂系数相等，得到关于待定常数 C_k 的代数方程组。一般地，这个代数方程组是超定的，这也表明系统(4)未必有多项式逆积分因子，但由此可以研究系统(4)存在具有形式为系统(11)的多项式逆积分因子的充分条件。现在本文利用这种方法研究形如

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = P(x,y) = P^t_{n+t_1}(x,y) + P^t_{m+t_1}(x,y),$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Q(x,y) = Q^t_{n+t_2}(x,y) + Q^t_{m+t_2}(x,y) \qquad (12)$$

的多项式系统存在多项式逆积分因子的充分条件，不妨设 $n\neq m$。

定理 2　对于系统(12)，如果存在实常数 $C_n \neq C_m$，满足

$$\frac{[C_n(n+t_1+t_2) - C_m(m+t_1+t_2)]}{C_m - C_n}(P^t_{m+t_1}Q^t_{n+t_2} - P^t_{n+t_1}Q^t_{m+t_2}) + \left(\frac{\partial P^t_{m+t_1}}{\partial x} + \frac{\partial Q^t_{m+t_2}}{\partial y}\right)(t_1xQ^t_{n+t_2} - t_2yP^t_{n+t_1}) - \left(\frac{\partial P^t_{n+t_1}}{\partial x} + \frac{\partial Q^t_{n+t_2}}{\partial y}\right)(t_1xQ^t_{m+t_2} - t_2yP^t_{m+t_1}) = 0.$$

则系统(12)有形如

$$V(x,y) = C_n[(t_1x, -t_2y)\cdot(Q^t_{n+t_2}, P^t_{n+t_1})] + C_m[(t_1x, -t_2y)\cdot(Q^t_{m+t_2}, P^t_{m+t_1})]$$

的多项式逆积分因子。

证明　记

$$V_n(x,y) = (t_1x, -t_2y)\cdot(Q^t_{n+t_2}, P^t_{n+t_1}),$$
$$V_m(x,y) = (t_1x, -t_2y)\cdot(Q^t_{m+t_2}, P^t_{m+t_1}),$$

则 $V(x,y) = C_nV_n(x,y) + C_mV_m(x,y)$。现只需要证明 $V(x,y)$ 满足系统(2)。因为：

$$\frac{\partial V_n}{\partial x} = t_1Q^t_{n+t_2} + t_1x\frac{\partial Q^t_{n+t_2}}{\partial x} - t_2y\frac{\partial P^t_{n+t_1}}{\partial x},$$
$$\frac{\partial V_n}{\partial y} = t_1x\frac{\partial Q^t_{n+t_2}}{\partial y} - t_2P^t_{n+t_1} - t_2y\frac{\partial P^t_{n+t_1}}{\partial y},$$
$$\frac{\partial V_m}{\partial x} = t_1Q^t_{m+t_2} + t_1x\frac{\partial Q^t_{m+t_2}}{\partial x} - t_2y\frac{\partial P^t_{m+t_1}}{\partial x},$$
$$\frac{\partial V_m}{\partial y} = t_1x\frac{\partial Q^t_{m+t_2}}{\partial y} - t_2P^t_{m+t_1} - t_2y\frac{\partial P^t_{m+t_1}}{\partial y},$$

并且由 $P^t_{n+t_1}$、$Q^t_{n+t_2}$、$P^t_{m+t_1}$ 与 $Q^t_{m+t_2}$ 的拟齐次性及广义 Euler 定理得：

$$t_1x\frac{\partial P^t_{n+t_1}}{\partial x} + t_2y\frac{\partial P^t_{n+t_1}}{\partial y} \equiv (n+t_1)P^t_{n+t_1},$$
$$t_1x\frac{\partial Q^t_{n+t_2}}{\partial x} + t_2y\frac{\partial Q^t_{n+t_2}}{\partial y} \equiv (n+t_2)Q^t_{n+t_2},$$
$$t_1x\frac{\partial P^t_{m+t_1}}{\partial x} + t_2y\frac{\partial P^t_{m+t_1}}{\partial y} \equiv (m+t_1)P^t_{m+t_1},$$
$$t_1x\frac{\partial Q^t_{m+t_2}}{\partial x} + t_2y\frac{\partial Q^t_{m+t_2}}{\partial y} \equiv (m+t_2)Q^t_{m+t_2},$$

所以：

$$(P^t_{n+t_1} + P^t_{m+t_1})C_n\frac{\partial V_n}{\partial x} = C_n(P^t_{n+t_1} + P^t_{m+t_1})\left[(n+t_1+t_2)Q^t_{n+t_2} - t_2y\left(\frac{\partial P^t_{n+t_1}}{\partial x} + \frac{\partial Q^t_{n+t_2}}{\partial y}\right)\right],$$
$$(P^t_{n+t_1} + P^t_{m+t_1})C_m\frac{\partial V_m}{\partial x} = C_m(P^t_{n+t_1} + P^t_{m+t_1})\left[(m+t_1+t_2)Q^t_{m+t_2} - t_2y\left(\frac{\partial P^t_{m+t_1}}{\partial x} + \frac{\partial Q^t_{m+t_2}}{\partial y}\right)\right],$$
$$(Q^t_{n+t_2} + Q^t_{m+t_2})C_n\frac{\partial V_n}{\partial y} = C_n(Q^t_{n+t_2} + Q^t_{m+t_2})\left[t_1x\left(\frac{\partial P^t_{n+t_1}}{\partial x} + \frac{\partial Q^t_{n+t_2}}{\partial y}\right) - (n+t_1+t_2)P^t_{n+t_1}\right],$$
$$(Q^t_{n+t_2} + Q^t_{m+t_2})C_m\frac{\partial V_m}{\partial y} = C_m(Q^t_{n+t_2} + Q^t_{m+t_2})\left[t_1x\left(\frac{\partial P^t_{m+t_1}}{\partial x} + \frac{\partial Q^t_{m+t_2}}{\partial y}\right) - (m+t_1+t_2)P^t_{m+t_1}\right],$$

而

$$\left(\frac{\partial P^t_{n+t_1}}{\partial x} + \frac{\partial Q^t_{n+t_2}}{\partial y}\right)C_nV_n = C_n\left(\frac{\partial P^t_{n+t_1}}{\partial x} + \frac{\partial Q^t_{n+t_2}}{\partial y}\right)(t_1xQ^t_{n+t_2} - t_2yP^t_{n+t_1}),$$
$$\left(\frac{\partial P^t_{n+t_1}}{\partial x} + \frac{\partial Q^t_{n+t_2}}{\partial y}\right)C_mV_m = C_m\left(\frac{\partial P^t_{n+t_1}}{\partial x} + \frac{\partial Q^t_{n+t_2}}{\partial y}\right)(t_1xQ^t_{m+t_2} - t_2yP^t_{m+t_1}),$$
$$\left(\frac{\partial P^t_{m+t_1}}{\partial x} + \frac{\partial Q^t_{m+t_2}}{\partial y}\right)C_nV_n = C_n\left(\frac{\partial P^t_{m+t_1}}{\partial x} + \frac{\partial Q^t_{m+t_2}}{\partial y}\right)$$

$(t_1xQ^t_{n+t_2}-t_2yP^t_{n+t_1}),\left(\frac{\partial P^t_{m+t_1}}{\partial x}+\frac{\partial Q^t_{m+t_2}}{\partial y}\right)C_mV_m=$

$C_m\left(\frac{\partial P^t_{m+t_1}}{\partial x}+\frac{\partial Q^t_{m+t_2}}{\partial y}\right)(t_1xQ^t_{m+t_2}-t_2yP^t_{m+t_1})$.

于是由定理2的假设得：

$$(P^t_{n+t_1}+P^t_{m+t_1})\left(C_n\frac{\partial V_n}{\partial x}+C_m\frac{\partial V_m}{\partial x}\right)+(Q^t_{n+t_2}+Q^t_{m+t_2})\left(C_n\frac{\partial V_n}{\partial y}+C_m\frac{\partial V_m}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial(P^t_{n+t_1}+P^t_{m+t_1})}{\partial x}+\frac{\partial(Q^t_{n+t_2}+Q^t_{m+t_2})}{\partial y}\right)(C_nV_n+C_mV_m)=$$

$$[C_n(n+t_1+t_2)-C_m(m+t_1+t_2)](P^t_{m+t_1}Q^t_{n+t_2}-P^t_{n+t_1}Q^t_{m+t_2})+(C_m-C_n)\left[\left(\frac{\partial P^t_{m+t_1}}{\partial x}+\frac{\partial Q^t_{m+t_2}}{\partial y}\right)(t_1xQ^t_{n+t_2}-t_2yP^t_{n+t_1})-\left(\frac{\partial P^t_{n+t_1}}{\partial x}+\frac{\partial Q^t_{n+t_2}}{\partial y}\right)(t_1xQ^t_{m+t_2}-t_2yP^t_{m+t_1})\right]=0.$$

证毕。

如果允许 $C_n=C_m$，则为使

$$V(x,y)=C_n[(t_1x,-t_2y)\cdot(Q^t_{n+t_2},P^t_{n+t_1})]+C_m[(t_1x,-t_2y)\cdot(Q^t_{m+t_2},P^t_{m+t_1})]$$

是系统(12)的多项式逆积分因子，则由于 $n\neq m$，因此

$$P_{m+t_1}Q_{n+t_2}-P_{n+t_1}Q_{m+t_2}=0$$

成立，即系统(12)的右边不是互素的，导致系统(12)的原点不是孤立奇点。

推论1 对于系统(12)，如果

$$\left(\frac{\partial P^t_{m+t_1}}{\partial x}+\frac{\partial Q^t_{m+t_2}}{\partial y}\right)(t_1xQ^t_{n+t_2}-t_2yP^t_{n+t_1})-\left(\frac{\partial P^t_{n+t_1}}{\partial x}+\frac{\partial Q^t_{n+t_2}}{\partial y}\right)(t_1xQ^t_{m+t_2}-t_2yP^t_{m+t_1})=0,$$

成立，则它存在多项式逆积分因子：

$$V(x,y)=(t_1x,-t_2y)\cdot(Q^t_{n+t_2},P^t_{n+t_1})+\frac{n+t_1+t_2}{m+t_1+t_2}[(t_1x,-t_2y)\cdot(Q^t_{m+t_2},P^t_{m+t_1})].$$

证明 只要在定理2中取 $C_n=1,C_m=\frac{n+t_1+t_2}{m+t_1+t_2}$ 即可。

推论2 对于系统

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y)=P^t_{1+t_1}(x,y)+P^t_{2+t_1}(x,y),$$

$$\frac{dy}{dt}=Q(x,y)=Q^t_{1+t_2}(x,y)+Q^t_{2+t_2}(x,y)\quad(13)$$

如果

$$\frac{[C_1(1+t_1+t_2)-C_2(2+t_1+t_2)]}{C_2-C_1}(P^t_{2+t_1}Q^t_{1+t_2}-P^t_{1+t_1}Q^t_{2+t_2})+\left(\frac{\partial P^t_{2+t_1}}{\partial x}+\frac{\partial Q^t_{2+t_2}}{\partial y}\right)(t_1xQ^t_{1+t_2}-t_2yP^t_{1+t_1})-\left(\frac{\partial P^t_{1+t_1}}{\partial x}+\frac{\partial Q^t_{1+t_2}}{\partial y}\right)(t_1xQ^t_{2+t_2}-t_2yP^t_{2+t_1})=0,$$

成立，其中 $C_1\neq C_2$ 是实常数，则它存在多项式逆积分因子

$$V(x,y)=C_1[(t_1x,-t_2y)\cdot(Q^t_{1+t_2},P^t_{1+t_1})]+C_2[(t_1x,-t_2y)\cdot(Q^t_{2+t_2},P^t_{2+t_1})]。$$

推论3 对于系统(13)，如果成立

$$\left(\frac{\partial P^t_{2+t_1}}{\partial x}+\frac{\partial Q^t_{2+t_2}}{\partial y}\right)(t_1xQ^t_{1+t_2}-t_2yP^t_{1+t_1})-\left(\frac{\partial P^t_{1+t_1}}{\partial x}+\frac{\partial Q^t_{1+t_2}}{\partial y}\right)(t_1xQ^t_{2+t_2}-t_2yP^t_{2+t_1})=0,$$

则它存在多项式逆积分因子

$$V(x,y)=(t_1x,-t_2y)\cdot(Q^t_{1+t_2},P^t_{1+t_1})+\frac{1+t_1+t_2}{2+t_1+t_2}[(t_1x,-t_2y)\cdot(Q^t_{2+t_2},P^t_{2+t_1})]。$$

2 例 子

本节给出两个例子说明本文定理的应用，以此说明本文的结果推广了文献[12, 15]中的结论。

例1 考虑系统

$$\frac{dx}{dt}=y^8+x^3y^6+x^6y^4,\frac{dy}{dt}=x^8y^3+x^{11}y\quad(14)$$

取 $t=(t_1,t_2)=(2,3)$，则 $y^8+x^3y^6+x^6y^4=P^t_{22+t_1}(x,y)$，$x^8y^3+x^{11}y=Q^t_{22+t_2}$，于是由定理2易得系统(14)存在多项式逆积分因子

$$V(x,y)=2x^9y^3+2x^{12}y-3y^9-3x^3y^7-3x^6y^5。$$

例2 取 $t=(t_1,t_2)=(2,3)$，考虑系统[17]

$$\frac{dx}{dt}=P^t_{22+t_1}(x,y)+P^t_{31+t_1}(x,y),$$

$$\frac{dy}{dt}=Q^t_{22+t_2}(x,y)+Q^t_{31+t_2}(x,y)\quad(15)$$

其中：

$P^t_{22+t_1}(x,y)=y^8+7x^3y^6-5x^6y^4+3x^9y^2-x^{12}$,

$P^t_{31+t_1}(x,y)=-10x^3y^9+8x^6y^7-6x^9y^5+4x^{12}y^3-2x^{15}y$,

$Q^t_{22+t_2}(x,y)=-3x^2y^7+6x^5y^5-9x^8y^3+12x^{11}y$,

$Q^t_{31+t_2}(x,y)=3x^2y^{10}-6x^5y^8+9x^8y^6-12x^{11}y^4+15x^{14}y^2+2x^{17}$.

因为

$$\left(\frac{\partial P^t_{31+t_1}}{\partial x}+\frac{\partial Q^t_{31+t_2}}{\partial y}\right)(t_1xQ^t_{22+t_2}-t_2yP^t_{22+t_1})-\left(\frac{\partial P^t_{22+t_1}}{\partial x}+\frac{\partial Q^t_{22+t_2}}{\partial y}\right)(t_1xQ^t_{31+t_2}-t_2yP^t_{31+t_1})=0,$$

所以由推论 1 知，系统(15)存在多项式逆积分因子：

$$V(x,y)=-3y^9-27x^3y^7+27x^6y^5-27x^9y^3+27x^{12}y-27x^3y^{10}+27x^6y^8-27x^9y^6+27x^{12}y^4-27x^{15}y^2-3x^{18}.$$

注意到，由于系统(14)和(15)都不是齐次系统，也不是形式(9)的系统，因此不能利用文献[12,15]中的结论求它们的多项式逆积分因子。

3　结　论

由于逆积分因子包含了微分方程系统的一些重要信息，因此它是研究可微平面系统的可积性问题、中心问题和平面多项式系统极限环个数与分布问题等定性理论中经典问题的重要工具之一。对于一个给定的多项式系统，要判断它是否存在逆积分因子，以及如果存在，如何求它的逆积分因子十分困难。而对于一个多项式系统，要判断它是否存在多项式逆积分因子、如果存在如何求出这样的逆积分因子就更困难。本文对于拟齐次多项式系统，证明了总存在多项式逆积分因子并给出了它的具体表达式；进而对于由两个拟齐次多项式系统的和所定义的多项式系统，通过假设逆积分因子的特定形式，给出存在多项式逆积分因子的一个充分条件，并由此给出几类特殊多项式系统的逆积分因子的计算公式；最后通过两个例子计算多项式逆积分因子以说明本文结果推广了已有成果。对存在多项式逆积分因子的多项式系统进行分类有待继续研究。

参考文献：

[1] CHAVARRIGA J, GIACOMINI H, GINE J, et al. On the integrability of two-dimensional flows[J]. Journal of Differential Equations, 1999, 157(1): 163-182.

[2] GIACOMINI H, LLIBREZ J, VIANO M. On the nonexistence, existence and uniqueness of limit cycles[J]. Nonlinearity, 1996, 9(2): 501-516.

[3] BERRONE L R, GIACOMINI H. On the vanishing set of inverse integrating factors[J]. Qualitative Theory of Dynamical Systems, 2000, 1(2): 211-230.

[4] GIACOMINI H, VIANO M. Determination of limit cycles for two-dimensional dynamical systems[J]. Physical Review E, 1995, 52(1): 222-228.

[5] CHAVARRIGA J, GIACOMINI H, GINE J, et al. Darboux integrability and the inverse integrating factor[J]. Journal of Differential Equations, 2003, 194(1): 116-139.

[6] GINE J. The nondegenerate center problem and the inverse integrating factor[J]. Bulletin Des Sciences Mathématimatiques, 2006, 130(2): 152-161.

[7] GINE J. On the centers of planar analytic differential systems[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering, 2007, 17(9): 3061-3070.

[8] GINE J, LLIBRE J. Integrability and algebraic limit cycles for polynomial differential systems with homogeneous nonlinearities[J]. Journal of Differential Equations, 2005, 197(2): 531-545.

[9] GARCIA I A, GRAU M. A survey on the inverse integrating factor[J]. Qualitative Theory of Dynamical Systems, 2010, 9(1): 115-166.

[10] CHAVARRIGA J. Integrable systems in the plane with a center type linear part[J]. Applicationes Mathematicae, 1994, 22(2): 285-309.

[11] CHAVARRIGA J, GINE J. Integrable systems via inverse integrating factor[J]. Extracta Mathematicae, 1998, 13(1): 41-60.

[12] CHAVARRIGA J, GIACOMINI H, GINE J. Polynomial inverse integrating factors[J]. Annals Differential Equations, 2000, 16(4): 320-329.

[13] WALCHER S. Local integrating factors[J]. Journal of Lie Theory, 2003, 13(1): 279-289.

[14] FERRAGUT A. Polynomial inverse integrating factors of quadratic differential systems and other results[D]. Universitat Autonoma de Barcelona, 2006: 33-110.

[15] AL-DOSARY K I T. Inverse integrating factor for classes of planar differential systems[J]. International Journal of Mathematical Analysis, 2010, 4(29): 1433-1446.

[16] HU Y, CHEN Y. The inverse integrating factor for some classes of n-th order autonomous differential systems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2015, 423(2): 1081-1088.

[17] ALGABA A, GAMERO E, GARCIA C. The integrability problem for a class of planar systems[J]. Nonlinearity, 2009, 22(2): 395-420

[18] COLL B, GASULL A, PROHENS R. Differential equations defined by the sum of two quasi-homogeneous vector fields[J]. Canadian Journal of Mathematics, 1997, 49(2): 212-231.

Inverse Integrating Factors of Quasi-Homogeneous Planar Polynomial Systems

HAN Meijia, *HUANG Tusen*

(School of Sciences, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: The inverse integrating factor is an important tool to study the integrability problem of planar polynomial systems. For a quasi-homogeneous polynomial system, the existence of polynomial inverse integrating factor is proved by using the generalized Euler's theorem, and the explicit expression is given. For a polynomial system defined by the sum of two quasi-homogeneous polynomial systems, a sufficient condition for the existence of a polynomial inverse integrating factor is given. Then, the computing formulas of inverse integrating factors for several special polynomial systems are given. The computing examples illustrate that the results in this paper generalize the existing conclusions.

Key words: quasi-homogeneous polynomial system; polynomial inverse integrating factor; quasi-homogeneous decomposition

(责任编辑：康 锋)