浙江理工大学学报(自然科学版),第 35 卷,第 2 期,2016 年 3 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University (Natural Sciences)
Vol. 35, No. 2, Mar. 2016

DOI:10.3969/j.issn.1673-3851.2016.03.026

有限群的 E-可补准素子群

杨 雪,易小兰

(浙江理工大学理学院,杭州 310018)

摘 要: 运用极小阶反例法,研究 E-可补子群对有限群幂零性的影响。在群系中,利用群 G 的正规子群(Sylow 子群)的 n-极大子群在 G 中的 E-可补性,得到 G 为幂零群的一些充要条件,推广和改进了 Skiba、李长稳等得出的一些结论。

关键词: 有限群;s-拟正规;s-拟正规嵌入;E-可补子群;p-幂零

中图分类号: O152.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-3851 (2016) 02-0313-04 **引用页码:** 030802

0 引 言

本文中所有的群都是有限群。$|G|$ 表示群 G 的阶,G_p 表示 G 的一 Sylow p- 子群。Kegel[1] 引进了 s- 拟正规的概念:群 G 的子群 H 称为在 G 中 s- 拟正规的,如果 H 与群 G 的每一个 Sylow 子群可交换。1996 年,Ballester-Bolinches 等[2] 将 s- 拟正规子群的概念推广到 s- 拟正规嵌入中。群 G 的子群 H 称为在 G 中 s- 拟正规嵌入的,如果对于每一个整除 $|G|$ 的素数 p,H 的 Sylow p- 子群同时也是 G 的某个 s- 拟正规子群的 Sylow p- 子群。2012 年,Li[3] 提出了 E- 可补的概念,它包含 s- 拟正规嵌入同时也包含了 Skiba 的弱 s- 可补,得到了有限群结构的一些新结果[4-6]。如文献[3]证明:若 E 是 G 的正规子群,如果对于 E 的每一个非循环 Sylow 子群 P,若 P 的所有的极大子群或者 P 的阶为素数或 4 的循环子群在 G 中 E- 可补,则每一个包含在 E 中的 G- 主因子是循环的;文献[5]证明:若 $\mathscr{F}$ 是包含所有超可解群的饱和群系,H 是 G 的正规子群且满足 $G/H\in\mathscr{F}$,如果对于任意的 $p\in\pi(H)(p\neq 2)$,$F^*(H)$ 的任意非循环 Sylow p- 子群的所有极大子群在 $N_G(P)$ 中 E- 可补,且 $F^*(H)$ 的任意 Sylow 2- 子群的所有极大子群在 G 中 E- 可补,则 $G\in\mathscr{F}$。

本文进一步了研究子群的 E- 可补性与有限群的 p- 幂零性之间的关系,并得到了一些有趣的结论,利用本文的结论,可以直接推导出 Skiba、李长稳等提出的一些结果。

1 预备知识

定义[3] 群 G 的子群 H 称为在 G 中是 E- 可补的,如果存在 G 的一个子群 K 使 $G=HK$ 且 $H\cap K\leqslant H_{sG}$,其中 H_{sG} 由包含在 H 中的 G 的所有 s- 拟正规嵌入子群生成。

引理 1[3] 设 H 是 G 的子群,H 在 G 中 E- 可补。

a) 如果 K 是包含 H 的 G 的子群,则 H 在 K 中 E- 可补;

b) 如果 N 是 G 的正规子群且 N 包含在 H 中,则 H/N 在 G/N 中 E- 可补;

c) 如果 H 是 G 的 π- 子群,N 是 G 的正规 π'- 子群,则 HN/N 在 G/N 中 E- 可补。

引理 2[7] 假设 G 的子群 H 在 G 中有 p- 幂零补充 T。

a) 如果 $N\lhd G$,则 HN/N 在 G/N 中有 p- 幂零补充 TN/N;

b) 如果 $H\leqslant L\leqslant G$,则 H 在 L 中有 p- 幂零补

收稿日期:2015—5—18
基金项目:国家自然科学基金项目(11471055)
作者简介:杨 雪(1990—),女,湖北荆门人,硕士研究生,主要从事代数学方面的研究。

充 $T \cap L$。

引理3[7] 设G是一个群，对于某一整数$m \geqslant 1$，素数p满足$p^{n+1} \nmid |G|$。如果$(|G|,(p-1)(p^2-1)\cdots(p^n-1))=1$，那么$G$是$p$-幂零的。

引理4[7] 假设H在G中s-拟正规，P是H的$Sylow$ p-子群，其中p为一素数。如果$H_G=1$，则P在G中s-拟正规。

引理5[7] 设P是G的s-拟正规p-子群，其中p是$|G|$的素因子，则$N_G(P) \geqslant O^p(G)$。

引理6[3] 若p为一素数，G为群满足$(|G|,p-1)=1$。假设P是G的Sylow p-子群使得P的每一个极大子群在G中有p-幂零补充，则G是p-幂零的。

引理7[8] 设$\mathscr{F}$是一个子群闭的饱和群系，H是群G的一个子群，则$Z_\infty(G) \cap H \leqslant Z_\infty(H)$。

引理8[9] 设P是一个包含在$O_p(G)$中的p-子群，假设P在G中s-拟正规嵌入，则P在G中s-拟正规。

2　主要定理和推论

定理1　设G是一个群，p是一素数且对于某个不小于1的整数n，有$(|G|,(p-1)(p^2-1)\cdots(p^n-1))=1$。如果$G$有一个Sylow p-子群P，使得P的每一个在G中没有p-幂零补充的n-极大子群(如果存在)在G中E-可补，则G是p-幂零的。

证明:假设定理1不成立，并设G为极小阶反例。由引理3知，$p^{n+1} \mid |G|$，由引理6知，P存在极大子群P_1使得P_1在G中没有p-幂零补充，故存在P的非单位n-极大子群P_n使得P_n在G中没有p-幂零补充。因此，由假设G有一个非p-幂零子群T使得$G=P_nT$且$P_n \cap T=(P_n)_{eG}$。

a) G不是非交换单群。假设G为非交换单群，如果$(P_n)_{eG}=1$，则$|T|_p=p^n$。由引理3知，T为p-幂零，矛盾。故假设$(P_n)_{eG} \neq 1$，令$U_1,U_2,\cdots,U_s$是P_n的所有在G中s-拟正规嵌入的非单位子群。因此，对于每一个$i \in \{1,2,\cdots,s\}$，存在G的s-拟正规子群K_i使得U_i是K_i的Sylow p-子群。通过假设得$(K_i)_G=1$，由引理4知，U_i是G的s-拟正规子群。U_i，K_i均为G的s-拟正规子群，故可得$U_i \lhd\lhd G$，$K_i \lhd\lhd G$，从而得到$1 \leqslant U_i \lhd\lhd K_i \lhd\lhd G$，矛盾。

b) $O_{p'}(G)=1$. 假设$O_{p'}(G) \neq 1$，因P是G的Sylow p-子群，所以$PO_{p'}(G)/O_{p'}(G)$是$G/O_{p'}(G)$的Sylow p-子群。令$M/O_{p'}(G)$是$PO_{p'}(G)/O_{p'}(G)$的n-极大子群，则$M=P_nO_{p'}(G)$，其中P_n为P的n-极大子群。如果P_n在G中有p-幂零补充K，则由引理2 a)有$M/O_{p'}(G)$在$G/O_{p'}(G)$中有p-幂零补充$KO_{p'}(G)/O_{p'}(G)$。如果P_n在G中E-可补，则由引理1 c)有$M/O_{p'}(G)$在$G/O_{p'}(G)$中E-可补。因此，$G/O_{p'}(G)$满足定理1的所有条件。由G的极小性得$G/O_{p'}(G)$是p-幂零的，故G是p-幂零的。

c) $O_p(G) \neq 1$. 假设$O_p(G)=1$，本文分两种情况讨论:如果$(K_i)_G=1$，由a)知U_i是G的s-拟正规子群，故有$(P_n)_{eG}$在G中s-拟正规，可知$(P_n)_{eG}$次正规于G，故$P_n \cap T \leqslant (P_n)_{eG} \leqslant O_{p'}(G)=1$，有$|T|_p=p^n$，由引理3知，$T$是$p$-幂零的，矛盾。如果$(K_i)_G \neq 1$，则$(K_i)_G \lhd O_{p'}(G)$，与b)$O_{p'}(G)=1$矛盾。

d) G/L是p-幂零的，对于包含在$O_p(G)$中的G的任意正规子群L。如果$|G/L| \leqslant p^n$，则由引理3可知G/L是p-幂零群。故假设$|G/L| \geqslant p^{n+1}$。令M_n/L是P/L的任意n-极大子群，显然易得$M_n=P_n$。又P_n在G中E-可补，由引理1 a)，M_n/L在G/L中E-可补。由G的极小性得G/L是p-幂零的。

e) $N=O_p(G)$是包含在$O_p(G)$中的G的唯一的极小正规子群，对于G的某极大子群M有$G=N \rtimes M$且M是p-幂零的。设N是包含在$O_p(G)$中的G的极小正规子群，显然，N是初等交换p-群，N是包含在$O_p(G)$中的G的唯一的极小正规子群且$N \nsubseteq \Phi(G)$。因此，存在G的极大子群M使得$G=N \rtimes M$，从而$M \cong G/N$是p-幂零的且$O_p(G)=O_p(G) \cap NM=N(O_p(G) \cap M)$。因为$N \leqslant O_p(G) \leqslant F(G) \leqslant C_G(N)$，所以$O_p(G) \cap M$在$G$中正规，从而$O_p(G) \cap M=1$，于是$N=O_p(G)$。

f) P的每一个n-极大子群在G中有p-幂零补充。令P_n是P的任意n-极大子群，可得P_n在G中有p-幂零补充。否则，P_n在G中E-可补，故存在G的一个非幂零子群T使得$G=P_nT$且$P_n \cap T=(P_n)_{eG}$。如果$(P_n)_{eG}=1$，则$|T|_p=p^n$。由引理3知，T是p-幂零的，矛盾。故假设$(P_n)_{eG} \neq 1$，令$U_1,U_2,\cdots,U_s$是P_n的所有在G中s-拟正规嵌入的非单位子群。因此，对于每一个$i \in \{1,2,\cdots,s\}$，存在G的s-拟正规子群K_i使得U_i是K_i的Sylow p-子群。假设对于某个$i \in \{1,2,\cdots,s\}$，有$(K_i)_G \neq 1$，故由e)，$N \leqslant (K_i)_G \leqslant K_i$，从而$N \leqslant U_i \leqslant P_n$且$G=NM=P_nM$，这说明$P_n$在$G$中有$p$-幂零补充$M$，矛盾。因此，对于每一个$i \in \{1,2,\cdots,s\}$，有$(K_i)_G=1$。由引理4知，$U_i$在$G$中$s$-拟正规，因此，$(P_n)_{eG}$在$G$中$s$-拟正规。由引理5，有$N_G[(P_n)_{eG}] \geqslant O^p(G)$。因$(P_n)_{eG}$次正规于$G$，故有$P_n \cap T \leqslant (P_n)_{eG} \leqslant O_p(G)=N$，进一步得$(P_n)_{eG} \leqslant P_n \cap N$且$1<(P_n)_{eG} \leqslant ((P_n)_{eG})^G=((P_n)_{eG})^{O^p(G)P} \leqslant (P_n \cap N)^P=P_n \cap N \leqslant N$。从而得$((P_n)_{eG})^G=P_n \cap N=N$，故$N \leqslant P_n$，所以$P_n$在$G$中有$p$-幂零补充$M$，矛盾。

g) 最后的矛盾。由d)，P的每一个极大子群在

G 中有 p- 幂零补充，由引理 6，G 是 p- 幂零群，矛盾，这表明极小反例不存在，定理结论成立。

定理 2　设 G 是一个群，p 是一素数且对于某个不小于 1 的整数 n，有 $(|G|,(p-1)(p^2-1)\cdots(p^n-1))=1$，$\mathscr{F}$ 是包含所有 p- 幂零群的饱和群系。则 $G\in\mathscr{F}$，当且仅当 G 有一个正规子群 E 使得 $G/E\in\mathscr{F}$ 且 E 有一个 Sylow p- 子群 P 使得 P 的每一个在 G 中没有 p- 幂零补充的 n- 极大子群（如果存在）在 G 中 E- 可补。

证明：必要性是显然的，这里仅给出充分性的证明。假设定理充分性不成立，并设 G 为极小阶反例。由引理 1 a) 知，P 的每一个在 G 中没有 p- 幂零补充的 n- 极大子群在 E 中是 E- 可补的。因此由定理 1 得，E 是 p- 幂零的。显然，$E\neq G$。令 T 是 E 的正规 Hall p'- 子群，则有：

a) $T=1$，进一步得 $P=E\lhd G$。假设 $T\neq1$，由 T 是 E 的正规 Hall p'- 子群且 $E\lhd G$，可知 $T\lhd G$，故可断言 G/T（相对于 E/T 来说）满足定理 2 的条件。实际上，$(G/T)/(E/T)\cong G/E\in\mathscr{F}$ 且 E/T 是 p- 群。令 M_n/T 是 PT/T 的一个 n- 极大子群且 $P_n=M_n\cap P$，其中 PT/T 在 G/T 中没有 p- 幂零补充，则 P_n 是 P 的 n- 极大子群且 $M_n=P_nT$。由假设，P_n 在 G 中是 E- 可补。由引理 1 a) 知，$M_n/T=P_nT/T$ 在 G/T 中是 E- 可补的。由 G 的极小性，$G/T\in\mathscr{F}$。设 $f_i(i=1,2)$ 是饱和群系函数使得 $\mathscr{N}=LF(f_1)$，$\mathscr{F}=LF(f_2)$。因为 T 是 G 的正规 p'- 子群，所以对 $T_{i+1}\leqslant T$ 的每个 G- 主因子 T_{i+1}/T_i 和每个整除 $|T_{i+1}/T_i|$ 的素数 q，有 $G/C_G(T_{i+1}/T_i)\in f_1(q)$。由 $\mathscr{N}\in\mathscr{F}$ 知，$f_1(q)\subseteq f_2(q)$，得 $G/C_G(T_{i+1}/T_i)\in f_2(q)$。又 $G/T\in\mathscr{F}$，故 $G\in\mathscr{F}$，矛盾。即可知 $T=1$，进一步得到 $P=E\lhd G$。

b) 设 Q 是 G 的 Sylow q- 子群，其中 q 是整除 $|G|$ 素数且满足 $q\neq p$，则 $PQ=P\times Q$。由 a) 知，$P=E\lhd G$，故 PQ 是 G 的一个子群。由引理 1 a) 知，P 的每个在 PQ 中没有 p- 幂零补充的 n- 极大子群在 PQ 中 E- 可补。故由定理 1 知，PQ 是 p- 幂零的，从而得 $Q\lhd PQ$，故 $PQ=P\times Q$。

c) 最终矛盾。令 H 是 G 的任一非单位正规子群且 $H\leqslant P$，G_p 为 G 的 Sylow p- 子群。由 b) 可知，对 G 的任意 Sylow q- 子群 Q，有 $HQ=H\times Q$，其中 $q\neq p$，故 $O^p(G)\leqslant C_G(H)$，从而得 $[H,G]=[H,G_pO^p(G)]=[H,G_p]\lhd G$。故可断言 $[H,G_p]<H$。实际上，若 $[H,G_p]=H$，则对任意的非负整数 t，$H=[H,G_p,\cdots,G_p]\leqslant G_p^{t+1}$，其中 t 表示 G_p 在 $[H,G_p,\cdots,G_p]$ 中的个数，与文献[10]中定理 10.3 相矛盾，所以 $[H,G_p]<H$。故 G 存在一个正规子群 K 满足 H/K 是 G 的主因子且 $[H,G]\leqslant K$，可以得到 $H/K\leqslant Z(G/K)$。设 f 是饱和群系函数使得 $\mathscr{F}=LF(f)$，则 $G/C_G(H/K)=1\in f(p)$，由 H 的任意性知，G 有包含在 P 中的正规链，使得链中的每个 G 主因子 H/K 是 f- 中心的。又 $G/P\in\mathscr{F}$，所以 $G\in\mathscr{F}$，矛盾，这表明极小反例不存在，定理结论成立。

定理 3　设 G 是一个群，p 是整除 $|G|$ 的阶的素因子。假设 G 的每个 p 阶子群含于 $Z_\infty(G)$ 中且 G 的所有阶为 4 的循环子群 $\langle x\rangle$ 在 G 中 E- 可补，那么 G 为 p- 幂零群。

证明：假设论断不成立，并设 G 为极小阶反例。则：

a) G 的每个真子群是 p- 幂零的。假设 H 是 G 的真子群并设 $\langle x\rangle$ 是 G 的 p- 阶子群。由定理的条件，$\langle x\rangle\subseteq Z_\infty(G)$，又由引理 7，$\langle x\rangle\leqslant Z_\infty(G)\cap H\leqslant Z_\infty(H)$。令 $\langle x\rangle$ 是 H 的四阶循环子群。由假设，$\langle x\rangle$ 在 G 中是 E- 可补的，则再由引理 1 a) 知，$\langle x\rangle$ 在 H 中是 E- 可补的，这样 H 满足定理的假设。由 G 的极小性知，H 是 p- 幂零的。

b) G 有一个正规 Sylow p- 子群满足：(i) $G=P\rtimes Q$，其中 Q 是 G 的 Sylow q- 子群；(ii) $P/\Phi(P)$ 是 G 的主因子；(iii) $\exp(P)=4$ 或者 $\exp(P)=p$。事实上，G 是一个极小非 p- 幂零群。因此，由文献[11]定理 8.3.4 b) 成立。

c) $\exp(P)=4$. 假设 $\exp(P)=p$，则由定理条件，$P\leqslant Z_\infty(G)$，从而 $G/Z_\infty(G)\cong(G/P)/(Z_\infty(G)/P)$ 是 p- 幂零的，故 G 是 p- 幂零的，矛盾。

d) $|x|=4$，其中 $x\in P/\Phi(P)$。假设存在 $x\in P\backslash\Phi(P)$ 使得 $|x|=2$。设 $T=\langle x\rangle^G$，则 $T\leqslant P$ 且 $T\Phi(P)/\Phi(P)$ 正规于 $G/\Phi(P)$。因为 $P/\Phi(P)$ 是 G 的主因子，所以 $P=T$，从而 $\exp(P)=2$，与 c) 矛盾。

e) 最后的矛盾。令 T 是 $\langle x\rangle$ 在 G 中的任意补充，则 $G=\langle x\rangle T$ 且 $P=P\cap G=P\cap\langle x\rangle T=\langle x\rangle(P\cap T)$。又 $P/\Phi(P)$ 是交换群，有 $(P\cap T)\Phi(P)/\Phi(P)\lhd G/\Phi(P)$。然而 $P/\Phi(P)$ 是 $G/\Phi(P)$ 的极小正规子群，故 $P\cap T\leqslant\Phi(P)$ 或 $P=P(P\cap T)\Phi(P)=P\cap T$。如果 $P\cap T\leqslant\Phi(P)$，则 $\langle x\rangle=P\lhd G$，接着由文献[12]定理 10.1.9 得 G 是 p- 幂零的，矛盾。故假设 $P=P\cap T$，对任意的补充 T，则 $T=G$ 是 $\langle x\rangle$ 在 G 中的唯一的补充。由假设及 G 的极小性知，$T=G$ 不是 p- 幂零的，故 $\langle x\rangle$ 在 G 中 E- 可补。由引理 8 得，$\langle x\rangle=\langle x\rangle_{sG}$ 在 G 中 s- 拟正规的，则 $\langle x\rangle Q$ 是 G 的真子群且 $\langle x\rangle Q=\langle x\rangle\times Q$，从而得到 $G=P\times Q$，矛盾。

推论 1　设 G 是一个群，假设 G 的每一个极小子群含于 $Z_\infty(G)$ 中且 G 的每个四阶循环子群 $\langle x\rangle$ 在 G 中 E- 可补，则 G 是 p- 幂零的。

推论 2　（文献[3]定理 3.2）设 P 是 G 的

Sylow p- 子群，其中 p 是整除 $|G|$ 的最小的素数，如果 P 的每一个在 G 中没有 p- 幂零补充的极大子群在 G 中 E- 可补，则 G 是 p- 幂零的。

推论3 （文献[4]，定理3.1）设 G 是一个群，p 是一素数且对于某个不小于1的整数 n，有 $(|G|,(p-1)(p^2-1)\cdots(p^n-1))=1$。如果 G 有一个Sylow p- 子群 P 使得 P 的每一个 n- 极大子群（如果存在）在 G 中或者存在 p- 幂零补充，或者弱 s- 可补，则 G 是 p- 幂零的。

推论4 （文献[13]，定理）设 G 是一个群，p 是一素数且对于某个不小于1的整数 n，有 $(|G|,(p-1)(p^2-1)\cdots(p^n-1))=1$。如果 G 有一个Sylow p- 子群 P 使得 P 的每一个 n- 极大子群（如果存在）在 G 中或者存在 p- 幂零补充，或者弱 s- 可补，则 G 是 p- 幂零的。

3 结　语

群 G 的所有正规子群、c- 正规子群、c- 可补子群、s- 置换子群、弱 s- 可补子群、s- 拟正规嵌入子群都是 G 的 E- 可补子群。本文主要考虑当有限群的阶满足 $(|G|,(p-1)(p^2-1)\cdots(p^n-1))=1$ 时，利用子群的 E- 可补充性研究有限群的结构和性质，得到有限群为幂零群以及更一般的属于包含所有幂零群的饱和群系的条件。在后续研究中，讨论将定理中群 G 的阶的条件削弱为 $(|G|,p-1)=1$ 时，群 G 的Sylow子群的极大子群的 E- 可补性与有限群的幂零性的关系。

参考文献：

[1] KEGEL O H. Sylow-gruppen and subnormalteiler endlicher Gruppen [J]. Mathematische Zeitschrift, 1962, 78(2): 205-221.

[2] BALLESTER-BOLINCHES A, PEDRAZA-AGUIERA M C. Sufficient conditions for supersolvability of finite groups [J]. Journal Pure Applied Algebra, 1998, 127(2): 113-118.

[3] LI C W. A note on a result of Skiba [J]. J Group Theory, 2012, 15(3): 385-396.

[4] 谢凤艳，郭文彬，李宝军. 关于广义置换子群理论中的一些公开问题[J]. 中国科学：A辑，2009，39(5)：593-604.

[5] ZHANG X M, LI C W. Finite groups with E-supplemented subgroups [J]. Vietnam Journal of Mathematics, 2013, 41(3): 333-339.

[6] YI X L, SKIBA A N. On some generalizations of permutability and S-permutability [J]. Problems of Physics, Mathematics and Techniques, 2013, 17(4): 65-78.

[7] LI C W. Finite group with some primary subgroups ss-quasionrmally embedded [J]. Indian Journal Pure Applied Mathematics, 2011, 42(5): 291-306.

[8] GUO W B. On F-supplemented subgroups of finite groups [J]. Manuscripta mathematica, 2008, 127(2): 139-150.

[9] LI Y W, WANG Y M, WEI H Q. On p-nilpotency of finite groups with some subgroups π-quasinormally embedded [J]. Acta Mathematica Hungarica, 2005, 108(4): 283-298.

[10] DOERK K, HAWKES T. Finite soluble groups [M]. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1992: 99-107.

[11] 徐明耀. 有限群导引：下[M]. 北京：科学出版社，1993：20-38.

[12] ROBINSON J S D. A course in theory of groups [M]. New York: Springer, 1995: 53-82.

[13] 李长稳，易小兰. 关于s-拟正规嵌入子群[J]. 佛山科学技术学院学报：自然科学版，2012，30(3)：19-22.

Some Primary Subgroups E-supplemented of Finite Group

YANG Xue, YI Xiaolan

(School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: The authors investigated the influence of E-supplemented subgroups on nilpotency of finite groups by using the method of minimal order counterexample. A series of necessary and sufficient conditions for a group to be nilpotent are obtained in formation by means of some groups of G, such as n-the maxmal subgroups of the normal subgroup of G, n-maxmal subgroups of the Sylow subgroup of G, etc. Some of Skiba and Changwen Li's results are generalized and improved.

Key words: finite group; s-quasi-normality; s-quasi-normal E-embedding; supplemente subgroup; p-nilpotency

（责任编辑：康　锋）