浙江理工大学学报(自然科学版),第 35 卷,第 2 期,2016 年 3 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University (Natural Sciences)
Vol. 35, No. 2, Mar. 2016

DOI:10.3969/j.issn.1673-3851.2016.03.025

实意义下分组有界变差条件对柯西并项准则的推广

陈晓丹,周颂平

(浙江理工大学理学院,杭州 310018)

摘　要: 对数项级数及积分的柯西收敛准则的单调性和非负性进行推广。主要针对分组有界变差(GBV)条件的非负性作进一步研究,利用 GBV 性质及巧妙的分割方法给出最终适用条件的数列的柯西并项准则;同时,将系数数列的 GBV 条件推广到函数的 GBV 条件,最终给出分组有界变差函数 GBVF 的柯西并项准则。

关键词: 数列;积分;分组有界变差;柯西并项准则

中图分类号: O173.1　**文献标志码:** A　**文章编号:** 1673-3851 (2016) 02-0309-04　**引用页码:** 030801

0　引　言

柯西收敛准则可以表述为:若$\{a_n\}$是一个非负递减数列,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum\limits_{k=1}^{\infty}2^k a_{2^k}$有相同的敛散性,它是正项级数中若干经典准则之一。学者们主要对于该定理中数列的单调性及非负性作推广工作。1948 年,Szász[1] 将柯西收敛准则中的非负递减数列推广到拟单调数列(QMS),并将数列中的拟单调条件推广到函数的拟单调条件上。2005 年,周颂平和乐瑞君提出非负条件下的分组有界变差(GBV)[2] 的概念。2013 年,乐瑞君等将文献[1] 获得结论的条件推广至分组有界变差(GBV)条件,同时给出更广范围的均值有界变差(MVBV)条件[3] 下定理不成立的反例[4],这就说明 GBV 是该定理的最终适用范围。

基于前人的研究成果,本文取消了 GBV 的非负性并采用巧妙的分割方法,将实意义下的分组有界变差数列之和转化为熟知的非负条件下的分组有界变差数列之和,得到实意义 GBV 条件下的数列及积分的柯西并项准则。

1　定　义

定义 1 [5]　如果实数列$A:=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$对所有$n\geqslant 1$,有:

$$\sum_{k=n}^{2n}|\Delta a_k|:=\sum_{k=n}^{2n}|a_k-a_{k+1}|\leqslant M|a_n| \quad (1)$$

成立,M是仅依赖于数列A的正常数,则称数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$为分组有界变差的,记$A\in GBVS$,不失一般性,可以假定$M\geqslant 1$。

定义 2[4]　对于任意$X>0$,函数$f(x)$在有限区间$[0,X]$上为一有界变差函数,若对充分大的M,有$\int_M^{2M}|\mathrm{d}f|\leqslant C(f)|f(M)|$,则记$f(x)\in GBVF$,其中$C(f)$是仅与$f(x)$相关的正常数。

全文用M来代表(1) 条件中出现的常数,M_1、M_2等表示正常数,在不同的地方可能代表不同的值。

2　定理及证明

引理 1　若$A:=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\in GBVS$,则有不等式:

$$\sum_{k=n}^{2n}|\Delta a_k|\leqslant\frac{4M^2}{n}\sum_{n/2\leqslant k\leqslant n}|a_k|.$$

证明: 对任意$n/2\leqslant k\leqslant n$,由式(1) 可知:

$$|a_n|\leqslant\sum_{j=k}^{n-1}|\Delta a_j|+|a_k|\leqslant\sum_{j=k}^{2k}|\Delta a_j|+|a_k|\leqslant(M+1)|a_k|,$$

其中M是式(1) 中的正常数。对k进行从$n/2$到n的

收稿日期:2015－06－29

作者简介:陈晓丹(1989－),女,江苏泰州人,硕士研究生,主要从事逼近论的构造性分析方面的研究。

累加，可以得到：

$$|a_n| \leqslant \frac{2(M+1)}{n} \sum_{n/2 \leqslant k \leqslant n} |a_k|.$$

因此，

$$\sum_{k=n}^{2n} |\Delta a_k| \leqslant M |a_n| \leqslant \frac{2M(M+1)}{n}$$

$$\sum_{n/2 \leqslant k \leqslant n} |a_k| \leqslant \frac{4M^2}{n} \sum_{n/2 \leqslant k \leqslant n} |a_k|,$$

引理1证毕。

给定一实数列$\{a_n\}$，令$n_1 = 1$，对所有$k \geqslant 2$，记：

$$n_k = \min\{n > n_{k-1}: a_n a_{n_{k-1}} < 0\},$$

当n充分大时，若数列$\{a_n\}$保号，则自然数列$\{n_k\}$的子列只有有限多个元素，这是平凡的情形，已经有结论成立[4]。不失一般性，可以假定$\{n_k\}$是无限自然数子列。由以上的定义，易知数列$\{a_n\}$在每个集合

$$S_k := \{n_k, n_k+1, \cdots, n_{k+1}-1\} \tag{2}$$

中的符号是一致的。

记 $$M_0 = \frac{1}{128M^2} \tag{3}$$

$U = U(M_0) = \{S_k : |S_k| > M_0 n_k, k = 1, 2, \cdots\}$，其中$|S_k|$表示$S_k$元素中的个数。并记：

$$U^+ = \bigcup \{S_k \in U: a_{n_k} > 0\},$$

$$U^- = \bigcup \{S_k \in U: a_{n_k} < 0\}.$$

然后，把$\{S_k\} \cap U$的元素以递增的顺序重新排列，采用相同的方法选取$\{n_k^*\}$，即$n_k^* = \min\{n > n_{k-1}^*: a_n a_{n_{k-1}^*} < 0\}$。

令$I_k = \{2^k, 2^k+1, \cdots, 2^{k+1}-1\}$及$S_{j,k}^* := S_j \cap I_k$。

同样，定义

$$J_k^{(1)} = \bigcup \{(S_j \cap I_k): S_j \in U, S_j \cap I_k \neq \varnothing\},$$

$$J_k^{(2)} = \bigcup \{(S_j \cap I_k): S_j \notin U, S_j \cap I_k \neq \varnothing\}.$$

同时，记$a_{\mu j,k}$，使其满足：

$$|a_{\mu j,k}| = \max_{m \in S_{j,k}^*} |a_m|.$$

定理4 使用上文的符号，设$\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$是一个严格单调递增的自然数列，满足

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n = O(\lambda_n - \lambda_{n-1}), n = 1, 2, \cdots \tag{4}$$

如果$\{a_n\} \in GBVS$，且$\{n_k^*\} \subseteq \{\lambda_n\} \subseteq U$，那么级数$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$与$\sum_{\lambda_n \in U} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) |a_{\lambda_n}|$有相同的敛散性。

证明： 从$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$收敛推出$\sum_{\lambda_n \in U} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) |a_{\lambda_n}|$收敛的证明可由非负条件的结论[4]以及$|\Delta|a_n|| \leqslant |\Delta a_n|$得到。现在给出其反方向的证明。

由引理1与(2)，对任意固定的k，易知：

$$\frac{1}{2} \sum_{S_{j,k}^* \subseteq J_k^{(2)}} |a_{\mu_{j,k}}| \leqslant \frac{1}{2} \sum_{S_{j,k}^* \subseteq J_k^{(1)} \cup J_k^{(2)}} |a_{\mu_{j,k}}|$$

$$\leqslant \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}} |\Delta a_n| \leqslant \frac{4M^2}{2^k} \sum_{n=2^k/2}^{2^{k+1}} |a_n|,$$

即：

$$\frac{1}{2} \sum_{S_{j,k}^* \subseteq J_k^{(2)}} |a_{\mu_{j,k}}| \leqslant \frac{4M^2}{2^k}$$

$$\Big(\sum_{S_{j,k}^* \subseteq J_k^{(2)}} |S_{j,k}^*| |a_{\mu_{j,k}}| + \sum_{n \in J_k^{(1)}} |a_n| \Big) +$$

$$\frac{4M^2}{2^k} \sum_{n=2^k/2}^{2^k-1} |a_n|,$$

通过移项，并且因$|S_j| \leqslant 2^{k+1}/(128M^2)$及$S_{j,k}^* \subseteq J_k^{(2)}$，可以得到以下不等式：

$$\frac{1}{4} \sum_{S_{j,k}^* \subseteq J_k^{(2)}} |a_{\mu_{j,k}}| \leqslant \sum_{S_{j,k}^* \subseteq J_k^{(2)}} |a_{\mu_{j,k}}|$$

$$\left(\frac{1}{2} - 4M^2 |S_{j,k}^*| / 2^{k+1} \right)$$

$$\leqslant \frac{4M^2}{2^k} \sum_{n \in J_k^{(1)}} |a_n| + \frac{4M^2}{2^k} \sum_{n=2^k/2}^{2^k-1} |a_n| \tag{5}$$

又因为：

$$\sum_{n \in J_k^{(2)}} |a_n| \leqslant \sum_{S_{j,k}^* \subseteq J_k^{(2)}} |S_j| |a_{\mu_{j,k}}|$$

$$\leqslant \frac{2^{k+1}}{128M^2} \sum_{S_{j,k}^* \subseteq J_k^{(2)}} |a_{\mu_{j,k}}|,$$

结合(5)易知：

$$\sum_{n \in J_k^{(2)}} |a_n| \leqslant \frac{1}{4} \sum_{n \in J_k^{(1)}} |a_n| + \frac{1}{4} \sum_{n=2^k/2}^{2^k-1} |a_n|,$$

将$k = 1$到N累计加起来，不难得出：

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{n \in J_k^{(2)}} |a_n| \leqslant M_1 |a_1| + 2 \sum_{k=1}^{N} \sum_{n \in J_k^{(1)}} |a_n|.$$

因此，

$$\sum_{j=1}^{2^N} |a_j| \leqslant M_1 \sum_{k=1}^{N} \sum_{n \in J_k^{(1)}} |a_n| \tag{6}$$

对于任意的$S_k \in U^+$，由条件$\{n_k^*\} \subseteq \{\lambda_n\} \subseteq U$，假定：

$$n_k^* = \lambda_{n_0} < \lambda_{n_0+1} < \cdots < \lambda_{n_1} \leqslant n_{k+1}^* - 1 < \lambda_{n_1+1}.$$

对$n = n_0+1, \cdots, n_1$，由Abel变换，可得：

$$\sum_{k=\lambda_{n-1}+1}^{\lambda_n} |a_k| = \Big| \sum_{k=\lambda_{n-1}+1}^{\lambda_n} a_k \Big| =$$

$$\Big| \sum_{k=\lambda_{n-1}+1}^{\lambda_n - 1} (k - \lambda_{n-1}) \Delta a_k + (\lambda_n - \lambda_{n-1}) a_{\lambda_n} \Big|$$

$$\leqslant (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \sum_{k=\lambda_{n-1}+1}^{\lambda_n} |\Delta a_k| + (\lambda_n - \lambda_{n-1}) |a_{\lambda_n}|.$$

由条件(4)，易知 $\lambda_n = O(\lambda_{n-1})$。此时，可以选择一个自然数 N_0 使得 $2^{N_0-1}\lambda_{n-1} \leqslant \lambda_n < 2^{N_0}\lambda_{n-1}$，故：

$$\sum_{k=\lambda_{n-1}+1}^{\lambda_n} |\Delta a_k| \leqslant \sum_{j=0}^{N_0-1} \sum_{k=2^j\lambda_{n-1}}^{2^{j+1}\lambda_{n-1}} |\Delta a_k| \leqslant M_1 \sum_{j=0}^{N_0-1} |a_{2^j\lambda_{n-1}}|.$$

对于任意 $1 \leqslant j \leqslant N_0$，由条件(1)，有：

$$|a_{2^j\lambda_{n-1}}| \leqslant \sum_{k=2^{j-1}\lambda_{n-1}}^{2^j\lambda_{n-1}} |\Delta a_k| + |a_{2^{j-1}\lambda_{n-1}}| \leqslant M_1 |a_{2^{j-1}\lambda_{n-1}}|,$$

因此：

$$\sum_{j=0}^{N_0-1} |a_{2^j\lambda_{n-1}}| \leqslant (1 + M_1 + \cdots + M_1^{N_0-1}) |a_{\lambda_{n-1}}| =: M_2 |a_{\lambda_{n-1}}|.$$

同理，得到：

$$|a_{\lambda_n}| \leqslant M_1 M_2 |a_{\lambda_{n-1}}|.$$

故可知：

$$\sum_{k=\lambda_{n-1}+1}^{\lambda_n} |a_k| \leqslant M_1 M_2 (\lambda_n - \lambda_{n-1}) |a_{\lambda_{n-1}}| \leqslant M_3 (\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}) |a_{\lambda_{n-1}}|, n = n_0 + 1, \cdots, n_1.$$

同样，可以得到：

$$\sum_{k=\lambda_{n_1}}^{n_{k+1}^*-1} |a_k| \leqslant M_1 M_2 (n_{k+1}^* - \lambda_{n_1}) |a_{\lambda_{n_1}}| \leqslant M_3 (\lambda_{n_1+1} - \lambda_{n_1}) |a_{\lambda_{n_1}}| \leqslant M_4 (\lambda_{n_1} - \lambda_{n_1-1}) |a_{\lambda_{n_1}}|.$$

左右两边进行求和，

$$\sum_{n \in S_k \subseteq U^+} |a_n| \leqslant M_1 \Big| \sum_{\lambda_n \in U^+} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) a_{\lambda_n} \Big|.$$

对 U^- 有相同的结论。因此，由条件(6)，易获得：

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leqslant M_1 \max\Big\{ \Big| \sum_{\lambda_n \in U^+} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) a_{\lambda_n} \Big|, \Big| \sum_{\lambda_n \in U^-} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) a_{\lambda_n} \Big| \Big\} \leqslant M_1 \sum_{\lambda_n \in U} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) |a_{\lambda_n}|.$$

定理 1 获证。

定理 1 得知，在 GBV 条件下，可以避免计算数列中复杂变号的“小区间”，因为它可以被“大区间”的值所控制，因此该定理有若干潜在的应用价值。下面给出一个例子。

例　设 $n_k^{(1)} = 2^k, n_k^{(2)} = 2^k + k + 1, n_k^{(3)} = 2^{k+1} - k, k \geqslant 3$。对于给定常数 M，数列 $A := \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足：

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$；

b) $|a_n| \leqslant M |a_{n_k^{(2)}}|$，$n_k^{(1)} \leqslant n < n_{k+1}^{(1)}$.

分段定义：

c) 当 $n_k^{(2)} \leqslant n < n_k^{(3)}$ 时，$\{|a_n|\}$ 是单调递减数列；

d) 数列 $\{a_n\}$ 在 $n_k^{(1)} \leqslant n < n_k^{(2)}$ 与 $n_k^{(3)} \leqslant n < n_{k+1}^{(1)}$ 上变号次数的上限 M 与 k 无关。

不妨以 $n_k^{(1)} \leqslant n < n_k^{(2)}$ 为例：

令 $d_k^{(i)} = n_k^{(1)} + i\left[\dfrac{k}{M}\right], i = 0,1,2,\cdots,M-1$。由定义知 $n_k^{(1)} \leqslant d_k^{(i)} < n_k^{(2)}$，并记 $d_k^{(M)} = n_k^{(2)}$。

在 $d_k^{(i)} \leqslant n < d_k^{(i+1)}$ 上定义：$a_n = (-1)^i a_{n_k^{(2)}}$，即数列只在 $n = d_k^{(i)}$ 处变号，则在整个区间上共计有限个变号点，即有不等式：

$$\sum_{j=n_k^{(1)}}^{n_k^{(2)}} |\Delta a_j| \leqslant 2M |a_{n_k^{(2)}}|.$$

以这种方法构造出来的数列 $\{a_n\}$ 无论在小区间还是大区间上，数列 $\{a_n\}$ 都满足 GBV 条件。采用定理 1 的分割方法易得 $\sum\limits_{j=1}^{2^N} |a_j| \leqslant M_1 \sum\limits_{k=1}^{N} \sum\limits_{j=n_k^{(2)}}^{n_k^{(3)}} |a_j|$。同样的方法可以定义 $\{n_k^*\}$ 是经过重新排列后选取的首个与前项异号项的项数。

由此，只需令：

$n_k^{*(2)} = \lambda_{n_0} < \lambda_{n_0+1} < \cdots < \lambda_{n_1} \leqslant n_{k+1}^{*(2)} - 1 < \lambda_{n_1+1}$，则 $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ 满足条件 $\lambda_{n+1} - \lambda_n = O(\lambda_n - \lambda_{n-1}), n = 1, 2, \cdots$。

根据定理 1 可以知道，判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 的敛散性，只需判断级数 $\sum\limits_{\lambda_n \in U} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) |a_{\lambda_n}|$ 的敛散性即可。

定理 2　使用定理 4 的符号，若 $f(x) \in GBVF$，令 $f_n = f(n)$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$ 与积分 $\int_U |f(x)| \mathrm{d}x$ 有相同的收敛性。

该定理的证明类似于文献[4]中定理 2 的证明，并采用本文定理 1 的分割方法，本文省略。

3　结　语

本文在取消 GBV 非负性条件下，采用巧妙的分割方法，将复杂变号的“小区间”为“大区间”的值所控制，从而将变号条件下定理的研究转化为熟悉的“大区间”条件下定理的研究，并将柯西并项准则

推广至积分的情形。由文献[4]可知,分组有界变差条件是柯西并项准则适用的最终条件。因此,本文给出了最终适用范围的实意义分组有界变差条件下的柯西并项准则。

参考文献:

[1] SZÁSZ O. Quasi-monotone series[J]. American Journal of Mathematics, 1948, 70: 203-206.

[2] LE R J, ZHOU S P. A new condition for the uniform convergence of certain trigonometric series[J]. Acta Mathematica Hungarica, 2005, 108(1-2): 161-169.

[3] 周颂平. 三角级数研究中的单调性条件:发展和应用[M]. 北京:科学出版社, 2012: 9-20.

[4] 乐瑞君,解烈军. 分组有界变差条件对级数若干经典定理的推广[J]. 数学实践与认识,2013, 42(23): 282-286.

[5] FENG L, TOTIK V, ZHOU S P. Trigonometric series with a generalized monotonicity condition[J]. Acta Math Sinia Eng Ser, 2014, 30(8): 1289-1296.

A Remark on Generalization of Cauchy's Condensation Criterion under Group Bounded Variation Condition in Real Sense

CHEN Xiaodan, ZHOU Songping

(School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: It is to generalize the monotonicity and positivity of Cauchy's convergence criterion for numerical series and integral. It aims to do further research on the positivity of group bounded variation (GBV) and to offer the Cauchy's condensation criterion for series. Moreover, its gives the final applicable conditions by using GBV property and ingenious segmentation method. Meanwhile, the GBV conditions is generalized from coefficient series to function so as to finally offer the Cauchy's condensation criterion for group bounded variation function.

Key words: series; integral; group bounded variation; Cauchy's condensation criterion

(责任编辑:康　锋)