浙江理工大学学报(自然科学版),第 35 卷,第 1 期,2016 年 1 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University (Natural Sciences)
Vol. 35, No. 1, Jan. 2016

DOI:10.3969/j.issn.1673-3851.2016.01.021

Grötzsch 环函数的几个不等式

马晓艳[1],**屠国燕**[2]
(1.浙江理工大学理学院,杭州 310018;2.同济大学浙江学院,浙江 嘉兴 314051)

摘　要: 建立了 Ramanujan 模方程中 Grötzsch 环函数 $\mu(\mathrm{r})$ 与第二类完全椭圆积分 $\varepsilon(\mathrm{r})$ 及拟共形理论中的 Hübner 函数 $\mathrm{m}(\mathrm{r})$ 之间的关系,并通过研究 $\mu(\mathrm{r})$ 与某些初等函数及特殊函数组合的单调性,获得了 $\mu(\mathrm{r})$ 的几个不等式,利用这些结果给出了 $\mu(\mathrm{r})+\log\mathrm{r}$ 的上下界,从而改进了已知的此类估计,同时给出了 $\mu(\mathrm{r})$ 形如 Landen 恒等式的不等式形式。所得结果有助于研究 Ramanujan 模方程理论。

关键词: Gauss 超几何函数;Grötzsch 环函数;Ramanujan 模方程;不等式
中图分类号: O174　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1673-3851(2016)01-0129-04　　**引用页码:** 010801

0　引　言

对于实数 $a,b,c(c\neq 0,-1,-2,\cdots)$,*Gauss* 超几何函数定义为:

$$F(a,b;c;x)={}_2F_1(a,b;c;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,n)(b,n)}{(c,n)}\frac{x^n}{n!},x\in(-1,1)\tag{1}$$

其中:当 $a\neq 0$ 时,$(a,0)=1$;而当 $n=1,2,\cdots$ 时,

$$(a,n)=a(a+1)(a+2)(a+3)\cdots(a+n-1)=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}\tag{2}$$

$\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}dt(\mathrm{Re}x>0)$ 为经典 $\Gamma-$ 函数。众所周知,*Gauss* 超几何函数的性质与 $\Gamma-$ 函数、$\Psi-$ 函数及 $B-$ 函数的性质密切相关。其中,

$$\Psi(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)},B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$
$$\mathrm{Re}x>0,\mathrm{Re}y>0,B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi\tag{3}$$

$$R(a,b)=-\Psi(a)-\Psi(b)-2\gamma,$$
$$R\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\log16\tag{4}$$

γ 是 Euler-mascheroni 常数。

超几何函数在几何函数论、数论等数学分支中有着重要的作用,作为 Gauss 超几何函数的特殊情况,Legendre 第一类、第二类完全椭圆积分为:

$$\kappa=\kappa(r)=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;r^2\right),$$
$$\kappa'=\kappa'(r)=\kappa(\sqrt{1-r^2}),r\in(0,1)\tag{5}$$

$$\varepsilon=\varepsilon(r)=\frac{\pi}{2}F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;r^2\right),$$
$$\varepsilon'=\varepsilon'(r)=\varepsilon(\sqrt{1-r^2}),r\in(0,1)\tag{6}$$

$\kappa(r)$ 满足 Landen 恒等式:

$$\kappa\left(\frac{2\sqrt{r}}{1+r}\right)=(1+r)\kappa(r),$$
$$\kappa\left(\frac{1-r}{1+r}\right)=\frac{1+r}{2}\kappa(\sqrt{1-r^2})\tag{7}$$

用 B^2 表示平面上单位圆盘,$\mu(r)$ 表示平面 Grötzsch 极值环 $B^2\backslash[0,r](0<r<1)$ 的模[1],则:

$$\mu(r)=\frac{\pi}{2}\frac{F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;1-r^2\right)}{F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;r^2\right)}=\frac{\pi}{2}\frac{\kappa'(r)}{\kappa(r)}\tag{8}$$

函数 $\mu(r)$ 在拟共形和拟正则理论中具有特殊重要性[1-2],它在解析函数论和数论等数学分支也有不

收稿日期:2015－02－06
基金项目:国家自然科学基金项目(11171307);浙江省教育厅科研项目(Y201328799)
作者简介:马晓艳(1979－),女,吉林梅河口人,副教授,主要从事 Ramanujan 模方程、特殊函数方面的研究。

少应用。

对任意的 $r\in(0,1)$，符号差为2的 $p(>1)$ 次经典模方程[3] 即为下面的方程：

$$\frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)}=\frac{p\kappa'(r)}{\kappa(r)} \tag{9}$$

利用函数 $\mu(r)$ 可将方程(9)及其解(称为奇异值) s 依次表示为：

$$\mu(s)=p\mu(r)\text{ 和 }s=\varphi_{1/p}(r) \tag{10}$$

其中 $\varphi_K(r)=\mu^{-1}(\mu(r)/K)$ 为 Hersch-Pfluger 偏差函数[1]，因此可借助于 $\mu(r)$ 和 $\varphi_K(r)$ 的性质来研究方程(10)及其解 s。

由 Landen 恒等式(7)及定义(8)，可得到模函数 $\mu(r)$ 的恒等式(参见文献[4]中5.2节)：

$$\mu(r)\mu(r')=\frac{\pi^2}{4},$$

$$\mu(r)\mu\left(\frac{1-r}{1+r}\right)=\frac{\pi^2}{2},$$

$$\mu(r)=2\mu\left(\frac{2\sqrt{r}}{1+r}\right) \tag{11}$$

受这些恒等式的启发，本文通过研究拟共形映照理论中平面 Grötzsch 环 $\mu(r)$ 与特殊函数及某些初等函数的组合函数的单调性，获得了 $\mu(r)$ 满足的一些不等式，所得结果有助于进一步研究 Ramanujan 模方程理论。

1 主要结果

在本文中，对于任意 $r\in(0,1)$，记 $r'=\sqrt{1-r^2}$。

定理1 a) 函数 $F(r)=[m(r)+\log r]/[\mu(r)+\log r]$ 从(0,1)到(0,1)单调递减，其中 $m(r)=\frac{2}{\pi}r'^2\kappa(r)\kappa'(r)$ 为 Hübner 界中出现的特殊函数。

b) 函数 $G(r)=[\log 4-\mu(r)+\log r]/\left[\frac{\pi}{2}-\varepsilon(r)\right]$ 从(0,1)到 $\left(\frac{2}{\pi},\frac{4\log 2}{\pi-2}\right)$ 单调递增，特别地，对于任意的 $r\in(0,1)$，成立不等式：

$$\frac{4\log 2}{\pi-2}[\varepsilon(r)-1]<\mu(r)+\log r<2\log 2-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon(r)\right) \tag{12}$$

定理2 令 $C=\left(1-\frac{\log 4}{\pi}\right)^2$，则有：

a) 函数 $Q(r)=2\mu\left(\frac{\sqrt{8r(1+r)}}{1+3r}\right)-\mu(r)$ 从(0,1)到 $\left(\log\frac{1}{2},0\right)$ 单调递增，特别地，对于任意的 $r\in(0,1)$，成立不等式：

$$\max\{\mu(r)-\log 2,C\mu(r)\}<2\mu\left(\frac{\sqrt{8r(1+r)}}{1+3r}\right)<\mu(r) \tag{13}$$

b) 函数 $S(r)=\mu\left(\frac{1-r}{1+3r}\right)-2\mu(r')$ 从(0,1)到(0,log2)单调递增，特别地，对于任意的 $r\in(0,1)$，成立不等式：

$$\frac{\pi^2}{2}<\mu(r)\mu\left(\frac{1-r}{1+3r}\right)<\min\left\{\frac{\pi^2}{2C},\frac{\pi^2}{2}+\log 2\mu(r)\right\} \tag{14}$$

2 引 理

为了证明结论，需要用到下面几个公式及几个引理(参见文献[5]中定理4.1(1)－(5)，式9和式1.11)。

$$\frac{d\kappa(r)}{dr}=\frac{\varepsilon(r)-r'^2\kappa(r)}{rr'^2},\ \frac{d\varepsilon(r)}{dr}=-\frac{\kappa(r)-\varepsilon(r)}{r},$$

$$\frac{d(\kappa(r)-\varepsilon(r))}{dr}=\frac{r\varepsilon(r)}{r'^2},\ \frac{d(\varepsilon(r)-r'^2\kappa(r))}{dr}=r\kappa(r),$$

$$\frac{d\mu(r)}{dr}=-\frac{\pi^2}{4rr'^2\kappa(r)^2}=-\frac{1}{rr'^2F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1,r^2\right)^2},$$

$$\frac{dm(r)}{dr}=\frac{1}{r}\left[1-\frac{4}{\pi}\kappa(r)\varepsilon'(r)\right],$$

$$\varepsilon(r)\kappa'(r)-\kappa(r)\kappa'(r)+\kappa(r)\varepsilon'(r)=\frac{\pi}{2}.$$

引理3即为单调性洛比达法则(Monotone l'Hôpital's Rule)，引自文献[4]中定理1.25；引理4引自文献[6]中定理2.4和2.5(4)；引理5揭示了第一类、第二类完全椭圆积分的分析性质。结果如下：

引理3 设 $(a,b)\in(-\infty,+\infty)$，$f,g:[a,b]\to R$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可微，且 $g'(x)\neq 0$。则当 $f'(x)/g'(x)$ 在 (a,b) 上单调递增(递减)时，函数

$$F(x)\equiv\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}\text{ 和 }G(x)\equiv\frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)}$$

的单调性也是如此。如果函数 $f'(x)/g'(x)$ 的单调性是严格的，那么 F 和 G 的单调性也是严格的。

引理4 当 $(a,b)\in\{(a,b)\mid a,b>0,a+b\geqslant 1,ab-\frac{3}{16}(a+b)\geqslant 0\}$，$r\in(0,1)$ 时，成立不等式：

$$0\leqslant F\left(a,b;a+b;\frac{8r(1+r)}{(1+3r)^2}\right)-\sqrt{1+3r}F(a,b;a+b;r^2)\leqslant\frac{\log 64-R(a,b)}{B(a,b)} \tag{15}$$

$$0 \leqslant \sqrt{1+3r}F(a,b;a+b;1-r^2) - 2F\left(a,b;a+b;\left(\frac{1-r}{1+3r}\right)^2\right) \leqslant \frac{\sqrt{1+3r}(\log 64 - R(a,b))}{B(a,b)} \tag{16}$$

引理 5　函数 $f(r)=[\kappa(r)-\varepsilon(r)]/[\frac{\pi^2}{4r'^2\kappa^2(r)}-1]$ 从(0,1) 到$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$单调递减。

证明：令 $f_1(r)=\kappa(r)-\varepsilon(r)$ 及 $f_2(r)=\frac{\pi^2}{4r'^2\kappa^2(r)}-1$，则 $f_1(0)=f_2(0)=0$，$f(r)=f_1(r)/f_2(r)$，且

$$\frac{f_1'(r)}{f_2'(r)} = \frac{2}{\pi^2}\cdot\varepsilon(r)\cdot r'^2\kappa^2(r)\cdot\frac{r^2\kappa(r)}{\kappa(r)-\varepsilon(r)} \tag{17}$$

因此，由引理 3、式(6) 以及文献[5] 中引理 5.4(1)，即可得到 f 的单调性。另外，利用 I'Hôpital 法则可以得到 $f(0^+)=\frac{\pi}{2}$ 以及 $f(1^-)=0$。

3　定理的证明

定理 1 的证明。

a) $F(0^+)=1$ 显然成立，令 $F_1(r)=m(r)+\log r$，$F_2(r)=\mu(r)+\log r$，则 $F_1(0)=F_2(0)=0$，$F(r)=\frac{F_1(r)}{F_2(r)}$，且

$$\frac{F_1'(r)}{F_2'(r)} = \frac{2-\frac{\pi}{4}\kappa(r)\varepsilon'(r)}{1-\frac{\pi^2}{4r'^2\kappa^2(r)}} = \frac{2-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\varepsilon(r)\kappa'(r)+\kappa(r)\kappa'(r)\right]}{1-\frac{\pi^2}{4r'^2\kappa^2(r)}} = \frac{\frac{4}{\pi}\kappa'(r)[\kappa(r)-\varepsilon(r)]}{\frac{\pi^2}{4r'^2\kappa^2(r)}-1} = \frac{4}{\pi}\kappa'(r)\cdot f(r) \tag{18}$$

由引理 3 及引理 5 知，函数 F 单调递减。根据 I'Hôpital 法则，极限 $F(1^-)=0$ 可以得到。

b) $G_1(1^-)=4\log 2/[\pi-2]$ 显然成立，令 $G_1(r)=\log 4-[\mu(r)+\log r]$，$G_2(r)=\frac{\pi}{2}-\varepsilon(r)$，则 $G_1(0)=G_2(0)=0$，$G(r)=G_1(r)/G_2(r)$，

$$\frac{G'_1(r)}{G'_2(r)} = \frac{\frac{\pi^2}{4r'^2\kappa^2(r)}-1}{\kappa(r)-\varepsilon(r)} = \frac{1}{f(r)} \tag{19}$$

由引理 3 及引理 5，函数 G 单调递增。根据 I'Hôpital 法则，可得极限值 $G(0^+)=2/\pi$。

定理 2 的证明。

a) 令 $x=\sqrt{8r(1+r)}/(1+3r)$，则 $x'=(1-r)/(1+3r)$，以及$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}=\frac{x'(1+3x')^2}{4x}$，利用文献[5] 定理 5.5(2)，

$$\lim_{r\to0^+}Q(r) = \lim_{r\to0^+}\{2\mu(x)+2\log x-[\mu(r)+\log r]+\log r-2\log x\} = \log\frac{1}{2} \tag{20}$$

由于 $\mu(1^-)=0$，则明显有$\lim\limits_{r\to1^-}Q(r)=0$。求导得

$$Q'(r) = -2\frac{1}{xx'^2F(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;x^2)^2}\cdot\frac{x'(1+3x')^2}{4x} + \frac{1}{rr'^2F(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;r^2)^2} = \frac{F(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;x^2)^2-(1+3r)F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;r^2\right)^2}{rr'^2F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;r^2\right)^2F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;x^2\right)^2} \tag{21}$$

故在引理 4 式(15) 中取 $a=b=1/2$ 便可得到 $Q'(r)\geqslant 0$，即得函数 Q 的单调性。由 $\lim\limits_{r\to0^+}Q(r) < Q(r) < \lim\limits_{r\to1^-}Q(r)$ 及

$$\frac{2\mu(\frac{\sqrt{8r(1+r)}}{1+3r})}{\mu(r)} = 2\frac{F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;\frac{(1-r)^2}{(1+3r)^2}\right)}{F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;\frac{8r(1+r)}{(1+3r)^2}\right)}.$$

$$\frac{F(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;r^2)}{F(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;1-r^2)} \geqslant \frac{\sqrt{1+3r}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;r^2\right)}{F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;1-r^2\right)}.$$

$$\frac{F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;1-r^2\right)-\frac{\log 4}{\pi}}{F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;\frac{8r(1+r)}{(1+3r)^2}\right)} \geqslant \left[1-\frac{\log 4}{\pi F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;\frac{8r(1+r)}{(1+3r)^2}\right)}\right]\cdot\left[1-\frac{\log 4}{\pi F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;1-r^2\right)}\right] \geqslant \left[1-\frac{\log 4}{\pi}\right]^2 \tag{22}$$

便可以得到不等式(13)。

b) 令 $t=(1-r)/(1+3r)$，则 $t'=\sqrt{8r(1+r)}/(1+3r)$，$r'=\sqrt{8t(1+t)}/(1+3t)$，且 $S(r)=-Q(t)$。因此根据本文第 1 节的结论可得函数 S 的单调性以及函数 S 的端点值。又因为

$$\mu(r)\mu\left(\frac{1-r}{1+3r}\right)=\frac{\pi^2}{4}\frac{\mu(t)}{\mu\left(\frac{\sqrt{8t(1+t)}}{1+3t}\right)}\leqslant\frac{\pi^2}{2C} \tag{23}$$

且根据恒等式(11)及函数 S 的范围可以得到$\frac{\pi^2}{2}<\mu(r)\mu(\frac{1-r}{1+3r})<\frac{\pi^2}{2}+\log 2\mu(r)$，故不等式(14)得证。

4 结 论

本文通过研究 Grötzsch 环函数 $\mu(r)$与第二类完全椭圆积分 $\varepsilon(r)$及拟共形理论中的 Hübner 函数 $m(r)$组合的单调性质，获得了数论中 Ramanujan 经典模方程中超几何函数比的一些不等式，改进了已有的结果，同时通过研究 Grötzsch 环函数 $\mu(r)$的分析性质，获得了 $\mu(r)$形如 Landen 恒等式的不等式形式，这些结果可用于 Ramanujan 经典模方程的进一步研究。

参考文献：

[1] QIU S L, VUORINEN M. Handbook of Complex Analysis: Special Function in Geometric Function Theory[M]. Elsevier B V, 2005: 621-659.
[2] ANDERSON G D, VAMANAMURTHY M K. Rotation of plane quasiconformal mappings[J]. Tôhoku Math J, 1971, 23(2): 605-620.
[3] BERNDT B C, BHARGAVA S, GARVAN F G. Ramanujan's theories of elliptic functions to alternative bases[J]. Trans Amer Math Soc, 1995, 347: 4163-4244.
[4] ANDERSON G D, VAMANAMURTHY M K, VUORINEN M. Conformal Invariants, Inequalities, and Quasiconformal Mappings [M]. New York: John Wiley & Sons, 1997: 32-47.
[5] ANDERSON G D, QIU S L, VAMANAMURTHY M K, et al. Generalized elliptic integrals and modular equations[J]. Pacific J Math, 2000, 192(1): 1-37.
[6] 王森坤，褚玉明，蒋月评，等. 零平衡超几何函数的一类二次变换不等式[J]. 数学物理学报，2014，34(A)：999-1007.

Some Inequalities for Grötzsch Ring Function

MA Xiaoyan[1], *TU Guoyan*[2]
(1. School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China;
2. Tongji Zhejiang College, Jiaxing 314051, China)

Abstract: This paper establishes the relationship among the Grötzsch ring function $\mu(r)$, the complete elliptic integrals of the second kind $\varepsilon(r)$ and the Hübner function m(r) in Ramanujan modular equation. By studying the monotonicity properties of $\mu(r)$ and some combinations of elementary functions and special funcitons, several inequalities are gained. The upper and lower boundaries of $\mu(r)+\log(r)$ are given according to these results. Thus, known estimation is improved. Meanwhile, inequality form of $\mu(r)$ such as Landen identical equation is given. All results contribute to studying the theory of Ramanujan modular equation.

Key words: Gaussian hypergeometric function; Grötzsch ring function; Ramanujan's modular equation; inequality

（责任编辑：康 锋）