浙江理工大学学报(自然科学版),第 33 卷,第 3 期,2015 年 5 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University (Natural Sciences)
Vol. 33, No. 3, May 2015

文章编号: 1673-3851 (2015) 03-0414-04

关于均值有界变差函数的重要不等式

万秋阅
(浙江理工大学理学院, 杭州 310018)

摘　要: 在分析均值有界变差数列的相关不等式的基础上,将均值有界变差条件推广到函数空间,并通过分部积分法和适当放缩法等数学方法,建立和证明了 Lebesgue 可测函数在此条件下的两个重要不等式。

关键词: 均值有界变差; Lebesgue 可测函数; 不等式

中图分类号: O174.21　　**文献标志码:** A

0 引　言

非负性条件和单调性条件是数学中最基本的两个条件。三角级数各种收敛性的研究,始于 Chaundy 和 Jolliffe 的关于正弦级数的一致收敛性的一个充要条件的命题,其中对应项的系数满足非负单调性条件(MS)。之后经过 Zhou 等[1-2] 的努力,在保证充分必要条件仍成立的情况下,将单调性条件推广到分组有界变差条件(GBV),非单边有界变差条件(NBV),并最终推广到均值有界变差条件(MVBV),并证明了此条件在本质上已不能再改进。在此基础上,Móricz 等[3] 研究者建立了非单边有界变差函数(NBVF)和均值有界变差函数(MVBVF)等概念,如果 Lebesgue 可测函数 $f:R_+\to R_+$ 是局部有界变差函数并且存在依赖于函数的常数 $M>0$ 以及 $A>1$,对所有的自然数 $a>A$ 和某个 $\lambda\geqslant 2$ 满足

$$\int_a^{2a} |\,\mathrm{d}f\,| \leqslant \frac{M}{a}\int_{a/\lambda}^{\lambda a} f(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

其中 $R_+=[0,+\infty)$,则称 $f(x)$ 是均值有界变差函数,记为 $f(x)\in$ MVBVF。并类比三角级数的结论证明了 Fourier 变换中的对应定理。

为了进一步推广均值有界变差条件在函数空间的 L^1 收敛性、L^p 可积性、加权可积性等结论,与之对应的重要不等式的证明也是必不可少的。MVBV 这一概念的研究一直是很受关注的,周颂平和冯磊在研究均值有界变差数列的加权可积性的前提下得到了这样两个不等式:设实数序列 $\{a_n\}\in$ MVBVS,则对所有的 n 和 $x\in[0,\pi]$, $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx\right| = O(1)$ 成立当且仅当 $na_n=O(1)$;若 $0<\gamma<1$,则对任意的 n, $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx\right| = O(x^{-\gamma})$ 成立当且仅当 $n^{1-\gamma}a_n=O(1)$。

通过对在均值有界变差数列以上重要不等式的比较,并结合函数积分形式与数列的区别,本文建立了 Lebesgue 可测函数与之相对应的两个重要不等式并给出了证明,便于进一步研究均值有界变差函数的加权可积性,也提供了在函数空间对均值有界变差条件研究的思路和方向。本文中 M 表示在(1)式中出现的正常数,M_1、M_2、M_3、M_4、M_5 表示正常数,其值在不同的场合下可能有所不同。

1 定　理

引理 1　设函数 $f(x)\in$ MVBVF,则存在 $M>0$ 和某个 $\lambda\geqslant 2$,使得当 $x>A$ 时,有

$$xf(x)\leqslant M\int_{x/\lambda}^{\lambda x} f(t)\mathrm{d}t。$$

证明: 由引言中给出的定义可知,对于 $A<x_0\leqslant y\leqslant 2x_0$,有:

$f(x_0)-f(y)\leqslant |\,f(x_0)-f(y)\,|\leqslant$

收稿日期: 2014−06−18
作者简介: 万秋阅(1989−),女,湖北襄阳人,硕士研究生,主要从事调和分析方面的研究。

$$\int_{x_0}^{2x_0}|\mathrm{d}f(x)|\leqslant\frac{M}{x_0}\int_{x_0/\lambda}^{\lambda x_0}|f(x)|\mathrm{d}x=\frac{M}{x_0}\int_{x_0/\lambda}^{\lambda x_0}f(x)\mathrm{d}x$$

两边同时积分,即有:

$$\int_{x_0}^{2x_0}(f(x_0)-f(y))\mathrm{d}y\leqslant\int_{x_0}^{2x_0}\frac{M}{x_0}\int_{x_0/\lambda}^{\lambda x_0}f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$x_0\frac{M}{x_0}\int_{x_0/\lambda}^{\lambda x_0}f(x)\mathrm{d}x=M\int_{x_0/\lambda}^{\lambda x_0}f(x)\mathrm{d}x,$$

所以得到:

$$x_0f(x_0)\leqslant M\int_{x_0/\lambda}^{\lambda x_0}f(x)\mathrm{d}x\tag{2}$$

定理 1　设函数 $f(x)\in\mathrm{MVBVF}$,则对于任意给定的 $b>1$ 和 $t\in(0,+\infty)$,

$$\left|\int_1^b f(x)\sin xt\,\mathrm{d}x\right|=O(1)$$

成立的充分必要条件是:

$$xf(x)=O(1),x\in[1,+\infty)。$$

定理 2　设函数 $f(x)\in\mathrm{MVBVF}$,则对于任意给定的 $b>1$ 和 $t\in[0,+\infty)$,

$$\left|\int_1^b f(x)\sin xt\,\mathrm{d}x\right|=O(t^{-\gamma})$$

成立的充分必要条件是:

$$x^{1-\gamma}f(x)=O(1),x\in[1,+\infty)。$$

2　定理的证明

2.1　定理 1 的证明

首先,由 $\left|\int_1^b f(x)\sin xt\,\mathrm{d}x\right|=O(1)$,分为以下两种情况:

当 $x_0\in[\lambda,+\infty)$时,从

$$\left|\int_1^{\lambda x_0}f(x)\sin tx\,\mathrm{d}x\right|=O(1)$$

与

$$\left|\int_1^{x_0/\lambda}f(x)\sin tx\,\mathrm{d}x\right|=O(1)$$

得到:

$$\left|\int_{x_0/\lambda}^{\lambda x_0}f(x)\sin tx\,\mathrm{d}x\right|=O(1)\tag{3}$$

令 $t=\frac{\pi}{2\lambda x_0}$,当$\frac{x_0}{\lambda}\leqslant x\leqslant\lambda x_0$ 时,$\frac{\pi}{2\lambda^2}\leqslant tx\leqslant\frac{\pi}{2}$。此时,

$$\int_{\frac{x_0}{\lambda}}^{\lambda x_0}f(x)\sin tx\,\mathrm{d}x\geqslant\sin\frac{\pi}{2\lambda^2}\int_{\frac{x_0}{\lambda}}^{\lambda x_0}f(x)\mathrm{d}x\tag{4}$$

结合式(2)和式(4)可知,当 $x_0\in[\lambda,+\infty)$时,$x_0f(x_0)=O(1)$成立。

当 $x\in[1,\lambda)$时,$xf(x)\leqslant\lambda f(x)$。由于 $f(x)$是局部有界变差函数,则当 $x\in[1,\lambda)$时,$f(x)$有界,即 $f(x)\leqslant M_1$,有 $xf(x)\leqslant\lambda M_1$。因此,$xf(x)=O(1)$,从而必要性得证。

另一方面,当 $t=0$ 时,$\left|\int_1^b f(x)\sin xt\,\mathrm{d}x\right|=O(1)$显然成立。下设 $t>0$,因为 $xf(x)=O(1)$,则存在 $M_2>0$,对所有的 $x\in[1,+\infty)$,有 $xf(x)\leqslant M_2$。

当 $1<b<\frac{1}{t}$时,

$$\left|\int_1^b f(x)\sin xt\,\mathrm{d}x\right|\leqslant t\int_1^b x|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant$$

$$t\int_1^{1/t}x|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant M,$$

当 $0<\frac{1}{t}<1<b$ 时,

$$\left|\int_1^b f(x)\sin xt\,\mathrm{d}x\right|=\left|-\frac{1}{t}\int_1^b f(x)\mathrm{d}\cos tx\right|\leqslant$$

$$\frac{1}{t}\left|f(b)+f(1)+\int_1^b\cos tx\,\mathrm{d}f\right|\leqslant$$

$$\frac{1}{t}|f(b)+f(1)|+\frac{1}{t}\int_1^b|\mathrm{d}f|\tag{5}$$

由 $f(x)\in\mathrm{MVBVF}$,且 $f(x)$是局部有界变差函数可知,存在 $M_3>0$ 与 $B>1$,使得 $\int_1^B|\mathrm{d}f|\leqslant M_3$。从而

$$\int_1^b|\mathrm{d}f|=\int_1^B|\mathrm{d}f|+\int_B^b|\mathrm{d}f|\leqslant$$

$$M_3+\int_B^\infty|\mathrm{d}f|\leqslant M_3+\sum_{j=0}^\infty\int_{2^jB}^{2^{j+1}B}|\mathrm{d}f|\leqslant$$

$$M_3+M\sum_{j=0}^\infty\frac{1}{2^jB}\int_{2^jB/\lambda}^{\lambda2^{j+1}B}|f(x)|\mathrm{d}x\leqslant$$

$$M_3+\frac{MM_1}{B}\sum_{j=0}^\infty\frac{1}{2^j}\int_{2^jB/\lambda}^{\lambda2^{j+1}B}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\leqslant$$

$$M_3+\frac{M_4}{B}\sum_{j=0}^\infty\frac{1}{2^j}\leqslant$$

$$M_5,$$

所以当 $0<\frac{1}{t}<1<b$ 时,

$$\left|\int_1^b f(x)\sin xt\,\mathrm{d}x\right|\leqslant M。$$

当 $1\leqslant\frac{1}{t}<b$ 时,结合以上两种不同情况不等式仍然成立。

综上所述,定理 1 证毕。

2.2　定理 2 的证明

首先,因为 $x^{1-\gamma}f(x)=O(1)$,$x\in[1,+\infty)$,则存在 $M_1>0$,使得 $x^{1-\gamma}f(x)\leqslant M_1$,即 $xf(x)\leqslant x^{\gamma}M_1$。

当 $1<b<\frac{1}{t}$时,

$$\left|\int_1^b f(x)\sin xt\,\mathrm{d}x\right| \leqslant t\int_1^b x\mid f(x)\mid \mathrm{d}x \leqslant$$
$$t\int_1^{1/t} x\mid f(x)\mid \mathrm{d}x \leqslant$$
$$tM_1\int_1^{1/t} x^\gamma \mathrm{d}x = \frac{M_1 t}{1+\gamma}\left(\frac{1}{t^{\gamma+1}}-1\right) \leqslant$$
$$M_2 t^{-\gamma};$$

当 $1<\frac{1}{t}<b$ 时，

$$\left|\int_1^b f(x)\sin xt\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_1^{1/t} f(x)\sin tx\,\mathrm{d}x\right| +$$
$$\left|\int_{1/t}^b f(x)\sin tx\,\mathrm{d}x\right| =: I_1 + I_2,$$

类似于前一情况的证明，可得

$$I_1 \leqslant t\int_1^{1/t} x\mid f(x)\mid \mathrm{d}x \leqslant M_3 t^{-\gamma},$$

而

$$I_2 = \left|-\frac{1}{t}\int_{1/t}^b f(x)\,\mathrm{d}\cos tx\right| \leqslant$$
$$\frac{1}{t}\left|f(b)+f\left(\frac{1}{t}\right)+\int_{1/t}^b \cos tx\,\mathrm{d}f\right| \leqslant$$
$$\frac{1}{t}\left|f(b)+f\left(\frac{1}{t}\right)\right| + \frac{1}{t}\int_{1/t}^b \mid \mathrm{d}f\mid,$$

这样，

$$\int_{\frac{1}{t}}^b \mid \mathrm{d}f\mid \leqslant \int_{\frac{1}{t}}^\infty \mid \mathrm{d}f\mid = \sum_{j=0}^\infty \int_{2^j/t}^{2^{j+1}/t} \mid \mathrm{d}f\mid \leqslant$$
$$Mt\sum_{j=0}^\infty \frac{1}{2^j}\int_{2^j/t\lambda}^{\lambda 2^{j+1}/t} \mid f(x)\mid \mathrm{d}x \leqslant$$
$$Mt\sum_{j=0}^\infty \frac{1}{2^j}\int_{2^j/t\lambda}^{\lambda 2^{j+1}/t} x^\gamma M_1\,\mathrm{d}x \leqslant M_4 t^{-\gamma},$$

这就有：

$$I_2 \leqslant M_5 t^{-\gamma}。$$

综上，

$$\left|\int_1^b f(x)\sin xt\,\mathrm{d}x\right| = O(t^{-\gamma})。$$

另一方面，因为 $\left|\int_1^b f(x)\sin xt\,\mathrm{d}x\right| = O(t^{-\gamma})$，有

$$t^\gamma\left|\int_1^b f(x)\sin xt\,\mathrm{d}x\right| = O(1)。$$

当 $x_0\in[\lambda,+\infty)$ 时，令 $t=\frac{\pi}{2\lambda x_0}$，当 $\frac{x_0}{\lambda}\leqslant x\leqslant \lambda x_0$ 时，$\frac{\pi}{2\lambda^2}\leqslant tx\leqslant\frac{\pi}{2}$。此时，

$$t^\gamma\int_{x_0/\lambda}^{\lambda x_0} f(x)\sin tx\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\frac{\pi}{2\lambda}\right)^\gamma x_0^{-\gamma}\sin\frac{\pi}{2\lambda^2}\int_{x_0/\lambda}^{\lambda x_0} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

则有：

$$\int_{x_0/\lambda}^{\lambda x_0} f(x)\,\mathrm{d}x = O(x_0^\gamma)。 \tag{6}$$

由引理中的式(2)已经知道：

$$x_0 f(x_0) \leqslant M\int_{x_0/\lambda}^{\lambda x_0} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

再结合式(5)可得到：

$$x_0^{1-\gamma} f(x_0) = O(1)。$$

又当 $x_0\in[1,\lambda)$ 时，有：

$$x_0^{1-\gamma} f(x_0) \leqslant \lambda^{1-\gamma} f(x_0)。$$

因为 $f(x)$ 局部有界变差，则当 $x_0\in[1,\lambda)$ 时，$f(x_0)$ 有界，即 $f(x_0)\leqslant M$。

此时有：

$$x_0^{1-\gamma} f(x_0) \leqslant \lambda^{1-\gamma} M。$$

所以，对所有 $x\in[1,+\infty)$ 有：

$$x^{1-\gamma} f(x) = O(1)。$$

综上所述，定理 2 证毕。

3 结 论

本文结合均值有界变差数列的相关不等式的研究和讨论，运用数列级数形式与函数积分形式的区别和联系，通过举一反三得到了满足有界均值变差条件的 Lebesgue 可测函数的两个重要不等式，是均值有界变差数列在函数空间的基本推广应用，其中定理 2 的加权不等式为均值有界变差函数加权可积性的研究提供了有利条件。同样以类比三角级数的重要不等式、L^1 收敛性和 L^p 可积性的证明方法，更便于研究在函数空间中 Lebesgue 函数的相关性质。

致谢：

作者对周颂平教授的指导和帮助表示衷心的感谢。

参考文献：

[1] 周颂平. 三角级数研究中的单调性条件：发展和应用[M]. 北京：科学出版社，2012：124-127.

[2] Zhou S P, Zhou P, Yu D S. Ultimate generalization to monotonicity for uniform convergence of trigonometric series[J]. Science China Mathematics, 2010, 53(7): 1853-1862.

[3] Móricz F. On the uniform convergence of sine integrals[J]. Journal of Mathematical Analysis and Application. 2009, 354: 213-219.

Important Inequalities of Mean Value Bounded Variation Functions

WAN Qiu-yue

(School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: On the premise of analyzing some inequalities related to the mean value bounded variation sequences, this paper extends the mean value bounded variation concept to the function space, establishes and proves two important inequalities for Lebesgue measurable functions under this concept by mathematical methods such as integration by parts and the appropriate scaling technique.

Key words: mean value bounded variation; Lebesgue measurable function; inequality

(责任编辑:康 锋)

(上接第 393 页)

Improvement of Hopfield Network Capacity Based on Clonal Selection Algorithm

WEI Bing[1], *DAI Wen-zhan*[2]

(1. School of Mechanical Engineering & Automation, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China;
2. School of Information and Electronic Engineering, Zhejiang Gongshang University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: The capacity of Hopfield network is a very important factor for the accuracy of network pattern recognition. In order to further boost network capacity of Hopfield, optimized Hopfield network capacity based on clonal selection algorithm is proposed. Firstly, clonal selection algorithm is introduced to Hopfield network. Initial input of Hopfield network serves as antigen of clonal selection algorithm. Then, weight matrix generates randomly as initial antibody of clonal selection algorithm. Finally, initial antibody is cloned, crossed and varied according to clonal selection algorithm. Network optimization weight is selected according to appetency to improve Hopfield network capacity. The above method is applied to identify the samples containing noise. The results show that compared with traditional Hopfield network, the method can effectively improve Hopfield network capacity and provide a new thought for improving memory capacity of Hopfield neural network.

Key words: Hopfield networks; clonal selection algorithm; memory capacity

(责任编辑:康 锋)