浙江理工大学学报,第 33 卷,第 1 期,2015 年 1 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
Vol. 33, No. 1, Jan. 2015

文章编号:1673-3851 (2015) 01-0146-03

分组有界变差与几乎单调递减的关系

陈晓丹
(浙江理工大学理学院,杭州 310018)

摘　要: 在 Fourier 分析中,对一些经典定理单调性的推广很有意义。探讨了分组有界变差与几乎单调递减之间的关系;利用数列本身特性,采用构造的方法,给出平凡的数列,并结合三角级数的一致收敛性等相关定理,构造更具有实用价值的数列证明了两者的互不包含关系。

关键词: 分组有界变差; 几乎单调递减; 互不包含关系
中图分类号: O174.21　　**文献标志码:** A

0　引　言

在一致收敛和平均收敛的问题上,三角级数(Fourier)系数的单调递减条件及其推广研究是相关研究者关注的焦点。这类研究开始于英国学者 Chaundy 和 Jollife(1916)的工作及 Young(1913)的工作,产生了大量优秀的成果[1]。在系数数列集合间的关系中,目前已有很多好的成果,比如拟单调(QM)、剩余有界变差(RBV)等重要概念的引入。Le 和 Zhou 在文献[2]提出了兼容两个发展方向(拟单调和有界变差)的分组有界变差(GBV)概念。历史上还出现过其他一些推广性的条件,几乎单调递减(AMS)就是其中之一。对于拟单调和有界变差这两个方向的研究已有比较丰富的结果,但关于 AMS 与各集合之间的关系方面的研究相对较少。

对三角级数的一致收敛方面的研究,目前已经推广到均值有界变差(MVBV)概念,但出乎意料的是 AMS 条件却无法代替经典定理中的单调递减条件(参见文献[3])。在 Fourier 最佳逼近中,AMS 与拟几何递减条件有一定的关系。因此对 AMS 的探究可以增强对数列单调性的进一步认识,有助于对各种经典定理进行探索性推广,为后继研究者提供方便。本文中我们主要研究 AMS 与 GBVS 之间的关系。

1　分组有界变差数列与几乎单调递减数列的定义

定义 1　如果非负数列 $A=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 对所有自然数 n 满足 $\sum_{k=n}^{2n}|\Delta a_k|\leqslant M(A)a_n$,其中 $M(A)$ 是只与数列 A 相关的正常数,则称数列 A 为分组有界变差数列,简记为 $A\in$ GBVS。

定义 2　如果非负数列 $A=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 对任意 $k\geqslant n$,有 $a_k\leqslant M(A)a_n$ 成立,其中 $M(A)$ 是只与数列 A 相关的正常数,则称数列 A 为几乎单调递减数列,简记为 $A\in$ AMS。

文献[3]中已经指出 AMS 与 GBVS 之间互不包含,但目前并未给出确切证明。本文主要用构造数列的方法来证明两者的互不包含关系。

2　定理及其证明

定理　GBVS$\not\subset$AMS,AMS$\not\subset$GBVS。

证明:首先考虑 GBVS$\not\subset$AMS。

设数列 $a_n=n^2\geqslant 0$,则对于任意自然数 n,有下列不等式

$$\sum_{k=n}^{2n}|\Delta a_k|=a_{2n+1}-a_n=(2n+1)^2-n^2\leqslant 8n^2=8a_n,$$

收稿日期:2014—06—25
作者简介:陈晓丹(1989—),女,江苏泰州人,硕士研究生,主要从事逼近论的构造性分析方面的研究。

即数列$\{a_n\}\in$ GBVS。

其中，只需令 $k=n^2$，有 $a_k=k^2=n^4\geqslant na_n$，即 $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{a_k}{a_n}=\infty$，故数列$\{a_n\}\notin$ AMS。

接下来，考虑 AMS$\not\subset$GBVS。

设数列 $a_m=\begin{cases}1+\frac{1}{m}, m=2k\\ 2-\frac{1}{m}, m=2k-1\end{cases}, k=1,2,3,\cdots,$

易知 $a_m\geqslant 0$。

假定 $m\geqslant n$，分情况讨论：

1）m、n 同为偶数时，由于数列 a_m 单调递减，则 $a_m\leqslant a_n$。

2）m、n 同为奇数时，即 $a_m=2-\frac{1}{m}$，$a_n=2-\frac{1}{n}$，则

$$\frac{a_m}{a_n}=\frac{2-\frac{1}{m}}{2-\frac{1}{n}}\leqslant\frac{2}{2-\frac{1}{n}}=\frac{2n}{2n-1}\leqslant 2。$$

3）m、n 为一奇一偶时，

（a）m 为奇数，n 为偶数，即 $a_m=2-\frac{1}{m}$，$a_n=1+\frac{1}{n}$，则

$$\frac{a_m}{a_n}=\frac{2-\frac{1}{m}}{1+\frac{1}{n}}\leqslant\frac{2}{1+\frac{1}{n}}<2。$$

（b）m 为偶数，n 为奇数，即 $a_m=1+\frac{1}{m}$，$a_n=2-\frac{1}{n}$，则

$$\frac{a_m}{a_n}=\frac{1+\frac{1}{m}}{2-\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1+\frac{1}{m}}{1}\leqslant 2。$$

综上可知，对任意 $m\geqslant n$，都有 $a_m\leqslant 2a_n$，即数列$\{a_n\}\in$ AMS。

但当 n 为偶数时，有

$$\sum_{k=n}^{2n}|\Delta a_k|=\sum_{k=n}^{2n}\left|1+\frac{1}{k}-\left(2-\frac{1}{k+1}\right)\right|=\sum_{k=n}^{2n}\left(1-\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=n+1-\sum_{k=n}^{2n}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)\geqslant n+1-(n+1)\frac{2}{n}=(n-2)\left(1+\frac{1}{n}\right)=(n-2)a_n,$$

即 $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=n}^{2n}|\Delta a_k|}{a_n}=\infty$，故数列$\{a_n\}\notin$ GBVS。

证毕。

以上所构造的两个数列已经表明了 GBVS 与 AMS 互不包含，但这两个数列都不保证$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。从实用意义上来看，我们希望能保持极限为零的特性，否则上面的例子都是平凡的。为了对三角级数的一致收敛及其他经典定理进行更深刻的研究与应用，我们有必要进行深一步的探讨。

记 $v_m=2^{2^m}$，定义非负数列$\{b_n\}$：

$$b_n=\begin{cases}\frac{1}{m^2v_m}, n=v_m;\\ b_{v_m}\frac{n}{v_m}, v_m<n\leqslant mv_m;\\ b_{mv_m}, mv_m<n<v_{m+1}.\end{cases}$$

根据定义可以看出，对所有的 $n\geqslant 1$，均满足 $b_{n+1}\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)b_n$，这说明$\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$单调递减（即$\{b_n\}$拟单调）。由文献[3]，我们知道$\{b_n\}\in$ GBVS。然而$\frac{b_{mv_m}}{b_{v_m}}=m$，有$\limsup\limits_{m\to\infty}\frac{b_{mv_m}}{b_{v_m}}=\infty$，故$\{b_n\}\notin$ AMS。

这说明存在数列$\{b_n\}$，满足$\{b_n\}\in$ GBVS，但$\{b_n\}\notin$ AMS，即 GBVS$\not\subset$AMS。

另外，设数列 $b_n=\left(1+\frac{(-1)^n}{2}\right)\frac{1}{j+1}$，其中 $2^j\leqslant n<2^{j+1}$，$j=0,1,2\cdots$。

对于任意的 $k\geqslant n$，易知 $b_k\leqslant 3b_n$，故数列$\{b_n\}\in$ AMS。然而 $\sum_{k=2^j}^{2^{j+1}}|\Delta b_k|\geqslant\frac{2^j-1}{j+1}=\frac{2}{3}(2^j-1)b_{2^j}$，即 $\limsup\limits_{j\to\infty}\frac{\sum_{k=2^j}^{2^{j+1}}|\Delta b_k|}{b_{2^j}}=\infty$，故$\{b_n\}\notin$ GBVS。

因此，存在数列$\{b_n\}$，使其满足$\{b_n\}\in AMS$，但$\{b_n\}\notin$ GBVS，即 AMS$\not\subset$GBVS。

由以上两个例子，定理得以证明。

3　结　语

本文主要通过构造例子说明满足 AMS 和 GBVS条件之一但不满足另一条件的数列，从平凡数列及不平凡数列两方面给出了 AMS 与 GBVS 之间互不包含的关系。

参考文献：

[1] Young W H. On the Fourier series of bounded functions [J]. Proc London Math Soc, 1913, 12: 41-70.

[2] Le R J, Zhou S P. A new condition for the uniform

convergence of certain trigonometric series[J]. Acta Math. Hungar, 2005, 108: 161-169.

[3] 周颂平. 三角级数研究中的单调性条件：发展和利用[M]. 北京：科学出版社，2012:9-20.

Relationship between Grouped Bound Variation and Almost Monotonic Decreasing

CHEN Xiao-dan

(School of Sciences, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: In Fourier analysis, it is of great significance for the popularization of monotonicity of some classic theorems. This paper discusses the relationship between group bounded variation and almost monotonic decreasing. It makes use of characteristic of series, and adopts construction method to give ordinary series. In addition, it combines with uniform convergence and other relevant theorems of trigonometric series to construct the series with more practical value so as to prove mutual exclusive relationship between them.

Key words: group bounded variation; almost monotonic decreasing; mutual exclusive relationship

(责任编辑：康　锋)

(上接第139页)

Monotropic Function Representation of Metrics on Fuzzy-number Space

LI Xue-fen, FAN Tai-he

(School of Sciences, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 31800, China)

Abstract: By taking a specific triangular fuzzy number as structural element, this paper gives a bijection between the set of all fuzzy numbers and the set of all bounded, monotonic increasing and upper semi-continuous functions defined on $[-1, 1]$, thus get a monotropic function representation of fuzzy number. On the basis of above representation, this paper gives the monotropic function representation of various metrics on fuzzy number space, such as the supremum metric, the L_p metrics, and the sendograph metric, so as to fully translate the study on metric (topology) properties of fuzzy numbers into the study on the corresponding properties on the space of all bounded, monotonic increasing and upper semi-continuous functions.

Key words: fuzzy number; metrics; monotropic function; homeomorphism

(责任编辑：康　锋)