浙江理工大学学报，第 33 卷，第 1 期，2015 年 1 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
Vol. 33，No. 1，Jan. 2015

文章编号：1673-3851 (2015) 01-0135-05

模糊数度量的单值函数表示

李雪粉，樊太和

（浙江理工大学理学院，杭州 310018）

摘　要：基于一个具体的三角模糊数作为结构元，给出了模糊数与定义于[－1,1]上的单调递增有界且上半连续的函数构成的集合之间的一一对应关系，从而得到了模糊数的单值函数表示。在上述表示基础上，给出了模糊数空间上的各种度量如上确界度量、L_p 度量、sendograph 度量的单值函数表现，从而将对模糊数的度量（拓扑）性质的研究完全转化为对普通单调递增有界且上半连续的函数空间中相应性质的研究。

关键词：模糊数；度量；单值函数；同胚

中图分类号：O175.14　　　**文献标志码**：A

1　引言和预备知识

文献[1]提出了模糊数的结构元表示定理，证明了基于一个结构元可以用单调函数表示模糊数。这一表示定理解决了模糊集论中的分解定理、表现定理和扩张原理这三大定理的运用在计算中受参数遍历性限制的问题。本文基于上述表示定理，首先通过固定一个特定的三角模糊数作为结构元，给出了模糊数空间与定义于[－1,1]上的单调递增有界且上半连续的函数集合 M_J 之间的一一对应；然后基于上述对应给出了模糊数空间上的各种度量如上确界度量、L_p 度量、sendograph 度量的单值函数表示，从而将对模糊数的度量（拓扑）性质的研究，完全转化为对普通单调递增有界且上半连续的函数空间中相应性质的研究。

本文中 I 表示单位区间[0,1]，J 表示闭区间[－1,1]，M_J 表示定义在 J 上的单调递增、有界且上半连续的实值函数全体。

定义 1.1[2]　设 u 为实数域 R 上的模糊集，其隶属函数为 $u(x)$，如果 $u(x)$ 满足下述性质：

（1）u 是正规的，即存在 $x_0\in R$，使得 $u(x_0)=1$；

（2）u 是模糊凸的，即对于任意的 $x,y\in R$ 和 $r\in I$，有：

$$u(rx+(1-r)y)\geqslant\min\{u(x),u(y)\};$$

（3）u 是上半连续的；

（4）$u_0=cl\{x\,|\,x\in R,u(x)>0|\}$ 是紧致的。

则称 u 是一个模糊数。

全体模糊数构成的集合记为 ε^1。

设 $u\in\varepsilon^1,\alpha\in I$，$u$ 的 α 截集 $u_\alpha=[u_\alpha^-,u_\alpha^+]$ 为非空有界闭区间。

对于任意的 $A,B\in R^n$，A 与 B 之间的 Hausdorff 距离[2]定义为：

$$d_H(A,B)=\max\{d_H^*(A,B),d_H^*(B,A)\},$$

其中

$$d_H^*(B,A)=\sup\{\inf\{\|b-a\|:a\in A\}:b\in B\}。$$

以下是模糊数空间上定义的几个常用度量[2]。

定义 1.2　设 $u,v\in\varepsilon^1$，定义

$$d_\infty(u,v)=\sup\{d_H([u]_\alpha,[v]_\alpha):\alpha\in I\}=\sup_{\alpha\in I}\{\max\{|u_\alpha^- -v_\alpha^-|,|u_\alpha^+ -v_\alpha^+|\},$$

$$d_p(u,v)=\left(\int_0^1 d_H([u]_\alpha,[v]_\alpha)^p\,\mathrm{d}\alpha\right)^{\frac{1}{p}}(1\leqslant p<\infty),$$

$$D_\infty(u,v)=d_H(send(u),send(v)),$$

其中 $send(u)=\{(x,\alpha)\in[u]^0\times I:u(x)\geqslant\alpha\}$。

则 d_∞、$L_p(1\leqslant p<+\infty)$ 和 D_∞ 均为 ε^1 上度量，分别称为上确界度量、L_p 度量和 sendograph 度量。

收稿日期：2014－07－04

基金项目：国家自然科学基金项目（61170110,11171308,61379018）

作者简介：李雪粉（1988－），女，河南商丘人，硕士研究生，主要从事不确定性数学理论方面的研究。

设 $f\in M_J$，如果 f 是严格单调递增的连续函数，则 f 的反函数 f^{-1} 存在并且也是严格单调递增连续函数，而当 f 不连续时，f 不是 J 到 $[f(-1),f(1)]$ 的满射，从而 f 的反函数不存在。为了定义反函数，文献[1]给出了如下延拓反函数的概念。

定义 1.3[1] 设 $f\in M_J$，f 的延拓反函数定义如下：对任意 $c\in[f(-1),f(1)]$，

记 $\lim\limits_{x\to c-0}f(x)=y_-$，$\lim\limits_{x\to c+0}f(x)=y_+$，

(1) 当 $y_+\leqslant 0$ 时，定义 $f^{-1}(c)=y_+$；

(2) 当 $y_-\geqslant 0$ 时，定义 $f^{-1}(c)=y_-$；

(3) 当 $y_-<0<y_+$ 时，定义 $f^{-1}(c)=\{y_-,y_+\}$。

为了下面讨论方便起见，将对定义 1.3 中条件(3)略作修改，引入下述延拓集值反函数概念：

定义 1.4 设 $f\in M_J$，f 的延拓集值反函数定义：对任意 $c\in[f(-1),f(1)]$，记 $\lim\limits_{x\to c-0}f(x)=y_-$，$\lim\limits_{x\to c+0}f(x)=y_+$。

(1) 当 $y_+\leqslant 0$ 时，定义 $f^{-1}(c)=y_+$；

(2) 当 $y_-\geqslant 0$ 时，定义 $f^{-1}(c)=y_-$；

(3) 而当 $y_-<0<y_+$ 时，定义 $f^{-1}(c)=[y_-,y_+]$。

容易验证 f 的延拓集值反函数是定义在 $[f(-1),f(1)]$ 上的上半连续集值函数。

定义 1.5 设 $f\in M_J$，定义 $\hat{f}:J\to I(R)$ 如下：

$$\hat{f}(x)=[f(x^-),f(x^+)],x\in J。$$

$\hat{f}$ 称为由 f 延拓的单调有界集值函数。

显然，当 $f(x)$ 在 x 点连续时，$\hat{f}(x)=\{f(x)\}$，$\hat{f}$ 是上半连续的集值函数。

模糊数的运算是基于扩张原理[3]给出的，但是在利用扩张原理表达问题时，需要对元素遍历某个条件所对应的全体结果进行运算，这种运算中的遍历过程给模糊分析理论带来了极大的不便，使得实际计算和应用时非常不方便。为了克服这一问题，文献[1]中给出了模糊数的结构元表示方法，利用结构元表示有效地克服了这一问题。文献[1]主要定义和结论如下：

定义 1.6[1] 设 A 为实数域 $\mathbf{R}$ 上的模糊集，隶属函数记为 $A(x)$，$x\in\mathbf{R}$。如果 $A(x)$ 满足下述性质：

(1) $A(0)=1$，$A(1+0)=A(-1-0)=0$；

(2) 在区间 $[-1,0)$ 上 $A(x)$ 是单增右连续函数，在区间 $(0,1]$ 上 $A(x)$ 是单降左连续函数；

(3) 当 $-\infty<x<-1$ 或 $1<x<+\infty$ 时，$A(x)=0$。

则称模糊集 A 为 $\mathbf{R}$ 上的模糊结构元。

如果模糊结构元 A 分别在 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 上连续严格单调递增和连续严格单调递减，则称 A 为正则的模糊结构元。

命题 1.1[1] (1) 设 A 是 $\mathbf{R}$ 上模糊结构元，$f(x)$ 为 J 上单调有界函数，则 $\hat{f}(E)\in\varepsilon^1$，且 $\hat{f}(E)$ 的隶属函数为 $E(f^{-1}(x))$，这里 f^{-1} 是 f 的延拓集值反函数。

(2) 对于给定的一个正则模糊结构元 A 和任意的有界模糊数 u，总存在一个 J 上的单调(递增)有界函数 f，使得 $u=f(A)$。严格地说，存在 f 的集值延拓 $\hat{f}$，使得 $u=\hat{f}(A)$，并称模糊数 u 是由模糊结构元 A 生成的。

需要说明的是，命题 1.1 中的结构元和单调函数具有任意性。为了使上述对应确定起见，下面采用固定一个三角模糊数 E 作为标准结构元，以此标准结构元为基础建立模糊数集合 ε^1 与 J 上的单调递增有界且上半连续的函数构成的集合 M_J 之间的一一对应关系，从而使得对模糊数的研究问题完全以一种一一对应的确定方式转化为对普通单调递增有界上半连续函数相应性质的研究。

定义 1.7 设 E 为实数论域 $\mathbf{R}$ 上的模糊集，其隶属函数为

$$E(x)=\begin{cases}1+x, & x\in[-1,0]\\ 1-x, & x\in(0,1]\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

称 E 为标准三角模糊数。

注：显然，标准三角模糊数是一个正则模糊结构元。以下本文中出现的 E 恒表示标准三角模糊数。

命题 1.2 (模糊数的单值函数表示定理)对任意 $u\in\varepsilon^1$，存在唯一的 $f\in M_J$，使得 $u=\hat{f}(E)$，反之，给定 $f\in M_J$，$u=\hat{f}(E)\in E^1$。从而上述 u 与 f 之间的对应是一一对应，称 f 为 u 的表示函数。对应 $u\to f$ 建立了 ε^1 和 M_J 之间的一自然双射：

$$H_M:\varepsilon^1\to M_J,$$

$$u\to H_M(u)=f,u=\hat{f}(E)。$$

注：下面给出的证明和[1]中关于命题 1.1 的证明类似，只不过这里本文构造的函数 f 是上半连续的。

命题 1.2 的证明：首先，因为 E 是三角模糊数，故 E 是正则模糊结构元，由命题 1.1(1)知，若 $f\in M_J$，则 $\hat{f}(E)\in\varepsilon^1$。

由命题 1.1(2)知有定义于 $[-1,1]$ 上单调递增

有界函数 f_1:[$-1,1$]使得 $\hat{f}_1(E)=u$,只需令 f 为 f_1 的上半连续闭包,则容易看出 f 满足命题的条件。

注:文献[1]中构造的函数 f 是单调递增且有界的,但是不唯一。在上述定理中,由于要求函数上半连续,从而保证了函数 f 的唯一性。

2　模糊数度量的单值函数表示

在模糊数集合 ε^1 上定义的常见度量有 d_∞、d_p、D_∞ 等度量。关于 ε^1 在这些度量下的拓扑性质的研究是模糊数的基本研究内容。本节中基于上节建立的双射 H_M 讨论模糊数度量空间上不同的度量在 M_J 中的表现形式,从而将模糊数度量空间的研究转化为对单调递增有界且上半连续的函数类上度量的研究。这就为模糊数度量空间的研究提供了一种新的方法。

首先,因为单调函数是黎曼可积的[4],因此可以在 M_J 上引入下述定义:

定义 2.1　a) 设 $f,g\in M_J$,定义

$$d_I(f,g)=\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x,$$

b) $d_S(f,g)=\sup\limits_{x\in[-1,1]}|f(x)-g(x)|$,

易知 d_I 和 d_S 都是 M_J 上的度量[4]。

命题 2.1　设 E 是三角模糊数,则对任意的 $u,v\in\varepsilon^1$,有 $f,g\in M_J$,使得 $u=\hat{f}(E)$,$v=\hat{g}(E)$,对任意的 $\alpha\in(0,1]$,记 $u_\alpha=[u_\alpha^-,u_\alpha^+]$,$v_\alpha=[v_\alpha^-,v_\alpha^+]$,则

$$d_I(f,g)=\int_{-1}^{1}|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x=\int_0^1(|u_\alpha^--v_\alpha^-|+|u_\alpha^+-v_\alpha^+|)\mathrm{d}\alpha。$$

证明是简单的,从略。

命题 2.1 说明,若在 ε^1 中定义度量 $d_{\alpha I}$ 为

$$d_{\alpha I}=\int_0^1(|u_\alpha^--v_\alpha^-|+|u_\alpha^+-v_\alpha^+|)\mathrm{d}\alpha,$$

则模糊数度量空间($\varepsilon^1,d_{\alpha I}$)与度量空间($M_J,d_I$)是等距同构的;不难验证 $d_{\alpha I}$ 和 L_p 度量拓扑等价,即它们诱导出 ε^1 上相同的拓扑。

例 2.1　令

$$f_n(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\chi_{[-1,1-\frac{1}{n}]}(x)+\sqrt{n}\chi_{[1-\frac{1}{n},1]}(x),$$

则 $f_n(x)$ 是单调递增且有界的函数,且关于 $d(x,y)=\int_{-1}^{1}|x(t)-y(t)|\mathrm{d}t$ 是柯西列,并且 $f_n(x)\to f(x)$,其中 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\chi_{[-1,1)}(x)$ 是单增但是无界的。这说明(M_J,d_I)是不完备的。

证明:显然,当 n 固定后 $f_n(x)$ 是单增且有界的。下证 $f_n(x)$ 是柯西列。

不妨设 $m>n$,则

$$\int_{-1}^{1}|f_m-f_n|\,\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\int_{-1}^{1}\left|\frac{1}{\sqrt{1-x}}\chi_{[-1,1-\frac{1}{m}]}-\frac{1}{\sqrt{1-x}}\chi_{[-1,1-\frac{1}{n}]}\right|\mathrm{d}x+$$
$$\int_{-1}^{1}\left|\sqrt{m}\chi_{[1-\frac{1}{m},1]}-\sqrt{n}\chi_{[1-\frac{1}{n},1]}\right|\mathrm{d}x=$$
$$\int_{1-\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{m}}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\chi_{[1-\frac{1}{n},1-\frac{1}{m}]}\mathrm{d}x+$$
$$\int_{-1}^{1}\left|\sqrt{m}\chi_{[1-\frac{1}{m},1]}-\sqrt{n}\chi_{[1-\frac{1}{n},1]}\right|\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\int_{1-\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{m}}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\chi_{[1-\frac{1}{n},1-\frac{1}{m}]}\mathrm{d}x+\sqrt{m}\times\frac{1}{m}+\sqrt{n}\times\frac{1}{n}=$$
$$\int_{1-\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{m}}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\chi_{[1-\frac{1}{n},1-\frac{1}{m}]}\mathrm{d}x+\frac{1}{\sqrt{m}}+\frac{1}{\sqrt{n}}=$$
$$2\left(\sqrt{\frac{1}{n}}-\sqrt{\frac{1}{m}}\right)+\frac{1}{\sqrt{m}}+\frac{1}{\sqrt{n}}=$$
$$\frac{-1}{\sqrt{m}}+\frac{3}{\sqrt{n}}。$$

当 $n,m\to\infty$ 时,$\dfrac{-1}{\sqrt{m}}+\dfrac{3}{\sqrt{n}}\to0$,即对于任意 $\varepsilon>0$,存在 N,当 $n,m>N$ 时,有

$$\int_{-1}^{1}|f_m-f_n|\,\mathrm{d}x<\varepsilon,$$

故$\{f_n(x)\}$是柯西列。

又因为对于任意 $\varepsilon>0$,存在 N,当 $n>N$ 时,对于任意 $x<1$,存在充分大的 n 使 $x<1-\dfrac{1}{n}$,此时

$$f_n(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}},$$

即存在 N,当 $n>N$ 时有

$$f_n(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}},$$

故 $f_n(x)\to f(x)$。显然 $f(x)$ 是无界的单调递增函数,这就说明了(M_J,d_I)是不完备的度量空间,从而文献[1]中关于(M_J,d_I)的完备性结论有误。又由命题 2.1 知度量空间($\varepsilon^1,d_{\alpha I}$)与度量空间($M_J,d_I$)是等距同构的,因此模糊数度量空间($\varepsilon^1,d_{\alpha I}$)也是不完备的。

下面研究模糊数度量空间(ε^1,d_p)与函数类空间 M_J 的关系,由于 L^p 与 L^1 具有相同的拓扑性质,在研究(ε^1,d_p)空间的性质时,只需研究(ε^1,d_1)即可,有如下命题:

命题 2.2 模糊数度量空间(ε^1, d_1)与度量空间(M_J, d_I)是度量等价的。

证明: 由模糊数的单值函数表示知,对任意的 $u,v\in\varepsilon^1$,有 $f,g\in M_J$ 使得 $u=\hat{f}(E)$,$v=\hat{g}(E)$,从而

$$d_1(u,v)=\int_0^1 d_H([u]^\alpha,[v]^\alpha)\mathrm{d}\alpha= \int_0^1 \max\{|u_\alpha^- - v_\alpha^-|,|u_\alpha^+ - v_\alpha^+|\}\mathrm{d}\alpha\leqslant \int_0^1(|u_\alpha^- - v_\alpha^1|+|u_\alpha^+ - v_\alpha^+|)\mathrm{d}\alpha,$$

且

$$d_1(u,v)\geqslant\int_0^1\frac{1}{2}(|u_\alpha^- - v_\alpha^-|+|u_\alpha^+ - v_\alpha^+|)\mathrm{d}\alpha,$$

又由命题 2.1 知

$$\int_{-1}^1|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x= \int_0^1(|u_\alpha^- - v_\alpha^-|+|u_\alpha^+ - v_\alpha^+|)\mathrm{d}\alpha,$$

故

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^1|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x\leqslant d_1(u,v)\leqslant\int_{-1}^1|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x,$$

即

$$\frac{1}{2}d_I(f,g)\leqslant d_1(u,v)\leqslant d_I(f,g)。$$

因此,度量空间(M_J, d_I)与(ε^1, d_1)度量等价,从而度量空间($M[-1,1], d_I$)与(ε^1, d_1)也是同胚的。

命题 2.2 说明对模糊数度量空间(ε^1, d_1)拓扑性质的研究也可以转化为对度量空间(M_J, d_I)的相应性质的研究。

以下命题是文献[1]中相应结论的特例。

命题 2.3 对任意的 $u,v\in\varepsilon^1$,有 $f,g\in M_J$,使得 $u=\hat{f}(E)$,$v=\hat{g}(E)$。对任意的 $\alpha\in(0,1]$,记 $u_\alpha=[u_\alpha^-,u_\alpha^+]$,$v_\alpha=[v_\alpha^-,v_\alpha^+]$,则

$$d_S(f,g)=\sup_{x\in[-1,1]}|f(x)-g(x)|= \sup_{\alpha\in[0,1]}(|u_\alpha^- - v_\alpha^-|\vee|u_\alpha^+ - v_\alpha^+|)= d_\infty(u,v)。$$

由 H_M 的双射性及命题 2.3 可得如下推论:

推论 2.1 模糊数度量空间(ε^1, d_∞)与度量空间(M_J, d_s)等距同构,从而同胚。

由推论 2.1,对模糊数空间(ε^1, d_∞)的拓扑性质的研究可以完全转化为 J 上单增有界且上半连续的函数类相应性质的研究。

本节最后考虑模糊数空间上的 sendograph 度量在函数类空间 M_J 上的表现形式。

引理 2.1 两个不同模糊数之间的 sendograph 距离的达到点必在各自 sendograph 的边界上。即任给 $u,v\in\varepsilon^1$,$u\neq v$,若有 $a\in send(u)$,$b\in send(v)$,使得 $D_\infty(u,v)=d(a,b)$,则 $a\in\partial(send(u))$,$b\in(\partial send(v))$,其中$\partial(send(u))=\overline{send(u)}\cap\overline{send(u)^c}$。

证明是显然的,从略。

引理 2.2 两个不同模糊数之间的 sendograph 距离的达到点若是在 1-截集处,则达到点的的横坐标必为 1-截集的端点;即任给 $u,v\in\varepsilon^1$,$u\neq v$,若 $a=(x_a,\lambda_a)\in\partial(send(u))$,$b=(x_b,\lambda_b)\in\partial(send(v))$,$\lambda_a=1$或者 $\lambda_b=1$

使得

$$D_\infty(u,v)=d_H(send(u),send(v))=d(a,b),$$

成立,则有

$$x_b\notin(v_1^-,v_1^+)\text{且 }x_a\notin(u_1^-,u_1^+)。$$

证明: 用反证法,不妨假设 $\lambda_b=1$ 且 $x_b\in(v_1^-,v_1^+)$。令 $c=(x_c,1)$,若$|x_a-v_1^-|<|x_a-v_1^+|$,则令 $x_c=v_1^-$;若$|x_a-v_1^-|>|x_a-v_1^+|$,则令 $x_c=v_1^+$;则 $c\in send(v)$,但 $d(a,c)<d(a,b)=\inf\{d(a,z),z\in send(v)\}$,矛盾,从而结论成立。

推论 2.2 两个模糊数之间的 sendograph 距离的达到点若是在 0-截集上,则达到点的横坐标必为 0-截集的端点,且两个达到点同时为零截集的端点。

这一推论的证明和引理 2.2 类似,从略。

引理 2.3 两个模糊数之间的 sendograph 距离必然在各自正规点的同一侧达到,即任给 $u,v\in\varepsilon^1$,必有 $a=(x_a,\lambda_a)\in\partial(send(u))$,$b=(x_b,\lambda_b)\in\partial(send(v))$,使得

$$x_a\in[u_0^-,u_1^-],x_b\in[v_0^-,v_1^-],$$

或者

$$x_a\in[u_1^+,u_0^+],x_b\in[v_1^+,v_0^+],$$

且

$$D_\infty(u,v)=d_H(send(u),send(v))=d(a,b)\text{成立。}$$

证明: 由引理 2.1 知,必有 $a=(x_a,\lambda_a)\in\partial(send(u))$,$b=(x_b,\lambda_b)\in\partial(send(v))$使得

$$D_\infty(u,v)=d_H(send(u),send(v))=d(a,b)$$

成立;

下面证明 $x_a\in[u_0^-,u_1^-]$,$x_b\in[v_0^-,v_1^-]$或者 $x_a\in[u_1^+,u_0^+]$,$x_b\in[v_1^+,v_0^+]$成立。

用反证法。不妨设 $x_a\notin[u_0^-,u_1^-]$,则 $x_a\in(u_1^-,u_0^+]$,由引理 2.1 知 $x_a\in[u_1^+,u_0^+]$,且 $x_b\notin[v_1^+,v_0^+]$。同理可知 $x_b\notin[v_1^-,v_1^+)$,$x_b\in[v_0^-,$

v_1^-]。

令 $c=(v_{\lambda_b}^+,\lambda_b)$,则 $c\in send(v)$,由于 $d(a,b)=\inf\{(b,z):z\in send(u)\}$,故对于 $\forall z\in send(u)$ 有 $d(z,c)\geqslant d(a,b)$,又 $D_\infty(u,v)\geqslant d(c,send(u))\geqslant d(b,send(u))=D_\infty(u,v)$,从而 $d(c,send(u))=D_\infty(u,v)$,于是可将 b 改为 c,c 即为所求,从而结论成立。

由一般拓扑学中关于集值函数图的定义可知,若 $f\in M_J$,则函数 f 的图(Graph)定义为 $Gr(f)=\{(x,y):y=f(x)\}$,而 f 的扩展集值函数 $\hat{f}$ 的图为 $Gr(\hat{f})=\{(x,y):y\in\hat{f}(x)\}$,为了下面需要,本文定义模糊数 u 集值扩张的图为:

$\overline{Gr}(u)=\{(x,y):y\in[u(x^-),u(x^+)],x\in send(u)\}$。

则 $Gr(\hat{f})$ 和 $\overline{Gr}(u)$ 之间有自然的双射对应:$(x,y)\to(y,1-x)$。

定义 2.3　在 M_J 上定义

$$d_{HGr}(f,g)=d_H(Gr(\hat{f}),Gr(\hat{g}))\quad f,g\in M_J。$$

易知 d_{HGr} 是 M_J 上的一个度量,M_J 关于度量 d_{HGr} 构成的度量空间记为 (M_J,d_{HGr})。

注:利用函数的图研究函数的拓扑性质是点集拓扑学中的常用方法[5]。下述命题给出了模糊数的 sendograph 度量和与它对应的 M_J 中表示函数之间度量的关系。

命题 2.4　任给 $u,v\in\varepsilon^1$,E 为定义在 J 上的三角模糊数,且 $f,g\in M_J$,使得

$$u=\hat{f}(E),v=\hat{g}(E),$$

则 $D_\infty(u,v)=d_H(Gr(\hat{f}),Grf(\hat{g}))$。

证明:不妨假设

$$D_\infty(u,v)=d(A,B),A=(y_A,\lambda_A)\in\partial send(u),$$
$$B=(y_B,\lambda_B)\in\partial send(v),$$

且进一步假设

$$y_A\in[u_1^+,u_0^+],y_B\in[v_1^+,v_0^+],$$

则由扩张原理及 f,g 为递增函数可知:

$$A_1=(x_A,y_A)\in Gr(\hat{f}),B_1=(x_B,y_B)\in Gr(\hat{g}),$$

且有 $x_A\in[0,1]$,$x_B\in[0,1]$ 使得

$$\lambda_A=u(y_A)=\hat{f}(E)(y_A)=\bigvee_{y_A\in\hat{f}(x_A)}E(x_A)=E(x_A),$$
$$\lambda_B=u(y_B)=\hat{g}(E)(y_B)=\bigvee_{y_B\in\hat{g}(x_B)}E(x_B)=E(x_B),$$

因此

$$D_\infty(u,v)=d(A,B)=\sqrt{(y_A-y_B)^2+(\lambda_A-\lambda_B)^2}=\sqrt{(y_A-y_B)^2+(E(x_A)-E(x_B))^2}=\sqrt{(y_A-y_B)^2+(1-x_A-1+x_B)^2}=d(A_1,B_1)。$$

下证 $d(A_1,B_1)=d_H(Gr(\hat{f}),Gr(\hat{g}))$。先证 $d(A_1,B_1)=d(A_1,Gr(\hat{g}))$。

用反证法,假设有 $D_1\in Gr(\hat{g})$,$D_1\neq B_1$ 使得

$$d(A_1,D_1)=d(A_1,Gr(\hat{g}))<d(A_1,B_1),$$

设 D_1 经 $\hat{g}(E)$ 作用后与 $send(v)$ 中的 D 点对应,则有

$$d(A,D)=d(A_1,D_1)<d(A_1,B_1)=d(A,B),$$

这与 $d(A,B)=d(A,send(v))$ 矛盾,故 $d(A_1,B_1)=d(A_1,Gr(\hat{g}))$。

再证 $d(A_1,Gr(\hat{g}))=d_H^*(Gr(\hat{f}),Gr(\hat{g}))$。

用反证法,假设有 $C_1\in Gr(\hat{f})$,$C_1\neq A_1$ 使得 $d(C_1,Gr(\hat{g}))=d_H^*(Gr(\hat{f}),Gr(\hat{g}))>d(A_1,Gr(\hat{g}))$,设 C_1 经 $\hat{f}(E)$ 作用后与 $send(u)$ 中的 C 点对应,则有

$$d(C_1,Gr(\hat{g}))=d(C,send(v))>d(A_1,Gr(\hat{g}))=d(A,send(v)),$$

这与

$$d(A,B)=d_H^*(send(u),send(v)),$$

矛盾,故

$$d(A_1,Gr(\hat{g}))=d_H^*(Gr(\hat{f}),Gr(\hat{g}))=d(A_1,B_1)。$$

同理可证 $d_H^*(Gr(\hat{g}),Gr(\hat{f}))=d(A_1,B_1)$。故

$$d_H(Gr(\hat{f}),Gr(\hat{g}))=d(A_1,B_1),$$

从而有

$$D_\infty(u,v)=d_H(Gr(\hat{f}),Gr(\hat{g}))。$$

注:命题 2.4 说明模糊数度量空间 (ε^1,D_∞) 与函数类空间 (M_J,d_{HGr}) 等距同构,从而它们也是同胚的。因此,关于度量空间 (ε^1,D_∞) 的研究可以完全转化为对度量空间 (M_J,d_{HGr}) 的相应性质的研究。

参考文献:

[1] 郭嗣琮. 基于结构元理论的模糊数学分析原理[M]. 沈阳: 东北大学出版社, 2004: 53-96.
[2] Diamond P, Kloeden P. Metric Spaces of Fuzzy Sets[M]. Singapore: World Scientific, 1994: 7-70.
[3] 陈水利, 李敬功, 王向公. 模糊集理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2005: 1-58.
[4] 郑维行, 王声望. 实变函数与泛函分析概要[M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2005: 229-237.
[5] Klein E, Thompson Anthony C. Theory of Correspon-Dences[M]. New York: John Wiley & Sons, 1984: 73-93.

(下转第 148 页)

convergence of certain trigonometric series[J]. Acta Math. Hungar，2005，108：161-169.

[3] 周颂平. 三角级数研究中的单调性条件：发展和利用[M]. 北京：科学出版社，2012:9-20.

Relationship between Grouped Bound Variation and Almost Monotonic Decreasing

CHEN Xiao-dan

(School of Sciences，Zhejiang Sci-Tech University，Hangzhou 310018，China)

Abstract：In Fourier analysis，it is of great significance for the popularization of monotonicity of some classic theorems. This paper discusses the relationship between group bounded variation and almost monotonic decreasing. It makes use of characteristic of series，and adopts construction method to give ordinary series. In addition，it combines with uniform convergence and other relevant theorems of trigonometric series to construct the series with more practical value so as to prove mutual exclusive relationship between them.

Key words：group bounded variation；almost monotonic decreasing；mutual exclusive relationship

（责任编辑：康　锋）

（上接第139页）

Monotropic Function Representation of Metrics on Fuzzy-number Space

LI Xue-fen，*FAN Tai-he*

(School of Sciences，Zhejiang Sci-Tech University，Hangzhou 31800，China)

Abstract：By taking a specific triangular fuzzy number as structural element，this paper gives a bijection between the set of all fuzzy numbers and the set of all bounded，monotonic increasing and upper semi-continuous functions defined on $[-1, 1]$，thus get a monotropic function representation of fuzzy number. On the basis of above representation，this paper gives the monotropic function representation of various metrics on fuzzy number space，such as the supremum metric，the L_p metrics，and the sendograph metric，so as to fully translate the study on metric (topology) properties of fuzzy numbers into the study on the corresponding properties on the space of all bounded，monotonic increasing and upper semi-continuous functions.

Key words：fuzzy number；metrics；monotropic function；homeomorphism

（责任编辑：康　锋）