

基于波场分解重建多个散射体的数值方法与模拟

夏 赞¹, 王泽文¹, 赵学慧²

(1. 东华理工大学理学院, 南昌 330013; 2. 凉城四中, 内蒙古自治区乌兰察布市 013750)

摘 要: 研究了重建多个散射体的逆散射问题。利用波场分解的思想, 首先给出了一种基于单层位势实现散射波和远场模式分解的算法, 将多个不可穿透的散射体产生的远场模式, 分解成与散射体个数对应的多个远场数据; 然后, 利用组合牛顿法给出了数值方法, 把分解后得到的远场数据逐个重建多个散射体边界; 最后, 通过数值模拟验证了该算法的可行性。

关键词: 逆散射; 波场分解; 组合牛顿法; 多个散射体; 不适定问题

中图分类号: O242.1 **文献标志码:** A

0 引 言

声波逆散射问题^[1-3]是数学物理反问题研究领域中的重要研究内容之一, 有着广泛的工程应用前景。本文主要研究当入射波遇到不可穿透的声柔障碍物时的逆散射问题, 即考虑时谐声波 $e^{ik \cdot x \cdot d}$ 在非吸收的均匀介质中传播时, 遇到多个不可穿透的柔性无限长柱体的散射问题, 其中长柱体的横截面为 $D_i \subset \mathbf{R}^2$, ($i=1, 2, \dots, N$), 边界 ∂D_i ($i=1, 2, \dots, N$) 是 C^2 连续可微的。这一问题的数学模型可表示为: 给定平面入射波 $u^i(x) = e^{ik \cdot x \cdot d}$, 求散射波场 $u^s(x)$ 满足 Helmholtz 方程 Dirichlet 外问题, Dirichlet 外问题可用下式表示:

$$\Delta u^s(x) + k^2 u^s(x) = 0, x \in \mathbf{R}^2 \setminus D \quad (1)$$

$$u^s(x) = -u^i(x), x \in \partial D \quad (2)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u^s}{\partial r}(x) - iku^s(x) \right) = 0, r = |x| \quad (3)$$

其中 $u^s(x)$ 是散射波场, d 是入射波入射方向, k 是波数, 式(3)称为 Sommerfeld 辐射条件。由文献[3]知, 该散射的正问题存在唯一解, 且散射波 $u^s(x)$ 有如下渐进关系:

$$u^s(x) = \frac{e^{ik|x|}}{\sqrt{|x|}} \left\{ u^\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, |x| \rightarrow \infty, \quad (4)$$

其中 $u^\infty(\hat{x})$ 称为散射波场 $u^s(x)$ 的远场模式, 它定义在 $\hat{x} = \frac{x}{|x|} \in S$ 上, 表征了散射波场 $u^s(x)$ 在无穷远处的状态。由 Rellich 引理^[2-3]可知, 散射波 $u^s(x)$ 与其远场模式 $u^\infty(\hat{x})$ 一一对应。

引理 1^[2-3] 设 $u^s(x) \in C^2(\mathbf{R}^2 \setminus \bar{D})$ 为 Helmholtz 方程 Dirichlet 外问题(1)–(3)的解, 如果 $u^s(x)$ 的远场模式 $u^\infty(\hat{x}) = 0$, 则 $u^s(x) = 0, x \in \mathbf{R}^2 \setminus \bar{D}$ 。

这里, 声波障碍物散射正问题指的是: 已知入射波和散射体边界且满足 Helmholtz 方程定解问题(1)–(3), 求散射波场 $u^s(x)$ 及其所对应的远场模式 $u^\infty(\hat{x})$ 。而本文所考虑的逆散射问题是: 已知入射平面波 $u^i(x) = e^{ib \cdot x \cdot d}$ 及其对应的远场模式 $u^\infty(\hat{x})$, 反求多个散射体 $D = \sum_{i=1}^N D_i$ 的形状, 也即重建多个散射体的边界 ∂D_i ($i=1, 2, \dots, N$)。

在逆散射问题研究中, 对单个逆散射的重建和数值模拟的研究比较多, 例如有牛顿法^[2-3]、Kirsch-Kress 迭代法^[4]、线性采样法^[5]、探测方法^[6]、组合

收稿日期: 2013-12-22

基金项目: 国家自然科学基金(11161002); 江西省青年科学基金资助项目(20132BAB211014); 江西省教育厅科技资助项目(GJJ13460); 东华理工大学校长基金(DHXYK1207)

作者简介: 夏 赞(1982-), 女, 江西南昌人, 讲师, 硕士研究生, 主要从事数学物理反问题的研究。

牛顿法^[7-11]等,但是,对于多个散射体的重建方法以及数值模拟的研究不多,Hassen 等^[12]给出了波场分解的思想方法,利用点源法实现多个散射体的重建,但没有探讨其他数值方法;王泽文等^[13]研究了多个散射体重建的组合牛顿法,结合非数值方法中遗传算法,给出了组合牛顿法的初始猜测;Hassen 等^[14]则讨论了多个散射体情形下的正问题,但是没有给出反问题的数值解。

本文主要利用波场分解的思想方法,结合组合牛顿法研究多个重建多个散射体的数值方法。本文首先给出一种基于单层位势的波场分解方法与数值模拟结果,然后基于对 Kirsch-Kress 方法的分析给出了重建单个散射体边界的组合牛顿法,最后基于波场分解和组合牛顿法给出了逐个重建多个散射体边界的数值方法与数值模拟结果。

1 波场分解

Hassen 等^[12]将散射场和远场模式分解成为不同障碍物散射作用的和,然后利用点源法来计算分解后的散射场,进而由分解后的散射场重建多个散射体。受此启发,本文利用波场分解的思想方法将远场模式分解成若干个散射场,然后给出了逐个重建多个散射体的组合拟牛顿法。为简单起见,仅讨论二个散射体的情形。设散射体 D 包含两个互不连通的部分 D_1 和 D_2 ,即 $D=D_1 \cup D_2$ 且满足 $\bar{D}_1 \bar{D}_2 = \emptyset$,其中 D_j ($j=1,2$)的边界上是 C^2 光滑的。

定理 2^[12] 设有边界是 C^2 光滑的区域 G_1 和 G_2 ,且 $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, $G_1 \supset \bar{D}_1$ 和 $G_2 \supset \bar{D}_2$,并记 $G := G_1 \cup G_2$ 。已知散射体 D 的散射波场 u^s 的一个分解 $u^s = u_1^s + u_2^s$ 满足:

(1) u_j^s ($j=1,2$)满足公式(4);

(2) u_j^s ($j=1,2$)在 G_j 的外部满足 Helmholtz 方程 Dirichlet 外问题方程(1);

(3) $(u_j^s)^+$ 和 $\left(\frac{\partial u_j^s}{\partial \nu}\right)^+$ 在边界 ∂G_j 上都存在,其中上标“+”的含义是:

$$(u_j^s)^+|_{\partial G_j} := \lim_{x \in \mathbf{R}^2 \setminus \bar{G}_j, x \rightarrow \partial G_j} u_j^s(x)$$

则散射波场 u^s 的这种分解是唯一。即若存在另一分解 $u^s = \tilde{u}_1^s + \tilde{u}_2^s$ 且 \tilde{u}_j ($j=1,2$)满足上述条件,则成立 $u_j^s(x) = \tilde{u}_j^s(x)$, $x \in \mathbf{R}^2 \setminus \bar{G}_j$, $j=1,2$ 。

上述定理的详细证明参见文献[12]。接下来讨论波场分解的算法实现。将 Helmholtz 方程外问题(1)–(3)的解表示成单层位势的形式,即:

$$u^s(x) := (S\varphi)(x) =$$

$$\int_{\partial D} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y), x \in \mathbf{R}^2 \setminus \bar{D} \quad (5)$$

则其对应的远场模式为:

$$u^\infty = (S^\infty \varphi)(\hat{x}) := \gamma \int_{\partial D} \varphi(y) e^{-ik\hat{x} \cdot y} ds(y), \hat{x} \in S \quad (6)$$

其中 $\gamma = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}}$, $\Phi(x, y) := \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x-y|)$ 是二维

Helmholtz 方程的基本解, $H_0^{(1)}$ 是第一类零阶 Hankel 函数, S 是一个单位圆, $\varphi \in L^2(\partial D)$ 称为密度函数且

$$(S\varphi)(x) = -u^i(x), x \in \mathbf{R}^2 \setminus \bar{D} \quad (7)$$

接下来所给出的散射波场分解的近似方法是:由已知的远场模式 u^∞ 来求满足定理 2 条件的散射波场 u_1^s 和 u_2^s 的近似方法。为此,任选区域 B_1 和 B_2 ,且 $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, $G_1 \supset \bar{B}_1$ 和 $G_2 \supset \bar{B}_2$, B_1 和 B_2 边界均是 C^2 光滑的。记 $B = B_1 \cup B_2$, 令

$$(S_{\partial B}^\infty \varphi)(\hat{x}) := \gamma \int_{\partial B} e^{ik\hat{x} \cdot y} \varphi(y) ds(y) = u^\infty(\hat{x}), \hat{x} \in S \quad (8)$$

当 B 包含散射体 D 时,方程(8)是可解的;但若散射体 D 不在区域 B 内,则方程(8)的可解性依赖于(1)–(3)的散射波场是否可以解析延拓进区域 D 内^[3]。另一方面,方程(8)是个不适定的第一类积分方程,即若远场模式 u^∞ 有误差则将导致解的急剧变化。为此,需要采用 Tikhonov 正则化方法来求解方程(8),即解正则化方程:

$$\alpha \varphi_\alpha + S_{\partial B}^{\infty*} S_{\partial B}^\infty \varphi_\alpha = S_{\partial B}^{\infty*} u^\infty \quad (9)$$

其中 α 为正则化参数, $S_{\partial B}^{\infty*}$ 为 $S_{\partial B}^\infty$ 的共轭算子, φ_α 为定义在 $\partial B = \partial B_1 \cup \partial B_2$ 上的近似密度函数。记

$$\varphi_{aj}(y) := \varphi_\alpha(y), y \in \partial B_j, j=1,2 \quad (10)$$

对于密度函数 $\varphi_{aj}(y)$ 引进单层位势算子 S_j ,即定义 $u_j^s(x) = (S_j \varphi_j)(x) :=$

$$\int_{\partial B_j} \Phi(x, y) \varphi_{aj}(y) ds(y), x \in \mathbf{R}^2 \setminus G_j, j=1,2 \quad (11)$$

根据第一类零阶 Hankel 函数 $H_0^{(1)}$ 和单层位势的性质^[2-3],可知对于可积函数 $\varphi_{aj}(y)$ 由(11)给出的 $u_j^s(x)$ 满足定理 2 的条件,也即实现了散射波场的分解。显然,散射波场 $u_j^s(x)$, $j=1,2$ 所对应的远场模式分别为:

$$u_j^\infty = (S_j^\infty \varphi)(\hat{x}) := \gamma \int_{\partial B_j} \varphi_{aj}(y) e^{-ik\hat{x} \cdot y} ds(y), \hat{x} \in S, j=1,2 \quad (12)$$

因此,上述方法实际上也实现了远场模式的近似分

解,即 $u^\infty \approx u_1^\infty + u_2^\infty$ 。从而,可利用 u_j^∞ 通过组合 Newton 法分别实现散射体 D_j 的边界重建。

本文给出的波场分解算法与文献[12]给出的略有不同,即分解算法是在 ∂B_j 上进行的,这样得到的散射波场(11)在 ∂G_j 的外部满足 Helmholtz 方程,且 u_j 和 $\frac{\partial u_j}{\partial \nu}$ 在边界 ∂G_j 上都确实存在,而不用考虑它们是极限意义下的存在。

算例 1 (波场分解) 考虑两个散射体,它们的边界分别为:

$$\partial D_1 = \{(0, -2) + \sqrt{\cos^2(t) + 0.25\sin^2(t)}(\cos(t), \sin(t)), t \in [0, 2\pi]\}$$

和

$$\partial D_2 = \left\{ (0, 3.5) + \frac{1 + 0.9\cos(t) + 0.1\sin(2t)}{1 + 0.75\cos t} \right.$$

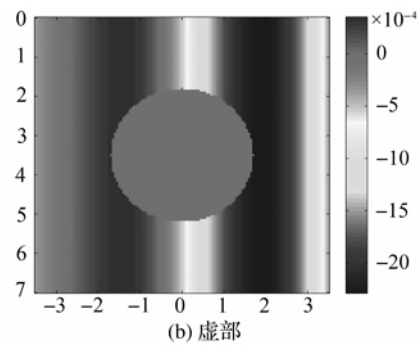
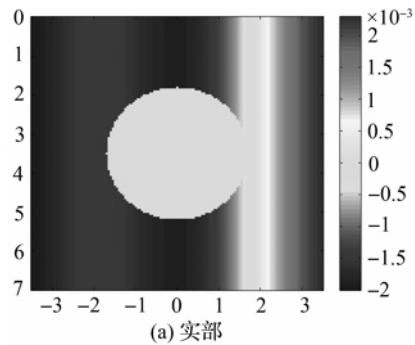


图1 $u_1 - \tilde{u}_1$ 的结果

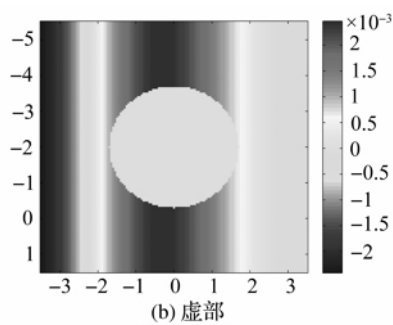
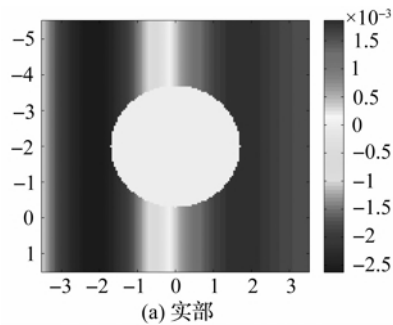


图2 $u_2 - \tilde{u}_2$ 的结果

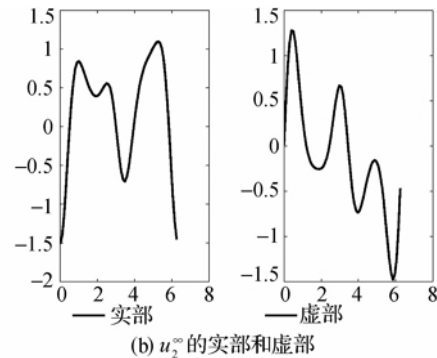
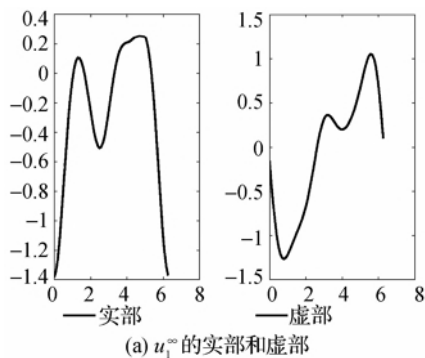
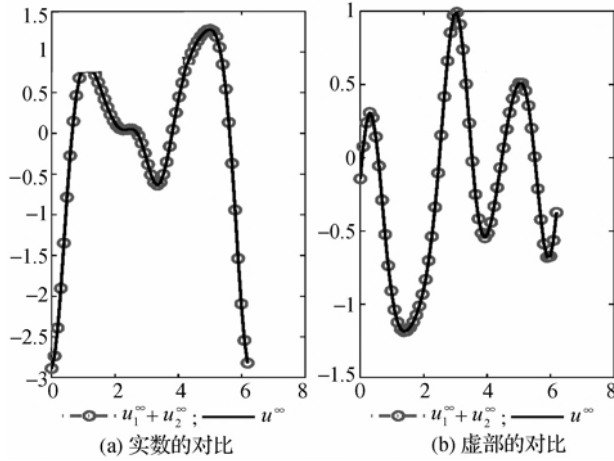


图3 分解后的远场模式

$$(\cos(t), \sin(t)), t \in [0, 2\pi]\}.$$

取波数 $k=1, d=(1, 0)^T$, 正则化参数取 0.5×10^{-8} 和精确的远场模式 u^∞ 进行数值模拟。选取 ∂G_1 与 ∂G_2 分别是位于 $(0, 3.5)$ 和 $(0, -2)$ 半径为 1.7 的圆, 见图 1—图 2 的中心部分的圆。选取 ∂B_1 与 ∂B_2 分别是位于 $(0, 3.5)$ 和 $(0, -2)$ 半径为 1.5 的圆的分解结果, 分别记为 u_1^i 和 u_2^i , 此时散射体 D 位于 B 的内部; 选取 ∂B_1 与 ∂B_2 分别是位于 $(0, 3.5)$ 和 $(0, -2)$ 半径为 0.7 的圆的分解结果, 分别记为 \tilde{u}_1^i 和 \tilde{u}_2^i , 此时 B 不包含 D 也不在 D 内。图 1—图 2 分别显示了前后两次分解所得散射场之差的实部和虚部。图 3 给出了 u_1^i 和 u_2^i 分别对应的远场模式 u_1^∞ 和 u_2^∞ 。图 4 给出了 $u_1^\infty + u_2^\infty$ 与 u^∞ 的对比结果。

图4 $u_1^\infty + u_2^\infty$ 与 u^∞ 的对比

3 重建单个散射体的组合牛顿法

组合牛顿法最先是由 Kress^[7] 提出的,随后在 Kress 和 Serranho 等^[8-11,13] 的研究中不断得到发展。本文从分析 Kirsch-Kress 方法^[3-4] 出发,导出组合 Newton 法。本节中假设 D 仅表示单个散射体。众所周知,Kirsch-Kress 方法需要选取辅助曲线 Γ ,且 Γ 满足两个条件:(1)散射体 D 要包含辅助曲线 Γ ,即 $\Gamma \subset D$;(2)在内边界 Γ 上, k^2 不是拉普拉斯方程的 Dirichlet 特征值。给出远场模式的测量数据 $u^{\infty,\delta}$,其中 δ 是误差水平,且满足 $\|u^\infty - u^{\infty,\delta}\|^2 \leq \delta^2$,在边界 Γ 上,利用正则化方法解第一类积分方程

$$F\varphi = u$$

得到密度 φ ,即

$$\frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \int_{\Gamma} \varphi(y) e^{-ik\hat{x} \cdot y} ds(y) = u^{\infty,\delta}(\hat{x}), \hat{x} \in \Omega \quad (13)$$

然后,散射波场 u^s 用单层位势表示如下:

$$u^s(x) = \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y) \quad (14)$$

其中密度函数 $\varphi \in L^2(\Gamma)$ 通过方程(13)计算得到。Kirsch-Kress 方法即寻求散射体 D 的边界使其在范数意义下 $u^i + u^s$ 取零的位置,即极小化泛函

$$\min_{\gamma} \|u^i + u^s\|_{L^2(\gamma)} \quad (15)$$

从而获得 ∂D 的近似值。由于积分核 $e^{-ik\hat{x} \cdot y}$ 是个解析函数,所以方程(13)是严重不适定的。这时需要采用一些正则化的方法去解方程(13),这里选取 Tikhonov 方法进行求解,即求解方程(13)的 Tikhonov 正则化方程

$$(\alpha I + F_{\Gamma}^* F_{\Gamma})\varphi = F_{\Gamma}^* u^{\infty,\delta} \quad (16)$$

其中 α 为正则化参数, I 为单位算子, F_{Γ} 为远场算子,即

$$(F_{\Gamma}\varphi)(\hat{x}) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \int_{\Gamma} \varphi(y) e^{-ik\hat{x} \cdot y} ds(y), \hat{x} \in \Omega \quad (17)$$

而 F_{Γ}^* 是 F_{Γ} 的伴随算子。

上述 Kirsch-Kress 方法(13)–(17)式,以及单层位势的连续性,自然地定义一个算子为:

$$G: (u^{\infty,\delta}, \Gamma, \gamma) \rightarrow u|_{\gamma} \quad (18)$$

其中 $\gamma \in \mathcal{S}^2$ 。若已知远场模式数据 $u^{\infty,\delta}$ 和辅助曲线 Γ ,则 G 映曲线 γ 到总场 γ 上的总场 u 。显然,已知 $u^{\infty,\delta}, \Gamma$,在容许集 U 中,寻找散射体的边界 ∂D 等价于解非线性算子方程:

$$G: (u^{\infty,\delta}, \Gamma, \gamma) = 0, \gamma \in U \quad (19)$$

因此,求解方程(19)的 Newton 迭代法为:

$$G(u^{\infty,\delta}, \Gamma, \gamma) + G'_3(u^{\infty,\delta}, \Gamma, \gamma)h = 0 \quad (20)$$

其中 $G'_3(u^{\infty,\delta}, \Gamma, \gamma)h$ 是对应于第三项的 γ 的 Fréchet 导数,且易知:

$$G'_3(u^{\infty,\delta}, \Gamma, \gamma)h = \text{grad } u(x) \cdot h, x \in \gamma \quad (21)$$

如果不选取内部辅助曲线 Γ ,在方程(16)直接用近似曲线 γ 取代 Γ ,也能得到一个密度函数,故可得到如 Kirsch-Kress 方法中的散射波场 u^s ,即

$$u^s(x) = \int_{\gamma} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y) \quad (22)$$

上式与(14)的不同之处在于积分曲线和密度函数是不相同的。此时,那么方程(19)就变为

$$G(u^{\infty,\delta}, \gamma, \gamma) = 0, \gamma \in U \quad (23)$$

采用以下近似 Newton 法

$$G(u^{\infty,\delta}, \gamma, \gamma) + G'_3(u^{\infty,\delta}, \gamma, \gamma)h = 0 \quad (24)$$

来求解方程(23),其中 $G'_3(u^{\infty,\delta}, \gamma, \gamma)h = x \in \gamma$ 。已知远场模式的测量数据 $u^{\infty,\delta}$,给定 γ 的初始猜测 γ_0 ,经近似 Newton 法(24)迭代重建散射体边界 ∂D 的方法即是组合 Newton 法。

4 多个散射体的重建方法与数值模拟

在重建多个散射体时,始终假设散射体 D_j 是以 (c_j^1, c_j^2) 为中心的星形状散射体,即其边界 ∂D_j 的参数表示形式

$$\partial D_j = (c_{j,1}, c_{j,2}) + r_j(t)(\cos(t), \sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi], j = 1, 2, \quad (25)$$

其中 $r_j(t) \in C^1([0, 2\pi])$ 是取值大于零的实函数。本文提出的多个散射体的重建方法如下。

给定多个散射体的远场模式 $u^{\infty,\delta}$,首先由第2小节给出的波场分解算法将 $u^{\infty,\delta}$ 分解成到 u_1^∞ 和 u_2^∞ ,然后由第3节给出的组合 Newton 法分别利用 u_1^∞ 和 u_2^∞ 重建散射体边界 ∂D_1 和 ∂D_2 。

组合牛顿法中,我们用三角函数的参数形式表示 γ ,即

$$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (c_1, c_2) + r(t)(\cos(t), \sin(t)), t \in [0, 2\pi] \quad (26)$$

其中 $r(t) = a_0 + \sum_{l=1}^m (a_l \cos lt + b_l \sin lt)$ 。 γ 的迭代更新方式为

$$\gamma := \gamma + h = \{x(t) + q(t)\nu(t) | t \in [0, 2\pi]\} \quad (27)$$

其中 $q(t) = a_0 + \sum_{l=1}^m (a_l \cos lt + b_l \sin lt)$, $\nu(t)$ 是曲面 γ 的单位外法向量,即

$$\nu(t) = \frac{(x'_2(t), -x'_1(t))}{|x'(t)|}, t \in [0, 2\pi] \quad (28)$$

为了避免反问题陷阱,通过用组合位势积分方程方法解正散射问题获得远场模式的模拟数据,而由前两节给出的单层位势途径求反问题。正反问题算法的详细参数化离散过程,请参阅文献[3-4, 10, 13, 15]。为了说明反演方法的稳定性,本文给远场

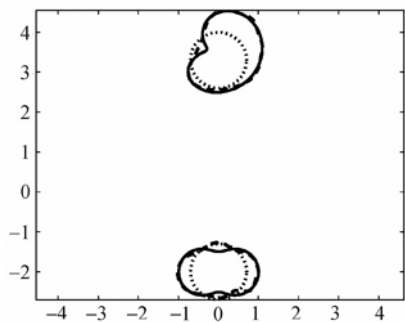
模式按下述方式加入随机噪声:

$$u^{\infty, \delta}(\hat{x}) = u^{\infty}(\hat{x}) + \delta(|\operatorname{real}(u^{\infty}(\hat{x}))| (2\operatorname{rand}(\hat{x}) - 1) + i|\operatorname{imag}(u^{\infty}(\hat{x}))| (2\operatorname{rand}(\hat{x}) - 1)),$$

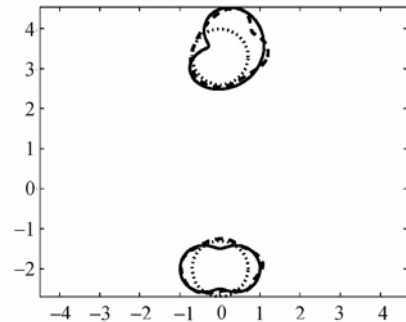
其中 i 代表的是虚数单位,“ real ”和“ imag ”分别代表的是远场模式的实部和虚部。在数值模拟中,始终取波数 $k=1$ 和入射波方向 $d=(1, 0)^T$, $m=15$, $N=64$,且当 $\delta=0$ 时选取正则化参数为 0.5×10^{-6} 而当 $\delta \neq 0$ 时选取正则化参数为 0.5×10^{-3} 进行数值模拟。在组合牛顿迭代中,迭代停机准则取

$$\|\gamma^{k+1} - \gamma^k\| = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N [(x_1^{k+1}(t_i) - x_1^k(t_i))^2 + (x_2^{k+1}(t_i) - x_2^k(t_i))^2]}}{\sqrt{N}} \leq 0.5 \times 10^{-2}$$

算例 2 考虑重建算例 1 中的两个散射体的边界,重建结果见图 5。



(a) 噪声水平 $\delta=0$ 时的重建结果

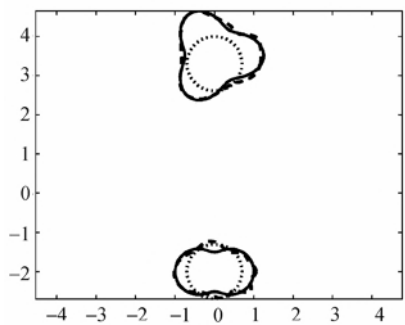


(b) 噪声水平 $\delta=0.05$ 时的重建结果

图 5 算例 2 的重建结果

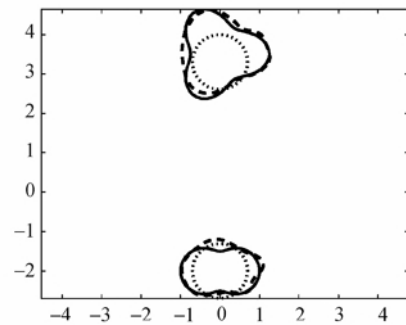
算例 3 考虑重建两个散射体,其中它们边界的参数方程分别为:

$$\partial D_1 = \{(0, -2) + \sqrt{\cos^2(t) + 0.25\sin^2(t)}(\cos(t), \sin(t)), t \in [0, 2\pi]\}$$



(a) 噪声水平 $\delta=0$ 时的重建结果

和 $\partial D_2 = \{(0, 3.5) + (1 + 0.25\cos(3t))(\cos(t), \sin(t)), t \in [0, 2\pi]\}$. 重建结果见图 6。



(b) 噪声水平 $\delta=0.05$ 时的重建结果

图 6 算例 3 的重建结果

5 结 论

本文利用单层位势的方法,对多个散射体产生的散射波场和远场模式给出了波场分解算法,即将散射波和远场分解成与散射体个数相对应的多个散射波及其远场模式,且给出了数值模拟。然后,分别利用分解后的多个远场数据,给出了利用组合牛顿法逐个重建多个散射体边界的方法。通过数值模拟发现,不论是对波场分解的数值模拟,还是重建多个散射体边界的数值模拟,均表明本文给出的波场分解方案和重建方法是可行的。但是,在重建散射体边界时,本文所给的重建方法仍然对迭代初值比较敏感,这也是需要我们进一步研究的问题。

参考文献:

- [1] Colton D, Kress R. Using fundamental solutions in inverse scattering[J]. *Inverse Problems*, 2006, 22(3): 49-66.
- [2] Colton D, Kress R. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*[M]. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1998.
- [3] Colton D, Kress R. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*[M]. New York: Springer-Verlag, 1992.
- [4] Kirsch A, Kress R. Two methods for solving the inverse acoustic scattering problem[J]. *Inverse Problems*, 1988, 4(3): 749-770.
- [5] Cakoni F, Colton D. *Qualitative Methods in Inverse Scattering Theory: an Introduction*[M]. New York: Springer-Verlag, 2005.
- [6] Cheng J, Liu J, Nakamura G. The numerical realization of the probe method for the inverse scattering problems from the near field data[J]. *Inverse Problem*, 2005, 21(3): 839-855.
- [7] Kress R. Newton's method for inverse obstacle scattering meets the method of least squares[J]. *Inverse Problems*, 2003, 19(6): 91-104.
- [8] Serranho P. A hybrid method for inverse scattering for shape and impedance[J]. *Inverse Problems*, 2006, 22(2): 663-680.
- [9] Kress R, Serranho P. A hybrid method for sound-hard obstacle reconstruction[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2007, 204(2): 418-427.
- [10] Wang Z, Hu B. An alternative approach of Kirsch-Kress method for reconstructing the shape of a sound-soft obstacle from several incident fields[J]. *Journal of Physics: Conference Series*. IOP Publishing, 2011, 290(1): 12016-12025.
- [11] Johansson T, Sleeman B D. Reconstruction of an acoustically sound-soft obstacle from one incident field and the far-field pattern[J]. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 2007, 72(1): 96-112.
- [12] Hassen F B, Liu J, Potthast P. On source analysis by wave splitting with applications in inverse scattering of multiple obstacles[J]. *Journal of Computational Mathematics*, 2007, 25(3): 266-281.
- [13] 王泽文, 张文. 基于遗传算法重建多个散射体的组合 Newton 法[J]. *计算数学*, 2011, 33(1): 87-102.
- [14] 毛 耀. 关于复杂散射体声波正散射与逆散射问题的研究[D]. 武汉: 华中师范大学, 2012.
- [15] 麦宏晏. 带阻尼边界条件的声波散射问题的几种数值方法[D]. 西安: 西北大学, 2004.

Numerical Method and Simulation for Reconstruction of Multiple Scatterers Based on Wave Field Decomposition

XIA Yun¹, WANG Ze-wen¹, ZHAO Xue-hui²

(1. School of Science, East China Institute of Technology, Nanchang 330013, China;

2. Liangcheng Fourth High School, Wulanchabu 013750, China)

Abstract: This paper studies an inverse scattering problem for reconstruction of multiple scatterers. Applying the idea of wave field decomposition, this paper firstly provides an algorithm for realizing scattered wave and far field model decomposition based on single layer potential to decompose far field mode generated by multiple impenetrable scatterer to multiple far-field data corresponding to the number of scatterers. Then, a numerical method is proposed by combined Newton method. Far-field data gained after decomposition are used to reconstruct the boundary of multiple scatterers. Finally, the feasibility of the algorithm is verified through numerical simulation.

Key words: inverse scattering; wave field decomposition; combined Newton method; multiple scatterers; ill-posed problem

(责任编辑: 康 锋)