浙江理工大学学报(自然科学版),第 31 卷,第 5 期,2014 年 9 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University (Natural Sciences)
Vol. 31, No. 5, Sept. 2014

文章编号:1673-3851 (2014) 05-0555-04

广义 Agard 偏差函数的不等式

张　燕,裘松良
(浙江理工大学理学院,杭州 310018)

摘　要:通过对广义 Agard 偏差函数与一些初等函数组合形式的单调性和凹凸性的研究,获得了广义 Agard 偏差函数和广义线性偏差函数的最新上下界,从而推广了平面拟共形映射理论中 Agard 偏差函数与线性偏差函数的一些不等式。

关键词:广义 Agard 偏差函数;单调性;不等式
中图分类号:O174　　**文献标志码**:A

0 引　言

在本文中,$r\in(0,1)$,$r'=\sqrt{1-r^2}$,当 $t,K\in(0,\infty)$时,Agard 偏差函数[1]定义为

$$\eta_K(t)=\left[\frac{\varphi_K(r)}{\varphi_{1/K}(r)}\right]^2,r=\sqrt{t/(1+t)} \tag{1}$$

当 $t=1$ 时,即为线性偏差函数[1]

$$\lambda(K)=\eta_K(1)=\left[\frac{\varphi_K(1/\sqrt{2})}{\varphi_{1/K}(1/\sqrt{2})}\right]^2 \tag{2}$$

其中

$$\varphi_K(r)=\mu^{-1}\left(\frac{\mu(r)}{K}\right),\mu(r)=\frac{\pi}{2}\frac{K'(r)}{K(r)} \tag{3}$$

$$K(r)=\frac{\pi}{2}F(1/2,1/2;1;r^2),K'(r)=K(r'),$$

$$K(0)=\frac{\pi}{2},K(1^-)=+\infty \tag{4}$$

$K(r)$称为第一类椭圆积分。$F(a,b;c;x)$为著名的高斯超几何函数[2],其定义为

$$F(a,b;c;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,n)(b,n)}{(c,n)}\frac{x^n}{n!},\ |x|<1。$$

这里,当 $a\neq 0$ 时,$(a,0)=1$;对于 $n\in N$,$(a,n)=a(a+1)(a+2)(a+3)\cdots(a+n-1)$。其中 $\eta_K(t)$为 Agard 在研究平面拟共形映射中引入的 η-偏差函数,而$\lambda(K)$为平面拟共形映射中的线性偏差函数。这两个函数在研究拟共形的极值问题、解析函数论中的 Schottky 上界问题发挥着重要作用[3-6]。关于 Hersch-Pfluger 偏差函数 $\varphi_K(r)$,Grotzsh 极值环 $B^2/[0,r]$的模 $\mu(r)$及其第一类完全椭圆积分 $K(r)$基本性质参见文献[1,7]。

下面介绍广义 Agard 偏差函数[8],其定义为

$$\eta_K(a,t)=\left[\frac{\varphi_K(a,r)}{\varphi_{1/K}(a,r)}\right]^2,r=\sqrt{t/(1+t)} \tag{5}$$

当 $t=1$ 时,即为广义线性偏差函数[8]

$$\lambda(a,K)=\eta_K(a,1)=\left[\frac{\varphi_K(a,1/\sqrt{2})}{\varphi_{1/K}(a,1/\sqrt{2})}\right]^2 \tag{6}$$

其中

$$\varphi_K(a,r)=\mu_a^{-1}\left(\frac{\mu_a(r)}{K}\right),\quad \mu_a(r)=\frac{\pi}{2\sin(\pi a)}\frac{K'_a(r)}{K_a(r)} \tag{7}$$

$$K_a(r)=\frac{\pi}{2}F(a,1-a;1;r^2),K'_a(r)=K_a(r'),$$

$$K_a(0)=\frac{\pi}{2},K_a(1^-)=+\infty. \tag{8}$$

$K_a(r)$称为第一类广义椭圆积分。显然,$\eta_K(1/2,t)=\eta_K(t)$,$\lambda(1/2,K)=\lambda(K)$。

近些年来,研究者们建立了许多关于 Agard 偏差函数的不等式[1,5,9]。

1997 年,Anderson 等[1]证明了以下不等式:当

收稿日期:2013-12-19
基金项目:国家科技支撑项目(11171307)
作者简介:张　燕(1989-),女,浙江绍兴人,硕士研究生,主要从事拟共形理论、解析函数、特殊函数方面的研究。

$K>1, a=(4/\pi)K(1/\sqrt{2})^2, b=a/2$ 时，

$$e^{\pi(K-1)}<\lambda(K)<e^{a(K-1)} \tag{9}$$

$$e^{b(K-1/K)}<\lambda(K)<e^{\pi(K-1/K)} \tag{10}$$

2009年，Anderson等[5]证明了以下不等式：当 $K>1, a=(4/\pi)K(1/\sqrt{2})^2, b=a/2$ 时，

$$\lambda(K)<e^{(\pi+b/K)(K-1)} \tag{11}$$

$$e^{[\log 2+(a-\log 2)/K](K-1)}<\lambda(K)<e^{[\pi+(a-\log 2)/K](K-1)} \tag{12}$$

最近，Chu等[9]改进了式(9)－式(12)，得到了如下结果：当 $t\in(0,\infty)$，$r=\sqrt{t/(1+t)}$，$a=(4/\pi)K(1/\sqrt{2})^2$，$b=a/2$，$A(r)=\pi^2/(2\mu(r))$，

$B(r)=8K(r)K'(r)^2[E(r)-r'^2K(r)]/\pi^2$，对所有的 $K\in(0,\infty)$ 成立

$$te^{(K-1)\left(A(r)+\frac{A(r)-4\log 2-\log t}{K}\right)}<\eta_K(t)<te^{(K-1)\left(A(r)+\frac{4K(r)K'(r)/\pi-A(r)}{K}\right)} \tag{13}$$

$$e^{(K-1)\left(\pi+\frac{\pi-4\log 2}{K}\right)}<\lambda(K)<e^{(K-1)\left(\pi+\frac{a-\pi}{K}\right)} \tag{14}$$

$$\eta_K(t)>te^{(K-1)\left(B(r)+\frac{4K(r)K'(r)/\pi-B(r)}{K}\right)} \tag{15}$$

$$\lambda(K)>e^{(K-1)\left(b+\frac{b}{K}\right)}=e^{b\left(K-\frac{1}{K}\right)} \tag{16}$$

$\eta_K(t)$ 为拟共形映射提供了界，而 $\lambda(K)$ 度量了固定无穷远点的上半平面映为自身的 K-拟共形映射的边界值的偏差。而Agard偏差函数 $\eta_K(t)$ 和线性偏差函数 $\lambda(K)$ 分别为广义Agard偏差函数 $\eta_K(a,t)$ 和广义线性偏差函数 $\lambda(a,K)$ 的特殊情形，因此对于 $\eta_K(a,t)$ 和 $\lambda(a,K)$ 的研究显得至关重要。本文的主要研究是将式(13)－式(16)进行推广，得到 $\eta_K(a,t)$ 和 $\lambda(a,K)$ 所满足的一些不等式。

在本文中，我们还需要第二类广义椭圆积分 $E_a(r)$ 及其Ramanujan常数 $R(a)$，它们的定义如下：

$$E_a(r)=\frac{\pi}{2}F(a-1,1-a;1;r^2),$$

$$E'_a(r)=E_a(r'), E_a(0)=\frac{\pi}{2}, E_a(1^-)=\frac{\sin(\pi a)}{2(1-a)},$$

$$R(a)=-2\gamma-\psi(a)-\psi(1-a), R(1/2)=\log 16,$$

其中 γ 是Euler常数，ψ 是经典的Psi函数[7]。

1 主要结果

定理1.1 当 $a\in(0,1/2]$，$t\in(0,\infty)$ 时，若令，$r=\sqrt{t/(1+t)}$，$p=4K_a(1/\sqrt{2})^2/[\pi\sin(\pi a)]$，$q=p/2$，$P(r)=\pi^2/[2\sin^2(\pi a)\mu_a(r)]$，$Q(r)=16(1-a)K_a(r)K'_a(r)^2[E_a(r)-r'^2K_a(r)]/[\pi^2\sin^2(\pi a)]$，则函数 $F_c(K)=K[(\log\eta_K(a,t)-\log t)/(K-1)-c]$ 具有以下性质：

(1)当 $c>P(r)$ 时，F_c 从 $(1,\infty)$ 到 $(-\infty, 4K_a(r)K'_a(r)/[\pi\sin(\pi a)]-c)$ 严格单调下降；而当 $c=P(r)$ 时，F_c 从 $(1,\infty)$ 到 $(P(r)-R(a)-\log t, 4K_a(r)K'_a(r)/[\pi\sin(\pi a)]-P(r))$ 严格单调下降。特别地，当 $t\in(0,\infty)$ 和 $K\in(1,\infty)$ 时，下面的不等式成立：

$$te^{(K-1)\left[P(r)+\frac{P(r)-R(a)-\log t}{K}\right]}<\eta_K(a,t)<te^{(K-1)\left[P(r)+\frac{4K_a(r)K'_a(r)/[\pi\sin(\pi a)]-P(r)}{K}\right]} \tag{17}$$

当 $t=1$ 时，不等式(17)退化为，

$$e^{(K-1)\left[\frac{\pi}{\sin(\pi a)}+\frac{\pi/\sin(\pi a)}{K}\right]}<\lambda(a,K)<e^{(K-1)\left[\frac{\pi}{\sin(\pi a)}+\frac{p-\pi/\sin(\pi a)}{K}\right]} \tag{18}$$

(2)当 $c\leqslant Q(r)$ 时，F_c 从 $(1,\infty)$ 到 $(4K_a(r)K'_a(r)/[\pi\sin(\pi a)]-c,\infty)$ 严格单调下降。特别地，当 $t\in(0,\infty)$ 和 $K\in(1,\infty)$ 时，不等式(19)成立

$$\eta_K(a,t)>te^{(K-1)\left[Q(r)+\frac{4K_a(r)K'_a(r)/[\pi\sin(\pi a)]-Q(r)}{K}\right]} \tag{19}$$

当 $t=1$ 时，不等式(19)退化为：

$$\lambda(a,K)>e^{(K-1)(q+q/K)}=e^{q(K-1/K)} \tag{20}$$

(3)当 $Q(r)<c<P(r)$ 时，存在 $K_1\in(1,\infty)$，使得 F_c 在 $(1,K_1)$ 上严格单调下降，而在 (K_1,∞) 上严格单调上升。

(4) F_c 在 $(1,\infty)$ 上是向下凸的。

2 引 理

在定理的证明过程中，我们需要利用以下的公式及其引理。对 $K\in(0,\infty)$，$t\in(0,\infty)$，若令 $r=\sqrt{t/(1+t)}$ 和 $s=\varphi_K(a,r)$，则有(见文献[3]定理4.1)

$$\frac{\mathrm{d}K_a(r)}{\mathrm{d}r}=\frac{2(1-a)}{rr'^2}(E_a(r)-r'^2K_a(r)), \tag{21}$$

$$K'_a(r)E_a(r)+K_a(r)E'_a(r)-K_a(r)K'_a(r)=\frac{\pi\sin(\pi a)}{4(1-a)} \tag{22}$$

$$\frac{\partial\varphi_K(a,r)}{\partial K}=\frac{4ss'^2K_a(s)^2}{\pi^2}\frac{\mu_a(r)}{K^2} \tag{23}$$

$$\eta_K(a,t)=\left(\frac{s}{s'}\right)^2,$$

$$\frac{\partial\eta_K(a,t)}{\partial K}=\frac{8\eta_K(a,t)\mu_a(r)K_a(s)^2}{\pi^2K^2} \tag{24}$$

引理2.1 (见文献[7]定理1.25)对 $-\infty<a<b<\infty$，设函数 f 和 g 是两个实值函数，并都在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可微且在 $[a,b]$ 上 $g'\neq 0$，如果 f'/g' 在 $[a,b]$ 上单调上升(下降)，那么函数

$$F(x)=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \text{和} G(x)=\frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)}$$

也在(a,b)上单调上升(下降)。而且,若 f'/g'的单调性是严格的,则 F 和 G 的单调性也是严格的。

如下引理可参见文献[3]中的引理 5.2(1)、引理 5.4(1)及其定理 5.5(2)。

引理 2.2 对 $a\in(0,1/2]$则有:

(1)$(E_a(r)-r'^2K_a(r))/r^2$ 从$(0,1)$到$(\pi a/2,\sin(\pi a)/2(1-a))$严格单调上升且上凸;

(2)$r'^cK_a(r)$从$(0,1)$到$(0,\pi/2)$严格单调下降当且仅当 $c\geqslant 2a(1-a)$;

(3)$\mu_a(r)+\log r$ 从$(0,1)$到$(0,R(a)/2)$严格单调下降。

3 定理 1.1 的证明

定理 1.1 的证明如下。

对 F_c 求导,得:

$$F'_c(K)=\frac{\log\eta_K(a,t)-\log t}{K-1}-c+K\left[\frac{\frac{8(r-1)\mu_a(r)K_a(s)^2}{\pi^2K^2}-(\log\eta_K(a,t)-\log t)}{(K-1)^2}\right]=\frac{-(\log\eta_K(a,t)-\log t)+\frac{8(K-1)\mu_a(r)K_a(s)^2}{\pi^2K^2}}{(K-1)^2}-c \tag{25}$$

令

$$G_1(K)=\frac{-(\log\eta_K(a,t)-\log t)+\frac{8(K-1)\mu_a(r)K_a(s)^2}{\pi^2K^2}}{(K-1)^2} \tag{26}$$

$G_2(K)=-(\log\eta_K(a,t)-\log t)+\frac{8(K-1)\mu_a(r)K_a(s)^2}{\pi^2K^2}$和 $G_3(K)=(K-1)^2$,则有 $G_1(K)=G_2(K)/G_3(K)$,$G_2(1)=G_3(1)=0$,且

$$G'_2(K)=-\frac{1}{\eta_K(a,t)}\frac{8\eta_K(a,t)\mu_a(r)K_a(s)^2}{\pi^2K^2}+\frac{8\mu_a(r)}{\pi^2}\left[\frac{K-(K-1)}{K^2}K_a(s)^2+\frac{2(K-1)K_a(s)}{K}\frac{2(1-a)(E_a(s)-s'^2K_a(s))}{ss'^2}\frac{4\mu_a(r)ss'^2K_a(s)^2}{\pi^2K^2}\right]=\frac{128(1-a)(K-1)\mu_a(r)^2K_a(s)^3(E_a(s)-s'^2K_a(s))}{\pi^4K^3},$$

$$\frac{G'_2(K)}{G'_3(K)}=\frac{64(1-a)\mu_a(r)^2K_a(s)^3(E_a(s)-s'^2K_a(s))}{\pi^4K^3}$$

$$=\frac{64(1-a)\mu_a(r)^2K_a(s)^3(E_a(s)-s'^2K_a(s))}{\pi^4\mu_a(r)^3/\left(\frac{\pi}{2\sin(\pi a)}\frac{K'_a(s)}{K_a(s)}\right)^3}$$

$$=\frac{8(1-a)(E_a(s)-s'^2K_a(s))K'_a(s)^3}{\pi\sin^3(\pi a)\mu_a(r)}\equiv G_4(K) \tag{27}$$

根据引理 2.2(1)和(2)可知,$G_4(K)$关于 K 在$(1,\infty)$上严格单调上升,因此,由式(26)和(27)和引理 2.1 即可知:$G_1(K)$关于 K 在$(1,\infty)$上严格单调上升,且

$$\lim_{K\to1}G_1(K)=Q(r),\lim_{K\to\infty}G_2(K)=P(r) \tag{28}$$

下面逐个证明定理的结论:

(1)当 $c>P(r)$时,从式(25)、式(28)和 $G_1(K)$的单调性即可得到:当 $K\in(1,\infty)$时有 $F'_c(K)<0$,从而 F_c 在$(1,\infty)$上严格单调下降,且

$$\lim_{K\to1}F_c(K)=\frac{4K_a(r)K'_a(r)}{\pi\sin(\pi a)}-c,\lim_{K\to\infty}F_c(K)=-\infty \tag{29}$$

当 $c=P(r)$时,同样可以得到 F_c 在$(1,\infty)$上严格单调下降,$F_c(K)=\frac{4K_a(r)K'_a(r)}{\pi\sin(\pi a)}-P(r)$,由式(7)和引理 2.2(3)可得:

$$\lim_{K\to\infty}F_c(K)=\lim_{K\to\infty}\frac{K}{K-1}[\log(s/s')^2-\log t-P(r)(K-1)]=$$
$$\lim_{K\to\infty}\frac{K}{K-1}[2\log s-2\log s'-\log t+P(r)-KP(r)]=$$
$$\lim_{K\to\infty}\frac{K}{K-1}\left[-2\log s'-\log t+P(r)-\frac{\mu_a(r)}{\mu_a(s)}\frac{\pi^2}{2\sin^2(\pi a)\mu_a(r)}\right]=$$
$$\lim_{K\to\infty}\frac{K}{K-1}[-2\log s'-2\mu_a(s')-\log t+P(r)]=$$
$$-R(a)-\log t+P(r) \tag{30}$$

不等式(17)和(18)可由式(29)、式(30)以及此情况下 F_c 的单调性得到。

(2)当 $c\leqslant Q(r)$时,同样从式(25)、式(28)和 $G_1(K)$的单调性即可得到:当 $K\in(1,\infty)$时有 $F'_c(K)>0$,从而 F_c 在$(1,\infty)$上严格单调上升,且

$$\lim_{K\to1}F_c(K)=\frac{4K_a(r)K'_a(r)}{\pi\sin(\pi a)}-c,\lim_{K\to\infty}F_c(K)=+\infty \tag{31}$$

不等式(29)和(30)可由式(31)以及此情况下 F_c 的单调性得到。

(3)当 $Q(r)<c<P(r)$时,同样从(25),式(28)和 $G_1(K)$的单调性可知:存在 $K_1\in(1,\infty)$,使得当 $K\in(1,K_1)$时,$F'_c(K)<0$;当 $K\in(K_1,\infty)$时,$F'_c(K)>0$。因此,$F_c(K)$在$(1,K_1)$上严格单调下降,而在(K_1,∞)上严格单调上升。

(4)由 $G_1(K)$在$(1,\infty)$的单调性便知:F_c 在$(1,\infty)$上向下凸的。

推论 3.1　设 p、q 为定理 1.1 所定义的变量，则函数 $f_c(K)=K[\log\lambda(a,K)/(K-1)-c]$具有以下性质：

(1)当 $c>\pi/\sin(\pi a)$时，f_c 从$(1,\infty)$到$(-\infty,p-c)$严格单调下降；而当 $c=\pi/\sin(\pi a)$时，f_c 从$(1,\infty)$到$(\pi/\sin(\pi a)-R(a),p-\pi/\sin(\pi a))$严格单调下降；

(2)当 $c\leqslant q$ 时，f_c 从$(1,\infty)$到$(p-c,\infty)$严格单调上升；

(3)当 $q<c<\pi/\sin(\pi a)$时，存在 $K_2\in(1,\infty)$，使得 f_c 在$(1,K_2)$上严格单调下降，而在(K_2,∞)上严格单调上升；

(4)f_c 在$(1,\infty)$上是向下凸的。

证将 $t=1$ 代入定理 1.1 即可得结论。

推论 3.1　设 p,q 为定理 1.1 所定义，对所有的 $K\in(1,\infty)$成立不等式：

$$\max\left\{e^{(K-1)\left[\frac{\pi}{\sin(\pi a)}+\frac{\pi/\sin(\pi a)}{K}\right]},e^{q(K-1/K)}\right\}<\lambda(a,K)<e^{(K-1)\left[\frac{\pi}{\sin(\pi a)}+\frac{p-\pi/\sin(\pi a)}{K}\right]}\tag{32}$$

从不等式(18)和(20)即得不等式(32)。

参考文献：

[1] Anderson G D, Vamanamurthy M K, Vuorinen M. Conformal invariants, inequalities, and quasiconformal maps[M]. New York: John Wiley &Sons, 1997: 1-326.

[2] Bowman F. Introduction to elliptic function with applications[M]. New York: Dover Publications, 1953: 1-115.

[3] Lehto O, Virtanen K I. Quasiconformal Mappings in the Plane[M]. New York: Springer-Verlag, 1973: 1-246.

[4] Martin G J. The distortion theorem for quasiconformal Schottky's theorem and holomorphic motions[J]. Proc Amer Math Soc, 1997, 125(4): 1095-1103.

[5] Anderson G D, Qiu S L, Vamanamurthy M K, et al. Generalized elliptic integrals and modular equations[J]. Pacific J Math, 2000, 192(1): 1-37.

[6] Qiu S L. Agard's η-distortion function and Schottky's theorem[J]. Sci. China, 1997, 40(A): 1-9.

[7] Qiu S L, Vuorinen M. Special function in geometric function theory[M]//Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory. Amsterdam: Elsevier Sci B. V, 2005: 621-659.

[8] Anderson G D, Qiu S L, Vuorinen M. Modular equations and distortion functions[J]. Ramanujan J, 2009, 18(20): 147-169.

[9] Chu Y M, Wang M K, Jiang Y P, et al. Monotonicity, convexity, and inequalities involving the Agard distortion function[J/OL]. Abstr Appl Anal, 2011. [2013-12-19]. http://www.hindowi.com/journals/aaa/2011/671765.

Inequalities of Generalized Agard Distortion Function

ZHANG Yan, *QIU Song-liang*

(School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: By studying the monotonicity and convexity of the generalized Agard Distortion function and combination forms of some elementary functions, we obtain the latest upper and lower bounds for the generalized Agard Distoriton function and the generalized linear Distoriton function and then extend some inequalities of Agard Distoriton function and linear Distoriton function in the quasiconformal mapping theory.

Key words: generalized Agard Distortion function; monotonicity; inequality

(责任编辑：康　锋)