浙江理工大学学报(自然科学版),第 31 卷,第 3 期,2014 年 5 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University (Natural Sciences)
Vol. 31, No. 3, May 2014

文章编号:1673-3851 (2014) 03-0325-04

Fourier 积分一致收敛性问题在复空间中的推广

夏星星
(浙江理工大学理学院,杭州 310018)

摘 要: 在重新定义复函数下的单调递减性质和(第二类)上确界有界变差函数($SBVF_2$)的前提下,通过分部积分和适当放缩等数学手段,研究了 Fourier 积分在复空间中的一致收敛性问题,利用新定义下的(第二类)上确界有界变差函数条件,将三角级数的一致收敛性结论推广到了积分形式,进一步完善了三角级数收敛性的理论。

关键词: Fourier 积分;复空间;一致收敛;单调递减
中图分类号: O174.21 **文献标志码:** A

0 引 言

Fourier 级数是一种特殊的三角级数,产生于物理学研究的需要,关于热传导、弦振动和磁共振图像重建技术的问题都以 Fourier 级数为理论基础。Fourier 级数是分析信号与系统最基本的分析工具,也是研究周期函数的工具。Fourier 的思想和方法是基础科学和应用科学研究开发的系统平台,在科学和技术上的大量重要应用构成了现代技术的强大基础。

要有效地对 Fourier 级数进行近似计算,就必须研究其收敛性。人们一直在广泛研究三角级数的一致收敛性[1]。目前,三角级数一致收敛性定理已经被完整地推广到了复空间。Korus 通过考虑积分的形式,得到与之平行的一些结论,从而使三角级数得到更广泛的应用。

本文将在 Korus 的正弦积分一致收敛性[2]的基础上,将已有的三角级数在复空间中一致收敛的结论[3]推广到积分的形式。记 $C_{2\pi}$ 为所有实值或复值的具有 2π 周期的连续函数 $f(x)$ 的全体所组成的空间,记 $\|f\|=\max\limits_{-\infty<x<+\infty}|f(x)|$ 为 f 的范数。C 表示与 x 无关的正常数,$C(t)$ 表示仅与 t 有关的正常数,其值在不同场合可能有所不同。

1 定 理

Korue 定义了下列集合:

如果非负数列 $A=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 对所有自然数 n 和某个给定的单调趋于无穷的正数 $\{b(n)\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $\sum\limits_{k=n}^{2n}|\Delta a_k|\leqslant\frac{M(A)}{n}\Big(\sup\limits_{m\geqslant b(n)}\sum\limits_{k=m}^{2m}a_k\Big)$,则称数列 A 为第二类上确界有界变差数列,记作 $A\in SBVS_2$[2]。

张丽君[3]将三角级数一致收敛性问题完整地推广到了复空间:

定理 1.1 设复数列 $\{c_n\}_{n=0}^{+\infty}\in SBVS_2$. 对于下列级数收敛的点 x,记

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_ne^{inx},$$

如果对于某个 $\theta_0\in\Big[0,\frac{\pi}{2}\Big)$ 成立:

$$c_n\in K(\theta_0),c_n+c_{-n}\in K(\theta_0),n=1,2,\cdots,$$

那么 $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f-S_n(f)\|=0$ 的充分必要条件是:

$$\lim_{n\to+\infty}nc_n=0 \text{ 与 } \sum_{n=1}^{+\infty}|c_n+c_{-n}|<+\infty.$$

Krous 首先定义了(第二类)上确界有界变差函数:

设 $f(x)\in AC_{loc}^1(R_+)$(在 R_+ 上局部绝对连续)。如果存在正常数 C,A 和在 $[0,+\infty)$ 上单调趋于无穷的仅依赖于 f 的正函数 $B(x)$,当 $a>A$ 时有:

收稿日期:2013-5-31
作者简介:夏星星(1989-),女,安徽巢湖人,硕士研究生,主要研究方向为函数逼近论。

$$\int_a^{2a} |f'(x)| \mathrm{d}x \leqslant \frac{C}{a} \sup_{b \geqslant B(a)} \left(\int_b^{2b} |f(x)| \mathrm{d}x \right),$$

则称函数 $f(x)$ 为(第二类)上确界有界变差函数,记作 $f(x) \in SBVF_2(R_+)$。

首先在复空间中,类似于复数列的单调递减概念[1],同样的给出复函数相应的定义:

记 $K(\theta_0)=\{z \mid |\arg z| \leqslant \theta_0)\}$,如果就某一 $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$,对于任意 x_1, x_2,当 $x_1 \geqslant x_2$ 时有 $f(x_2)-f(x_1) \in K(\theta_0)$,则称复函数 $f(x)$ 在复意义下单调递减。

类似地,在此基础上重新建立复空间中的(第二类)上确界有界变差函数:

设复函数 $f(x)$ 为任何有限区间的有界变差函数并在 $[0,R]$ 上可积。如果存在正常数 C, A 和在 $[0,+\infty)$ 上单调趋于无穷的仅依赖于 f 的 $B(x)$ 使得当 $a>A$ 时有:

$$\int_a^{2a} |\mathrm{d}f(x)| \leqslant \frac{C}{a} \sup_{b \geqslant B(a)} \left(\int_b^{2b} |f(x)| \mathrm{d}x \right),$$

则称 $f(x)$ 为复意义下的(第二类)上确界有界变差函数,记作 $f(x) \in SBVF_2$。

通过从积分的形式来考虑,Korus 建立了如下定理:

定理 1.2 $f(x) \in SBVF_2(R_+)$ 且 $xf(x) \in AC_{loc}^1(R_+)$。则当 $f(x)$ 为正实函数时,$\lim\limits_{x \to +\infty} xf(x)=0$ 的充分必要条件是 $\int_0^{+\infty} f(x)\sin tx \,\mathrm{d}x$ 一致收敛。

基于张丽君和 Korus 的结论可将复空间中的三角级数一致收敛性定理进一步推广到积分形式:

定理 1.3 设复函数 $f(x) \in SBVF_2$,对于下列积分收敛的点 t,记

$$F(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ixt} \mathrm{d}x。$$

如果对于某个 $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 成立,

$$f(x) \in K(\theta_0),\ f(x)+f(-x) \in K(\theta_0),\ x \in R,$$

那么 $\lim\limits_{a \to +\infty} \left\| \left(\int_{-\infty}^{-a} + \int_a^{+\infty} \right) f(x) e^{ixt} \mathrm{d}x \right\| = 0$ 的充分必要条件是:

$$\lim_{x \to +\infty} xf(x)=0$$

与

$$\left| \int_0^{+\infty} (f(x)+f(-x)) \mathrm{d}x \right| < +\infty。$$

2 定理 1.3 的证明

2.1 定理 1.3 充分性的证明

充分性只需要证明 $\lim\limits_{a \to +\infty} \left\| \int_a^{+\infty} (f(x) e^{ixt} + f(-x) e^{-ixt}) \mathrm{d}x \right\| = 0$。若 $t=0$ 或 $t=\pi$,则结论自然成立。现设 $t \in (0, \pi)$,由已知条件得到,对于任意 $\varepsilon > 0$,存在 $a_0 > 0$,使得当 $a > a_0$ 时,

$$a |f(a)| < \varepsilon, \int_a^{+\infty} |f(x)+f(-x)| \mathrm{d}x < \varepsilon. \tag{1}$$

记

$$\begin{aligned}
&\int_a^{+\infty} (f(x) e^{ixt} + f(-x) e^{-ixt}) \mathrm{d}x = \\
&\int_a^{+\infty} (f(x)+f(-x)) e^{-ixt} \mathrm{d}x + \\
&\int_a^{+\infty} f(x) (e^{ixt} - e^{-ixt}) \mathrm{d}x = \\
&\int_a^{+\infty} (f(x)+f(-x)) e^{-ixt} \mathrm{d}x + 2i \int_a^{+\infty} f(x) \sin xt \,\mathrm{d}x。
\end{aligned}$$

令 $I_1(t) = \int_a^{+\infty} (f(x)+f(-x)) e^{-ixt} \mathrm{d}x$,$I_2(t) = \int_a^{+\infty} f(x) \sin xt \,\mathrm{d}x$。由(1)得,$|I_1(t)| < \varepsilon$。

另一方面,取任意 t,使 $A=\frac{1}{t}$。当 $a_0<a<A$ 且 $b(A) \geqslant a_0$ 时,

$$\begin{aligned}
|I_2(t)| = & \left| \int_a^A f(x) \sin xt \,\mathrm{d}x + \int_A^{+\infty} f(x) \sin xt \,\mathrm{d}x \right| \leqslant \\
& \left| \int_a^A f(x) \sin xt \,\mathrm{d}x \right| + \left| \int_A^{+\infty} f(x) \sin xt \,\mathrm{d}x \right|,
\end{aligned}$$

于是有:

$$\left| \int_a^A f(x) \sin xt \,\mathrm{d}x \right| \leqslant t \left| \int_a^A x f(x) \mathrm{d}x \right| \leqslant \varepsilon,$$

同时,对任何 $A' > A > a_0$ 有:

$$\begin{aligned}
&\left| \int_A^{A'} f(x) \sin xt \,\mathrm{d}x \right| = \frac{1}{t} \left| \int_A^{A'} f(x) \mathrm{d}\cos xt \right| = \\
&A \left| (f(x) \cos xt) \big|_A^{A'} \right| + A \left| \int_A^{A'} \cos xt \,\mathrm{d}f(x) \right| \leqslant \\
&A' |f(A')| + A |f(A)| + A \left| \int_A^{A'} \mathrm{d}f(x) \right| \leqslant \\
&2\varepsilon + A \int_A^{A'} |\mathrm{d}f(x)|。
\end{aligned}$$

因为 $f(x) \in SBVF_2$,

$$\begin{aligned}
&\lim_{A' \to +\infty} \int_A^{A'} |\mathrm{d}f(x)| = \int_A^{+\infty} |\mathrm{d}f(x)| = \sum_{j=0}^{+\infty} \int_{2^j A}^{2^{j+1} A} |\mathrm{d}f(x)| \leqslant \\
&\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{C}{2^j A} \sup_{b \geqslant B(2^j A)} \int_b^{2b} |f(x)| \mathrm{d}x \leqslant \\
&\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{C\varepsilon}{2^j A} \sup_{b \geqslant B(2^j A)} \int_b^{2b} \frac{1}{x} \mathrm{d}x \leqslant \frac{C\varepsilon}{A} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \leqslant \frac{C\varepsilon}{A}。
\end{aligned}$$

所以 $A \int_A^{+\infty} |\mathrm{d}f(x)| \in C\varepsilon$,从而由 A' 的任意性得 $\left| \int_A^{+\infty} f(x) \sin xt \,\mathrm{d}x \right| < C\varepsilon$。

当 $\max\{a_0, A\} < a$ 且 $b(A) \geqslant a_0$ 时，类似地对任何 $A' > a$ 有：

$$\left|\int_a^{A'} f(x)\sin xt\,dx\right| = \frac{1}{t}\left|\int_a^{A'} f(x)\,d\cos xt\right| =$$

$$A\,|\,(f(x)\cos xt)\,|_a^{A'}\,)\,| + A\left|\int_a^{A'}\cos xt\,df(x)\right| \leqslant$$

$$A'\,|\,f(A')\,| + a\,|\,f(a)\,| + A\left|\int_a^{A'} df(x)\right| \leqslant$$

$$2\varepsilon + A\int_a^{A'}|\,df(x)\,|。$$

由于 $f(x) \in SBVF_2$，与前面类似地得到：

$$\lim_{A'\to+\infty}\int_a^{A'}|\,df(x)\,| = \int_a^{+\infty}|\,df(x)\,| = \sum_{j=0}^{+\infty}\int_{2^j a}^{2^{j+1}a}|\,df(x)\,| \leqslant$$

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{C}{2^j a}\sup_{b\geqslant B(2^j a)}\int_b^{2b}|\,f(x)\,|\,dx \leqslant$$

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{C\varepsilon}{2^j a}\sup_{b\geqslant B(2^j a)}\int_b^{2b}|\,f(x)\,|\,dx \leqslant$$

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{C\varepsilon}{2^j a}\sup_{b\geqslant B(2^j a)}\int_b^{2b}\frac{1}{x}dx \leqslant \frac{C\varepsilon}{a}。$$

所以 $A\int_a^{+\infty}|\,df(x)\,| < C\varepsilon$，从而由 A' 的任意性得 $|\,I_2(x)\,| < \varepsilon$。

总之，当 $a \geqslant a_0$ 时，在任何情况下都有 $|\,I_2(x)\,| \leqslant C\varepsilon$。这样，就已证得

$$\lim_{a\to+\infty}\left\|\int_a^{+\infty}(f(x)e^{ixt} + f(-x))e^{-ixt}dx\right\| = 0。$$

2.2　定理 1.3 必要性的证明

因为 $\lim_{a\to+\infty}\left\|\int_a^{+\infty}(f(x)e^{ixt} + f(-x)e^{-ixt})dx\right\| = 0$，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，当 b 充分大时对所有 t 一致成立：

$$\varepsilon \geqslant \left|\int_b^{2b}(f(x)e^{ixt} + f(-x)e^{-ixt})dx\right| =$$

$$\left|\int_b^{2b}((f(x)+f(-x))e^{-ixt} + f(x)(e^{ixt} - e^{-ixt}))dx\right| \geqslant$$

$$2\left|\int_b^{2b} f(x)\sin xt\,dx\right| - \left|\int_b^{2b}(f(x)+f(-x))e^{-ixt}dx\right|.$$

因为 $f(x) + f(-x) \in K(\theta_0)$，$\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$，所以当 $t = 0$ 时有：

$$\left|\int_0^{+\infty}(f(x) + f(-x))dx\right| \geqslant$$

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{Re}(f(x) + f(-x))dx \geqslant$$

$$C(\theta_0)\int_0^{+\infty}|\,f(x) + f(-x)\,|\,dx,$$

即有：

$$\int_0^{+\infty}|\,f(x) + f(-x)\,|\,dx < +\infty。$$

由此知当 b 充分大时有 $\left|\int_b^{2b}(f(x) + f(-x))e^{-ixt}dx\right| \leqslant \varepsilon$，所以，

$$\left|\int_b^{2b} f(x)\sin xt\,dx\right| \leqslant \varepsilon。$$

令 $t = \frac{\pi}{4b}$，由 $f(x) \in K(\theta_0)$，则有：

$$\left\|\int_b^{2b} f(x)\sin xt\,dx\right\| \geqslant \left|\int_b^{2b} f(x)\sin\frac{x\pi}{4b}dx\right| \geqslant$$

$$\int_b^{2b}\mathrm{Re}\left(f(x)\sin\frac{x\pi}{4b}\right)dx \geqslant$$

$$C(\theta_0)\int_b^{2b}|\,f(x)\,|\,\sin\frac{x\pi}{4b}dx \geqslant$$

$$C(\theta_0)\int_b^{2b}|\,f(x)\,|\,dx,$$

所以对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 x_0，使得当 $b \geqslant B(x_0)$ 时，有：

$$\sup_{b\geqslant B(x_0)}\int_b^{2b}|\,f(x)\,|\,dx \leqslant C(\theta_0)\varepsilon。$$

另一方面，对于 $x \leqslant t \leqslant 2x$，$x \geqslant 2B(x_0)$，$f(x) \in SBVF_2$，则看出：

$$|\,f(x)\,| = \left|\int_t^x df + f(t)\right| \leqslant$$

$$\int_{\frac{t}{2}}^{t}|\,df\,| + |\,f(t)\,| \leqslant$$

$$\frac{C}{x}\sup_{b\geqslant B(x_0)}\int_b^{2b}|\,f(x)\,|\,dx + |\,f(t)\,|,$$

于是对于 $x \leqslant t \leqslant 2x$，有：

$$x\,|\,f(x)\,| \leqslant C\sup_{b\geqslant B(x_0)}\int_b^{2b}|\,f(x)\,|\,dx + \int_x^{2x}|\,f(u)\,|\,du,$$

故当 $x > x_0$ 时，有：

$$x\,|\,f(x)\,| \leqslant (C+1)\sup_{b\geqslant B(x_0)}\int_b^{2b}|\,f(x)\,|\,dx \leqslant C\varepsilon,$$

即

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0。$$

综上所述，定理 1.3 得证。

3　结　论

Fourier 积分在复空间中的一致收敛性是在三角级数一致收敛性和 Korus 的正弦积分一致收敛性的基础上进行推广的。其中复函数在复空间中单调递减性质的重新定义和在 Korus 定义的（第二类）上确界有界变差函数（$SBVF_2$）的基础上作出的进一步修改是本文的突破点。总之，将三角级数一致收敛性推广到积分的形式使得三角级数收敛性方面的研究更加完整，从而有利于其进一步的应用和其他科学领域的研究。

参考文献:

[1] 周颂平. 三角级数研究中的单调性条件:发展和应用[M]. 北京:科学出版社,2012.

[2] Kórus P. On the uniform convergence of special sine integrals[J]. Acta Math Hungar. 2011,11:32-38.

[3] 张丽君. 三角级数一致收敛性问题在复空间的完整推广[J]. 数学杂志,2012,32(3):461-465.

[4] 谢庭藩,周颂平. 实函数逼近论[M]. 杭州:杭州大学出版社,1998:81-82.

[5] Zhou S P,Zhou P,Yu D S. Ultimate generalization to monotonicity for uniform convergence of trigonometric series[J]. ArXiv Math,2010,53(7):1853-1862.

A Further Generalization of Uniform Convergence of Fourier Integrals in the Complex Space

XIA Xing-xing

(School of Sciences,Zhejiang Sci-Tech University,Hangzhou 310018,China)

Abstract:On the premise of redefining monotone decreasing property of complex functions and (the second class) supremum bounded variation function ($SBVF_2$), this paper studies on the uniform convergence of Fourier integrals in complex space by mathematical methods such as integration by parts and appropriate scaling etc, uses (the second class) supremum bounded variation function conditions under the new definition to generalize uniform convergence of trigonometric series to integral forms, and further improves study on the convergence of trigonometric series.

Key words:Fourier integrals; complex space; uniform convergence; monotone decreasing

(责任编辑:王宁宁)

(上接第309页)

Fabric Drape Measurement Method Based on Kinect Sensor

SHEN Wei, *REN Jing*, *ZHOU Hua*, *SUN Xi-chao*

(School of Materials and Textiles,Zhejiang Sci-Tech University,Hangzhou 310018,China)

Abstract:Most fabric drape measurement methods are confined to be two-dimensional, and can't reflect intuitively 3D shape of fabric. This paper proposes a new measurement method which could obtain 3D shape of fabric by scanning directly. This method obtains depth images of multiple locations of the specimen with Kinect sensor, establishes 3D scenes, processes with C++ programming and image processing software, and extracts drape indicator of the specimen. This indicator is highly consistent with that obtained by traditional measurement method, verifying that the measurement method of obtaining drape indicator of specimen by scanning with Kinect sensor is feasible.

Key words:fabric drape; 3D drape; Kinect sensor; measurement method

(责任编辑:张祖尧)