浙江理工大学学报(自然科学版),第 31 卷,第 1 期,2014 年 1 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University (Natural Sciences)
Vol. 31, No. 1, Jan. 2014

文章编号：1673-3851 (2014) 01-0079-04

模糊集收敛的等价性

边梦柯，樊太和

(浙江理工大学理学院，杭州 310018)

摘　要：基于前人在对特殊模糊集上关于确界收敛,L—收敛,Endograph—收敛,Sendograph—收敛之间的等价性的分析,证明了一般模糊数序列上确界度量收敛等价于同时层次收敛和强截集收敛,并对关于截集连续的模糊数集合上的收敛的等价性给出了一种简洁的几何证明方法。

关键词：模糊数；上确界度量；截集收敛；强截集收敛

中图分类号：O189.13　　**文献标志码：**A

1 引　言

自模糊数的概念于 20 世纪 70 年代引入以来，已被人们从不同角度进行了深入研究。Kaleva, Greco 等许多学者在模糊集的收敛方面做了大量的研究[1-2],Medar M R 和 Flores H R[3] 在文献中讨论并证明了一种特殊的模糊集的上确界收敛、L—收敛、Endograph—收敛、Sendograph—收敛之间的等价性,但是证明过程繁琐。本文将讨论并证明对一般模糊数来说,上确界收敛等价于同时 L—收敛和强截集收敛,本文还将对文献[3]中模糊集收敛的等价性给出一种简洁的几何证明方法。

1 模糊集收敛

设(X,d)是一个度量空间,A_1,A_2 是 X 的两个非空紧子集,则 A_1,A_2 之间的 Hausdorff 度量 H 定义如下：

$$H(A_1,A_2)=\inf\{\varepsilon>0\mid A_2\subseteq B(A_1,\varepsilon),A_1\subseteq B(A_2,\varepsilon)\}$$

其中 $B(A,\varepsilon)=\{x\in X\mid \mathrm{d}(x,A)<\varepsilon\}$,$\mathrm{d}(x,A)=\inf\limits_{a\in A}\mathrm{d}(x,a)$。

用 $P_K(X)$表示所有 X 的非空紧子集构成的集合。众所周知,H 是 $P_K(X)$上的一个度量,如果 X 是可分(完备)的,则 $P_K(X)$也是可分(完备)的。

上述度量 H 可等价定义为：

$$H(A,B)=\max\{H^*(A,B),H^*(B,A)\}$$

其中 $H^*(A,B)=\sup\{\mathrm{d}(a,B)\mid a\in A\}$。

设 $C,C_p(p=1,2,\cdots)\subseteq X$,称$\{C_p\}$Kuratowski 收敛于 C,如果

$$C=\lim_{p\to+\infty}\inf C_p=\lim_{p\to+\infty}\sup C_p$$

其中 $\lim\limits_{p\to+\infty}\inf C_p=\{x\in X\mid x=\lim\limits_{p\to+\infty}x_p,x_p\in C_p\}$,

$\lim\limits_{p\to+\infty}\sup C_p=\{x\in X\mid x=\lim\limits_{p_i\to+\infty}x_{p_i},x_{p_i}\in C_{p_i}\ p_i<p_{i+1},i=1,2,\cdots\}=\bigcap\limits_{p=1}^{+\infty}\overline{\bigcup\limits_{m\geqslant p}C_m}$。

简记为 $C=\lim\limits_{p\to+\infty}C_p$。

以下是 Kuratowski 收敛与 Hausdorff 收敛之间的关系及 Hausdorff 收敛的性质。

设$\{C_p\}$是一紧集序列,则$\{C_p\}$在 Kuratowski 意义下收敛于紧集 C 等价于$\{C_p\}$在 Hausdorff 度量下收敛于 C。由于 Kuratowski 极限一定是闭集,因此有以下关系：

a) $\lim\limits_{p\to+\infty}\inf C_p=\lim\limits_{p\to+\infty}\inf\overline{C_p}$;

b) $\lim\limits_{p\to+\infty}\sup C_p=\lim\limits_{p\to+\infty}\sup\overline{C_p}$。

设$\{C_p\}(p=1,2,\cdots)$是 $P_K(X)$中的一非降(增)序列,若存在$\{C_p\}$的一个子列在 Hausdorff 度量下

收稿日期：2012－06－01

基金项目：国家自然科学基金项目(11171308)

作者简介：边梦柯(1987－),女,河南许昌人,硕士研究生,主要从事不确定性的数学理论研究。

收敛于 $C(\in P_K(X))$,则$\{C_p\}$在 Hausdorff 度量下收敛于C,即 $H(C_p,C)\to 0(p\to+\infty)$。

设 $E^n=\{u:R^n\to I\,|\,$对所有 $\alpha\in I,L_\alpha u$ 是非空紧集$\}$,其中

$$L_\alpha u=\{x\in R^n\,|\,u(x)\geqslant\alpha\}(\alpha\in(0,1])$$

为 u 的α-截集,而

$$\operatorname{supp}(u)=L_0 u=\overline{\{x\in R^n\,|\,u(x)>0\}}=\overline{\bigcup_{\alpha>0}L_\alpha u}$$

任取 $\alpha\in[0,1)$,令 $L_{\alpha^+}u=\overline{\{\bigcup_{\beta>\alpha}L_\beta u\}}$($L_{\alpha^+}u$ 称为 u 的α 强截集)。则强截集有如下性质:若$\{\alpha_n\}$是 I 中任一单调递减收敛于α 的子列,有 $L_{\alpha_n}u\to L_{\alpha^+}u(n\to+\infty)$。再令 $J(u)=\{\alpha\in(0,1)\,|\,H(L_\alpha u,L_{\alpha^+}u)>0\}$,$E_c^n=\{u\in E^n\,|\,$对任意的 $\alpha\in[0,1],L_\alpha u$ 是关于α 连续的$\}$(当 $\alpha=0$ 或 1 时,$L_\alpha u$ 的连续性分别为右或左连续)。则有:$u\in E_c^n$ 当且仅当 $J(u)=\varnothing$。

E^n 上的上确界度量 d_∞ 定义为 $d_\infty(u,v)=\sup_{\alpha\in(0,1]}H(L_\alpha u,L_\alpha v)$。$(E^n,d_\infty)$是完备但不可分的度量空间。

下面是模糊集的几种收敛定义。

定义 0.1 (1)(d_∞-收敛[3])设 $u_p,u\in E^n,p=1,2,\cdots$。称 u_p 关于度量 d_∞ 收敛于 u,如果 $d_\infty(u_p,u)\to 0(p\to\infty)$,简记为 $u_p\to u(d_\infty)$。

(2)(L-收敛[3])设 $u_p,u\in E^n,p=1,2,\cdots$。称 u_p 截集收敛于u,如果对任意的$\alpha\in(0,1],H(L_\alpha u_p,L_\alpha u)\to 0(p\to\infty)$,简记为 $u_p\to u(L)$。

(3)(L^+-收敛)设 $u_p,u\in E^n,p=1,2,\cdots$。称 u_p 强截集收敛于 u,如果对任意的 $\alpha\in[0,1),H(L_{\alpha^+}u_p,L_{\alpha^+}u)\to 0(p\to\infty)$,简记为 $u_p\to u(L^+)$。

定理 0.2[3] 设 $u_p\in E^n,u\in E_c^n,p=1,2,\cdots$,则下面结论是等价的:

(i) $u_p\to u(d_\infty)$;

(ii) $u_p\to u(L)$且 $L_0u_p\to L_0u(H)$。

注:文献[3]中给出的定理 0.2 的(ii)⇒(i)的证明是一种分析方法,这一证明既要用到文献[4]的结论,又要用到该文中的预备工作(引理 3.13,3.15),整个证明篇幅超过 3 页,因此证明过程非常复杂。本文将在下一节给出(ii)⇒(i)的一种几何证明方法,和文献[3]中的证明过程相比,本文给出的方法要直观简洁得多。

2 模糊集收敛的等价性证明

定理 1.1 设 $u,v\in E^n$,则存在 $\alpha\in I$,使得

$$d_\infty(u,v)=\max\{H(L_\alpha u,L_\alpha v),H(L_{\alpha^+}u,L_{\alpha^+}v)\},$$

即上确界度量关于截集或强截集是可达到的。

证明 因为 $d_\infty(u,v)=\sup_{\alpha\in(0,1]}H(L_\alpha u,L_\alpha v)$,所以对任意的 $n\in N$,存在 $\alpha_n\in I$,使得

$$H(L_{\alpha_n}u,L_{\alpha_n}v)\leqslant d_\infty(u,v)\leqslant H(L_{\alpha_n}u,L_{\alpha_n}v)+\frac{1}{n}\quad(1)$$

不妨设$\{\alpha_n\}$是 I 中的一单调收敛子列,若$\{\alpha_n\}$单调递增收敛于 α_0,则对式(1)关于 n 取极限可得:

$$H(L_{\alpha_0}u,L_{\alpha_0}v)\leqslant d_\infty(u,v)\leqslant H(L_{\alpha_0}u,L_{\alpha_0}v)$$

若$\{\alpha_n\}$单调递减收敛于 α_1,同样地,对式(1)关于 n 取极限可得:

$$H(L_{\alpha_1^+}u,L_{\alpha_1^+}v)\leqslant d_\infty(u,v)\leqslant H(L_{\alpha_1^+}u,L_{\alpha_1^+}v)。$$

因此由上面两式可得:$d_\infty(u,v)=H(L_{\alpha_0}u,L_{\alpha_0}v)$或 $d_\infty(u,v)=H(L_{\alpha_1^+}u,L_{\alpha_1^+}v)$,所以存在 $\alpha\in I$,使得 $d_\infty(u,v)=\max\{H(L_\alpha u,L_\alpha v),H(L_{\alpha^+}u,L_{\alpha^+}v)\}$。

命题 1.2 设 $u_p,u\in E^n,p=1,2,\cdots$。则 $u_p\to u(d_\infty)\Leftrightarrow u_p\to u(L)$且 $u_p\to u(L^+)$。

证明 必要性:由 d_∞-收敛和L-收敛的定义可知:$u_p\to u(d_\infty)\Rightarrow u_p\to u(L)$,因此只需证明 $u_p\to u(L^+)$即可。

对任意的 $\alpha\in[0,1)$,取 I 中的收敛于α 的一个单调递降列$\{\alpha_n\}$,由上确界度量 d_∞的定义可知:对上述所有的 α_n,有 $d_\infty(u_p,u)\geqslant H(L_{\alpha_n}u_p,L_{\alpha_n}u)$。再令 $n\to\infty$可得:$d_\infty(u_p,u)\geqslant H(L_{\alpha^+}u_p,L_{\alpha^+}u)$。又因为 $u_p\to u(d_\infty)$,即 $d_\infty(u_p,u)\to 0(p\to\infty)$,所以 $H(L_{\alpha^+}u_p,L_{\alpha^+}u)\to 0$。再由 α 的任意性可得:$u_p\to u(L^+)$。

充分性:假设 $u_p\not\to u(d_\infty)$,则存在 $\varepsilon_0>0$,对任意的 $p_0\in N$,存在 $p\geqslant p_0$,使得 $d_\infty(u_p,u)\geqslant 2\varepsilon_0$,即存在 $\alpha_p\in I$,使

$$H(L_{\alpha_p}u_p,L_{\alpha_p}u)\geqslant\varepsilon_0\quad(2)$$

于是满足式(2)的 α_p 有无限个,且不是无限重复的,否则与假设矛盾。因此$\{\alpha_p\}$有收敛子列$\{\alpha_{p_k}\}$,设$\{\alpha_{p_k}\}$收敛于 α_0,进一步可假设$\{\alpha_{p_k}\}$单调收敛于 α_0。为书写方便,用$\{\alpha_p\}$代替其子列$\{\alpha_{p_k}\}$,即$\{\alpha_p\}$单调收敛于 α_0。

若$\{\alpha_p\}$单调递增收敛于 α_0,则由式(2)和截集函数的左连续性可得:$H(L_{\alpha_0}u_p,L_{\alpha_0}u)\geqslant\varepsilon_0$,与 $u_p\to u(L)$矛盾,因此$\{\alpha_p\}$单调递减收敛于 α_0。

在式(2)中令 $p\to\infty$可得:$H(L_{\alpha_0^+}u_p,L_{\alpha_0^+}u)\geqslant\varepsilon_0$,这又与已知条件 $u_p\to u(L^+)$矛盾。因此假设不成立,从而必有 $u_p\to u(d_\infty)$,证毕。

下面所举的两个例子说明命题 1.2 中的 $u_p\to u(L)$和 $u_p\to u(L^+)$两个条件是必不可少的,且两者之间没有必然联系。

例 1 设 $u_p,u\in E^1,p=3,4,\cdots$,且

$$u_p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{p}, & x\in[1,2);\\ 1, & x=2.\end{cases}$$

$$u(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & x\in[1,2);\\ 1, & x=2.\end{cases}$$

显然 $u_p\to u(L)$,$L_{\frac{1}{2}^+}u_p=[1,2]$,$L_{\frac{1}{2}^+}u=\{2\}$,但 $H(L_{\frac{1}{2}^+}u_p,L_{\frac{1}{2}^+}u)=1$,$d_\infty(u_p,u)=1$。

例 2　设 $u_p,u\in E^1$,$p=3,4,\cdots$,且

$$u_p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{p}, & x\in[1,2);\\ 1, & x=2.\end{cases}$$

$$u(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & x\in[1,2);\\ 1, & x=2.\end{cases}$$

显然 $u_p\to u(L^+)$,$L_{\frac{1}{2}}u_p=\{2\}$,$L_{\frac{1}{2}}u=[1,2]$,但 $H(L_{\frac{1}{2}}u_p,L_{\frac{1}{2}}u)=1$,$d_\infty(u_p,u)=1$。

下面的定理是截集收敛的一个重要性质,由此定理得到的推论即是文献[3]中的引理 3.15。

定理 1.3　设 $u_p,u\in E^n$,$p=1,2,\cdots$,且 $u_p\to u(L)$,$L_0u_p\to L_0u(H)$。设 $\alpha,\alpha_p\in[0,1]$($p=1,2,\cdots$)且 $\alpha\notin J(u)$,若 $\alpha_p\to\alpha$,则 $\lim\limits_{p\to\infty}H(L_{\alpha_p}u_p,L_\alpha u)=0$。

证明　因为 $\alpha\notin J(u)$,所以对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使

$$H(L_{\alpha-\delta}u,L_{\alpha+\delta}u)<\varepsilon,$$

因为 $\alpha_p\to\alpha$,所以对上述的 $\delta>0$,存在 $p_1\in N$,当 $p\geqslant p_1$ 时,有 $\alpha-\delta<\alpha_p<\alpha+\delta$。又因为 $u_p\to u(L)$,所以对上述的 $\varepsilon>0$,存在 $p_2\in N$,当 $p\geqslant p_2$ 时,有

$$H(L_{\alpha+\delta}u_p,L_{\alpha+\delta}u)<\varepsilon,H(L_{\alpha-\delta}u_p,L_{\alpha-\delta}u)<\varepsilon$$

令 $p_0=\max\{p_1,p_2\}$,则对上述的 $\varepsilon>0$,当 $p\geqslant p_0$ 时,有

$$\begin{aligned}H^*(L_{\alpha_p}u_p,L_\alpha u)&\leqslant H^*(L_{\alpha-\delta}u_p,L_{\alpha+\delta}u)\\&\leqslant H^*(L_{\alpha-\delta}u_p,L_{\alpha-\delta}u)+H^*(L_{\alpha-\delta}u,L_{\alpha+\delta}u)\\&<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}H^*(L_\alpha u,L_{\alpha_p}u_p)&\leqslant H^*(L_{\alpha-\delta}u,L_{\alpha+\delta}u_p)\\&\leqslant H(L_{\alpha-\delta}u,L_{\alpha+\delta}u)+H(L_{\alpha+\delta}u,L_{\alpha+\delta}u_p)\\&<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon\end{aligned}$$

因此对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $p_0\in N$,当 $p\geqslant p_0$ 时,有

$$H(L_{\alpha_p}u_p,L_\alpha u)=H^*(L_{\alpha_p}u_p,L_\alpha u)\vee H^*(L_\alpha u,L_{\alpha_p}u_p)<2\varepsilon$$

证毕。

推论 1.4[3]　定理 1.3 中的条件"$\alpha\notin J(u)$"换成"$u\in E_c^n$"后,结论恒成立。

下面笔者给出定理 0.2 中(ii)⇒(i)的一种几何证明。

设 u_p,u 满足定理 0.2 中的假设及条件(ii)。对任意 $p\in N$,令 $f_p(\alpha)=H(L_\alpha u_p,L_\alpha u)$,则对任意的 $\alpha\in(0,1]$,$f_p(\alpha)\to0(p\to\infty)$。

因为 $u\in E_c^n$,所以对任意的 $\varepsilon>0$ 及 $\alpha_0\in(0,1)$,存在 $\delta_{\alpha_0}>0$,使

$$H(L_{\alpha_0-\delta_{\alpha_0}}u,L_{\alpha_0+\delta_{\alpha_0}}u)<\frac{\varepsilon}{2},$$

又因为 $u_p\to u(L)$,所以对上述的 $\varepsilon>0$,存在 $p_0\in N$,使当 $p\geqslant p_0$ 时,有

$$H(L_{\alpha_0-\delta_{\alpha_0}}u_p,L_{\alpha_0-\delta_{\alpha_0}}u)<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$H(L_{\alpha_0+\delta_{\alpha_0}}u_p,L_{\alpha_0+\delta_{\alpha_0}}u)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $B(\alpha_0,\delta_{\alpha_0})$是 α_0 的 δ_{α_0} 开邻域(当 α_0 为 0 或 1 时,同理分别可得 0 与 1 的半闭半开和半开半闭邻域),则$\{B(\alpha_0,\delta_{\alpha_0}):\alpha_0\in I\}$构成 I 的一个开覆盖。由 I 的紧致性可知:有有限个 $B(\alpha_0,\delta_{\alpha_0})$构成 I 的一个有限覆盖。因此要证明 $f_p(\alpha)$在 I 上一致收敛于 0,只需证明对任意的 $\alpha\in(0,1)$,$f_p(\alpha)$在某一个开邻域 $B(\alpha_0,\delta_{\alpha_0})$上一致收敛于 0 且 $f_p(0)$、$f_p(1)$分别在$[0,\delta_0)$,$(\delta_1,1]$上一致收敛于 0 即可。这里仅证明 $\alpha_0\in(0,1)$的情形,$\alpha_0=0,1$ 的情形可类似证明。

对任意的 $\alpha\in B(\alpha_0,\delta_{\alpha_0})$,对上述的 $\varepsilon>0$,当 $p\geqslant p_0$ 时,有

$$\begin{aligned}f_p(\alpha)&=H(L_\alpha u_p,L_\alpha u)=\\&H^*(L_\alpha u_p,L_\alpha u)\vee H^*(L_\alpha u,L_\alpha u_p)\leqslant\\&H^*(L_{\alpha_0-\delta_{\alpha_0}}u_p,L_{\alpha_0+\delta_{\alpha_0}}u)\vee H^*(L_{\alpha_0-\delta_{\alpha_0}}u,L_{\alpha_0+\delta_{\alpha_0}}u_p)\leqslant\\&[H(L_{\alpha_0-\delta_{\alpha_0}}u_p,L_{\alpha_0-\delta_{\alpha_0}}u)+H(L_{\alpha_0-\delta_{\alpha_0}}u,L_{\alpha_0+\delta_{\alpha_0}}u)]\vee\\&[H(L_{\alpha_0-\delta_{\alpha_0}}u,L_{\alpha_0+\delta_{\alpha_0}}u)+H(L_{\alpha_0+\delta_{\alpha_0}}u,L_{\alpha_0+\delta_{\alpha_0}}u_p)]<\\&\left[\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right]\vee\left[\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right]=\varepsilon。\end{aligned}$$

所以 $f_p(\alpha)$在 $B(\alpha_0,\delta_{\alpha_0})$上一致收敛于 0,这就证明了 $f_p(\alpha)$在 I 上一致收敛于 0。

因此对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $p_0\in N$,使当 $p\geqslant p_0$ 时,$|f_p(\alpha)|<\varepsilon$。从而

$$\sup_{\alpha\in(0,1]}|f_p(\alpha)|=\sup_{\alpha\in(0,1]}H(L_\alpha u_p,L_\alpha u)<\varepsilon,$$

即 $d_\infty(u_p,u)\to0(p\to\infty)$,证毕。

参考文献:

[1] Kaleva O. On the convergence of fuzzy sets[J]. Fuzzy

Sets and Systems，1985，17：53-65.

[2] Greco G H，Moschen M P，Rezenda E Q F. On the variational convergence of fuzzy sets in metric spaces[J]. Ann Univ Ferrara-Sez VII-Sc Mat，1998，44：27-39.

[3] Medar M R，Flores H R. On the equivalence of convergence of fuzzy sets[J]. J Fuzzy Sets and Systems，1996，80：217-224.

[4] Kuratowski K. Introducción a la Theoria de Conjuntos y a la Topologia[M]. Barcelona：Vicens-Vives，1966.

[5] Diamond P，Kloeden P. Metric Spaces of Fuzzy Sets：Theory and Applications[M]. Singapore：World Scientific，1994.

Equivalence Property of Convergence of Fuzzy Sets

BIAN Meng-ke，*FAN Tai-he*

(School of Sciences，Zhejiang Sci-Tech university，Hangzhou 310018，China)

Abstract：Base on the previous analysis of equivalency among clear boundary convergence，L-convergence，Endograph-convergence and Sendograph-convergence in special fuzzy sets，This paper proves that supremum metric convergence is equivalent to simultaneous level convergence and strong cut set convergence for general fuzzy number sequences and meanwhile gives a geometric method to prove the equivalence property of convergence on continuous fuzzy number set about cut set.

Key words：fuzzy number；supremum metric；cut set convergence；strong cut set convergence

(责任编辑：马春晓)