浙江理工大学学报，第 30 卷，第 5 期，2013 年 9 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
Vol. 30，No. 5，Sept. 2013

文章编号：1673-3851 (2013) 05-0780-04

不完全信息下投资的实物期权分析

骆 桦，司 娣
（浙江理工大学理学院，杭州 310018）

摘 要：针对不完全信息下投资的实物期权的定价问题，利用投资过程中产生的可观测的现金流量来衡量不完全信息，并将其描述为均值回复过程。通过非线性滤波理论，将信息模型融入到不可观测的资产价值模型中，得到项目投资的预测价值条件估计的随机表达式。根据 Ito 引理推导出实物期权价格所满足的偏微分方程，基于实际背景得到数值解，并应用于计算和分析实物期权的价值，帮助投资者做出最优的投资决策。

关键词：实物期权；不完全信息；Kalman 滤波理论；Bellman 方程；均值回归

中图分类号：F830.91　　**文献标志码**：A

0 引 言

随着社会经济的快速发展，经济环境复杂多变，不确定因素日益增多，企业面临的各种难以预测和不可避免的风险贯穿于整个经营过程中。企业主要采用贴现现金流方法对项目进行评估，进而做出投资方案。由于传统的贴现现金流方法在评估投资项目可行性时忽略了价值的不确定性，不能帮助投资者做出正确的项目投资决策。

针对传统的贴现现金流方法在评价项目时表现的不足，Myers S[1]提出了实物期权的概念，他指出一个投资方案产生实物现金流量所创造的利润，来自于目前拥有资产的使用，再加上一个对未来投资机会的选择。Mcdonald R 等[2]和 Dixit A 等[3]提出了实物期权模型。Bernardo A E 等[4]提出不完全信息下实物期权的模型，该模型中将基本状态变量看成一个随机变量。Takashi[5]在 Bernardo 和 Chowdhry(2002)的基础上指出基本状态变量可简化成一个随机过程。以上研究工作很少涉及到利用可观测的现金流量度量不完全信息，并将基本状态变量假定为一个均值回复过程。事实上，在不完全信息下，基本状态变量可假设为时刻在波动的利润，比如像石油价格和一般的商品价格，因此可将其假定为一个均值回复过程。

本文主要研究不完全信息下投资的实物期权，不完全是指不可以完全观测，但是部分可测。假定企业不能观测到投资收益的价值，但可以通过自身的一些活动估计投资收益的价值。之后采用可观测的现金流量衡量不完全信息，并将基本状态变量描述为一个均值回复过程。

1 建立模型

假设企业要进行一项不可逆的风险项目投资，为了使其获得最大的利润，需要制定出最优的投资决策方案。由于项目价值是不可预测的，但是影响项目预期价值的信息是可观测的。因此，企业可以通过观测投资过程中产生的现金流对项目价值做出预测。假定企业有投资机会，并假设项目的预测价值 θ_t 服从下面的均值回复过程

$$d\theta_t=\alpha\theta_t dt+\sigma_1\theta_t dB_t^1 \tag{1}$$

其中，B_t^1 是标准布朗运动；θ_t 服从均值正态分布；α，σ_1 为恒大于零的常数，α 表示项目价值的均值回复率，σ_1 为预期价值不确定的程度。

ξ_t 表示影响预期价值的信息，由于搜集信息的难度会越来越大，因此产生的现金流最终会回归到一个均衡水平，项目价值也会回归到真实价值。因

收稿日期：2013－04－10
基金项目：国家自然科学基金(60903143)；浙江理工大学系列课程建设课题项目(11432932320942)
作者简介：骆 桦(1962－)，男，浙江诸暨人，硕士，副教授，主要从事金融数学方面的研究。

此，假设 ξ_t 服从如下的随机过程：

$$d\xi_t=\alpha\theta_t dt+\sigma_2\theta_t dB_t^2 \tag{2}$$

式中，B_t^2 是标准布朗运动；θ_t 服从均值正态分布；σ_2 为恒大于零的常数，σ_2 表示信息的不确定性。

2　实物期权的价值

在这一部分，首先利用 Kalman 滤波理论定义 θ_t 的条件均值和条件方差，条件均值：$\mu_t=E[\theta_t|F_t^\xi]$，以及条件方差：$\nu_t=E[(\theta_t-\mu_t)|F_t^\xi]$。根据 Kalman 滤波理论以及 Ito 引理[6]，条件均值和条件方差满足以下方程：

$$d\mu_t=\alpha\mu_t dt \tag{3}$$

$$d\nu_t=(2\alpha\nu_t+\sigma_1^2\nu_t+\sigma_1^2\mu_t)dt \tag{4}$$

在 t 时刻投资决策分为三种方案，下面是 t 时刻投资决策的三种方案以及各种方案的收益：一是放弃投资：收益为 0；二是等待投资：收益分成两部分，一部分为等待过程中搜集信息产生的现金流，另一部分是实施投资得到的收益。其结果是随机变量，因此取其期望值。那么推迟投资的收益为 $E[d\xi_t+e^{-rdt}V_{t+dt}|F_t^\xi]$，其中 r 是风险项目的收益率；三是立即投资：收益记为 $K\theta_t$（K 为扩散系数），贴现到 t 时刻，立即投资的收益为 $E\left[\frac{K\theta_t}{r}|F_t^\xi\right]$。

综上，投资决策的期权价值应满足如下的 Bellman方程：

$$S_t=\max\left\{0,E[d\xi_t+e^{-rdt}V_{t+dt}|F_t^\xi],E\left[\frac{K\theta_t}{r}|F_t^\xi\right]\right\} \tag{5}$$

这是一个最优投资决策，即不管 t 时刻选择三种决策的哪一种，该时刻之后的剩余决策都组成一个以 t 时刻收益为初始状态的最优决策。其中上述 Bellman 方程的第二部分有如下的形式：

$$S_t=E[d\xi_t+(1-rdt)(S_t+dS_t)|F_t^\xi] \tag{6}$$

以下给出当实施推迟决策时，期权价格的定价方程，这也是本文的重点内容。由于推迟决策可以看成永久的美式期权，因此期权的价格 S_t 只与变量 μ_t 和 ν_t 有关，可记为 $S_t=S(\mu_t,\nu_t)$。

定理 1　若实施推迟决策时，期权价格由(6)式给出，则推迟决策的期权价格满足如下偏微分方程：

$$S_{\mu\mu}\alpha\mu_t^2+S_\nu(2\alpha\nu_t+\sigma_1^2\nu_t+\sigma_1^2\mu_t^2)+S_\mu\alpha\mu_t+\alpha-r\nu_t=0 \tag{7}$$

证明：由 Ito 引理得

$$dS_t=S_\mu d\mu_t+S_\nu d\nu_t+\frac{1}{2}S_{\mu\mu}d\mu_t^2 \tag{8}$$

$$d\mu_t^2=2\alpha\mu_t^2 dt \tag{9}$$

将(3)、(4)、(9)式代入(8)式，整理得

$$dS_t=S_\mu(\alpha\mu_t dt)+S_\nu[(2\alpha\nu_t+\sigma_1^2\nu_t+\sigma_1^2\mu_t^2)dt]+\frac{1}{2}S_{\mu\mu}(2\alpha\mu_t^2 dt)$$

代入(6)式得

$$S_t=E[d\xi_t+\nu_t+d\nu_t-r\nu_t dt-rdtd\nu_t]=E\Big[\alpha dt+\sigma_2 dB_t^2+\nu_t+S_\mu\alpha\mu_t dt+S_\nu(2\alpha\nu_t+\sigma_1^2\nu_t+\sigma_1^2\mu_t^2)dt+\frac{1}{2}S_{\mu\mu}(2\alpha\mu_t^2 dt)-r\nu_t dt-0\Big]$$

其中，$E[dB_t^2]=0$，$rdtd\nu_t$ 中含有 $(dt)^2$ 项，因此 $rdtd\nu_t$ 为 0，得

$$\nu_t=\alpha dt+\nu_t+S_\nu\alpha\mu_t dt+S_\nu[(2\alpha\nu_t+\sigma_1^2\nu_t+\sigma_1^2\mu_t^2)dt]+S_{\mu\mu}\alpha\mu_t^2 dt-r\nu_t dt$$

整理可得，$S_{\mu\mu}\alpha\mu_t^2 dt+S_\nu(2\alpha\nu_t+\sigma_1^2\nu_t+\sigma_1^2\mu_1^2)dt+S_\mu\alpha\mu_t dt+(\alpha-r\nu_t)dt=0$

dt 的高阶无穷小项可以忽略，两边消去 dt，整理可得到如下的偏微分方程，即所求的定价模型

$$S_{\mu\mu}\alpha\mu_t^2+S_\nu(2\alpha\nu_t+\sigma_1^2\nu_t+\sigma_1^2\mu_t^2)+S_\mu\alpha\mu_t+\alpha-r\nu_t=0$$

证毕。

上式为推迟决策时的实物期权价格所满足的偏微分方程，而 t 时刻有三种投资决策，下文将确定每种投资决策方案的边界条件。由(6)式以及投资决策收益的连续性可知，推迟决策的收益应与终止回报是一致的。于是得到以下两个边界条件：$S(\mu_l,\nu)=0$，$S(\mu_h,\nu)=\frac{K\mu_h}{r}$，对任意时刻 t 都成立。其中 μ_l，μ_h 分别为项目投资的最低收益和最高收益，(μ_l,μ_h) 为连续区间。偏微分方程(7)满足如下边界条件：$S(\mu_l,\nu)=0$，$S(\mu_h,\nu)=\frac{K\mu_h}{r}$，$S_\mu(\mu_l,\nu)=0$，$S_\mu(\mu_h,\nu)=\frac{K}{r}$。

由于在这个模型中连续区间 (μ_l,μ_h) 是未知的，而这两个边界值是内生的，是由偏微分(7)决定的，此为自由边界问题。下面将通过数值计算找到满足条件的 μ_l 和 μ_h，以及连续区间内实物期权的价格 S_t。

3　案例分析

某房地产公司看好某市的一块地皮，考虑购买并开发。由于房地产市场具有较大的不确定性，公司制定出如下的投资方案：a）若市场状况较好时，则立即投资；b）若市场状况不好，则放弃投资；c）若不能立刻做出决定，应考察市场一段时间再投资。

在现实中，根据同类上市公司的历史数据，计算近两年的收益率和波动率，得到 $\alpha=0.2$，$\sigma_1=0.02$，$\sigma_2=0.2$，$r=0.2$，$K=8$。经过数值计算可得到以下的结果：图1表示当 $\nu=0.15$ 时，期权价格作为条件期望 μ 的函数时的值。由图1可以看出连续区间 (μ_l,μ_h) 为 $(-0.40,0.27)$，而且当 $\mu=0$，$\nu=0.15$ 时，实物期权的价值 $S(0,0.15)=3.42$。因此，当 $\mu<-0.40$ 时，企业应放弃投资；当 $\mu>0.27$ 时，企业应观察一段时间再投资；当 μ 落在区间 $(-0.40,0.27)$ 内时，企业应立刻投资。

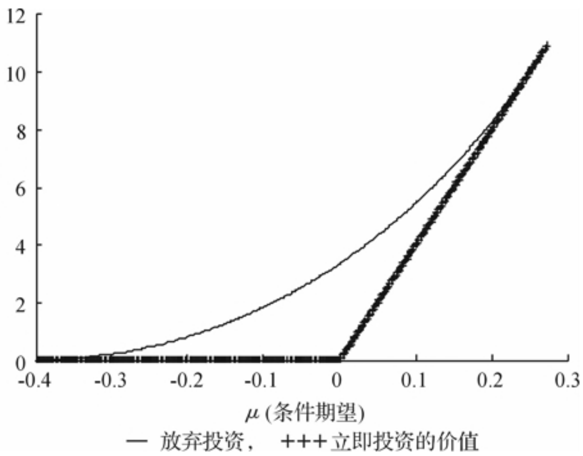

图1 $v=0.15$ 时，期权价格和连续区间

在假设中，项目价值 θ_t 是不可预测的，但是影响预期价值的信息 ξ_t 是可搜集的。即使企业不能观测 θ_t，但是可以根据历史数据确定方程(1)中系数的取值范围。现在研究参数对实物期权价值的影响。

图2当参数 α 从0.1增加到0.2时，实物期权的价值由3.01增加到4.23，同时连续区间 (μ_l,μ_h) 由 $(-0.36,0.24)$ 增加到 $(-0.40,0.37)$。由此可以得出，随着均值回复率的增加，期权价值增加，同时延迟实施投资的连续区间也扩大。反之，期权价值减小，延迟实施投资连续区间缩小。

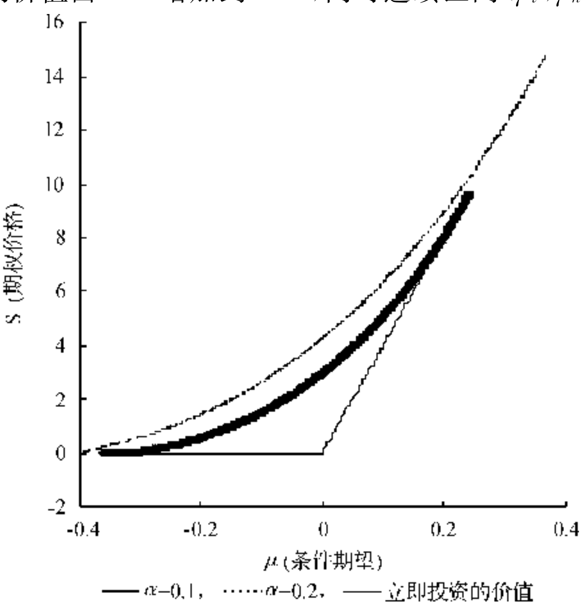

图2 α 对期权价格的敏感性分析

图3当参数 σ_2 从0.1增加到0.2时，实物期权的价值由3.42减少到2.12，同时连续区间 (μ_l,μ_h) 由 $(-0.39,0.27)$ 减少到 $(-0.18,0.17)$。由此可以得出，信息的不确定程度越大，期权的价值越低，延迟投资的连续区间越小。反之，期权的价值越高，延迟投资的连续区间越大。此结果与 Bernardo 和 Chowdhry 的研究结果是一致的。

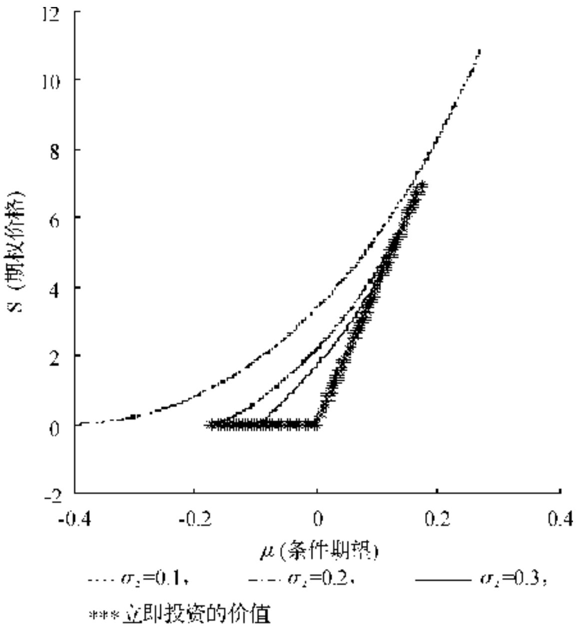

图3 σ_2 对期权价值的敏感性分析

同理分析参数 σ_1 对实物期权价值的敏感性，得出参数 σ_1 对实物期权的价值和连续区间是没有影响的。即随着 σ_1 的变化，实物期权的价值和连续区间是没有变化的。

4 结 论

本文主要研究了不完全信息下实物期权的定价问题，假设资产模型和信息模型均为均值回复过程。利用滤波理论计算实物期权满足的偏微分方程，并通过数值计算求解近似解。根据结果，企业可以做出有利的投资决策。由于实物期权理论发现了价值的不确定性并把其作为投资价值的一个组成部分，能够更好地处理房地产投资决策中所面临的较高不确定性。因此，随着房地产市场竞争的不断加剧，房地产市场不确定性的不断提高，实物期权理论将会在房地产投资决策中得到更加广泛的应用。

参考文献：

[1] Myers S. Determinants of corporate borrowing[J]. Journal of Financial Economics，1977，5(2)：147-175.

[2] Mcdonald R，Siegel D. The value of waiting to invest[J]. The Quarterly Journal of Economics，1986，101(4)：707-727.

[3] Dixit A，Pindyck R，Davis G. Investment under uncertainty[J]. Resources Policy，1996，22(3)：217.

[4] Bernardo A E，Chowdhry B. Resources，real options，and corporate strategy[J]. Journal of Financial Economics，2002，63(2)：211-234.

[5] Takashi Shibata. The impacts of uncertainties in a real options model under incomplete information[J]. European Journal of Operational Research，2008，187(3)：1368-1379.

[6] 张　波，商　豪. 应用随机过程[M]. 2 版. 北京：中国人民大学出版社，2009.

Analysis on Real Option of Investment under Incomplete Information

LUO Hua，*SI Di*

(School of Sciences，Zhejiang Sci-Tech University，Hangzhou 310018，China)

Abstract：In allusion to the pricing problem of real option of investment under incomplete information，this paper uses observable cash flow produced in the process of investment to measure incomplete information and describes it as mean reversion process；integrates information model into unobservable asset value model through non-linear filtering theory and obtains the random expression of predictive value condition estimate of project investment；deduces partial differential equation met by the price of real option according to Ito lemma；obtains numerical solution based on the actual background，applies it to the calculation and analysis of the value of real option and helps investors to make the optimal investment decisions.

Key words：real option；incomplete information；Kalman filtering theory；Bellman equation；mean reversion

(责任编辑：张祖尧)