

小变形下弹性织物压力分布的建模与计算

蒋建益^a, 徐定华^a, 杨 予^b

(浙江理工大学, a. 理学院; b. 建筑工程学院, 杭州 310018)

摘 要: 依据弹性力学中的小变形理论,建立了人体—弹性织物系统的静态力学模型。利用有限差分方法求解椭圆型偏微分方程组边界值问题,利用正则化伴随共轭梯度法求解线性代数方程组,获得人体与织物接触处的压力分布。数值模拟实例验证了模型的正确性,数值结果表明在相同约束条件下,人体受到的压力随织物位移的增大而增大。

关键词: 弹性织物; 小变形; 压力舒适性; 有限差分法; 正则化伴随共轭梯度法; 压力分布; 胡克定律

中图分类号: TS101.1 **文献标志码:** A

0 引 言

纺织材料是服装、功能纺织品研发与生产的重要原料,具有保暖、透湿、防辐射、增减压力、呈现美观等功效。纺织材料的厚度、热传导率、弹性模量、Poisson 比、微观结构与编织方式、穿着方式等决定了纺织材料的热湿传递特征、压力特征、接触特征,让人体形成了对服装的热湿舒适性、压力舒适性、接触舒适性的感受。在纺织材料设计的理论研究与产品开发中,需要瞄准人体的舒适性指标,研究如何决定纺织材料的厚度、类型、微观结构等^[1-3]。这类问题在数学、力学理论研究上是个崭新的研究领域,在纺织品研制开发及科学实验中也是重要的研究方向,理论上具有挑战,工程技术创新上具有广阔的应用前景。目前针对功能性纺织材料的研发,特别是新型复合材料、改性材料、高端功能纺织品等,研究方法总体上属于实验研究,具有成本高、耗时长、设备要求高和缺乏有效的理论指导等特征。纺织材料热湿传递、压力分布等数理研究、计算方法及其数值模拟技术的快速发展,为纺织材料的研发提供了理论研究和计算模拟方法,具有成本低、耗时短的特征,为纺织材料的研发提供理论依据和实验解释。

现代消费者对织物的功能和舒适性提出越来越高的要求,以满足其生理、心理和健康需求。就压力舒适性而言,人的需求表现在舒适、健康、治疗等方面且织物的弹性性能是主要的影响因素。人体在着装时,服装由于紧缩对人体产生了压力。压力舒适的最大值在 60~100 cN/cm² 之间,原因是这跟皮肤表层的毛细血管的血压相近^[4]。与服装压力舒适性相关的研究表明,人体不同部位具有不同的压力舒适范围,即不同部位只有处于相应的压力舒适范围时感觉才最舒适,压力过大或过小时人体都会感觉不舒服。文献[5]从人体体型角度分析了影响织物压力大小的因素,含身体曲率、人体的软组织结构、脂肪含量、运动幅度等。文献[6-8]从面料性能角度分析了影响织物压力舒适性的因素,含面料双轴向拉伸、横向拉伸性能、剪切性能、弯曲性能、面料摩擦因素、柔软度、光滑度、接触感等。针对基于压力舒适性的纺织材料设计反问题,考虑这类反问题的理论基础——纺织材料压力分布建模与计算问题,获得人体与织物接触面上的压力分布。目前的压力分布研究大多为实验研究,见图 1 和图 2,它们表示了人体臀部在弹性织物坐垫上的压力分布状况。迄今为止,应用数值模拟和数值计算方法研究

收稿日期: 2012-11-05

基金项目: 国家自然科学基金(11071201)

作者简介: 蒋建益(1988—),男,浙江浦江人,硕士研究生,主要从事反问题理论及应用研究。

通信作者: 徐定华,电子邮箱: dhxu6708@zstu.edu.cn

压力分布的研究工作还不多^[4-11]。笔者研究人体织物接触面压力分布的数学模型、数值算法与数值模拟,并通过模拟人体穿着弹性织物时,研究静态平衡下人体与织物在接触面上的压力分布特征。

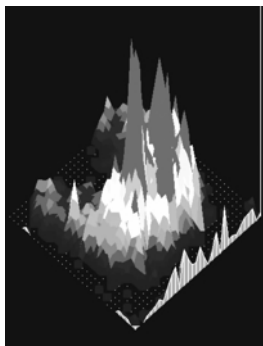


图1 人体臀部三维压力分布感应图



图2 人体臀部二维压力分布感应图

1 小变形静态模型的建立

笔者研究在静态平衡下人体与织物接触面上的压力分布。通常情况下,可以假定人体与织物之间是没有相对滑移的,此时人体和织物间只有弹性位移,且达到静态平衡。

织物穿着在人体身上时,织物的弹性变化有小变形和非线性变形两种。假定所研究的织物仅受到拉伸且满足小变形假设和各向同性假设。如图3为人体腿部的CT扫描图,考虑织物穿着在腿部的情形。

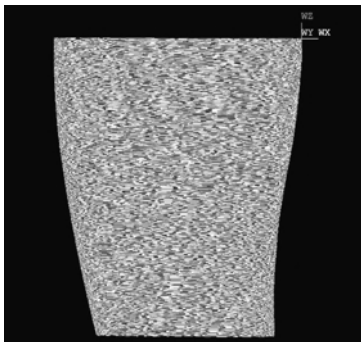


图3 人体腿部CT扫描图

当仅考虑轻薄材质的织物材料时,可以忽略织物的重力对于它的弹性形变的影响。另一方面,人体在穿着织物时,织物与周围环境之间的径向应力可以认为是零,而相应的应变则可以通过测量获得。

三维情形:考虑弹性织物穿着在人体某部位时的静态平衡,模型方程为关于唯一满足如下弹性力学方程^[12]:

$$\nabla^2 \vec{u}(P) + \frac{1}{1-2\nu} \nabla (\nabla \cdot \vec{u}(P)) + \frac{1}{\mu} \vec{f}(P) = 0, P \in \Omega \quad (1)$$

其中 \vec{u} 表示弹性织物的位移, Ω 表示织物在三维空间的区域(本文用圆筒近似表示,见图4), $\vec{f}(P)$ 表示体力; ∇^2 是三维 Laplace 算子, ∇ 是三维 Nabla 算子; Poisson 比 ν 和剪切模量 $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ (E 是弹性拉伸模量)刻画了纺织材料的弹性特征,在小变形下近似视为常量。

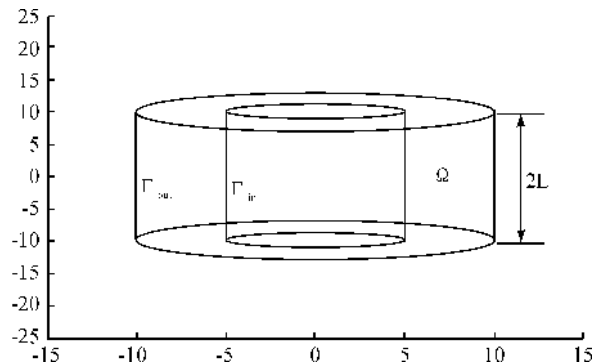


图4 服装着装前的形状示意图(三维)

在柱坐标下,应变 $(\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z, \gamma_{r\theta}, \gamma_{rz}, \gamma_{\theta z})^T$ 与位移 $(u_r, u_\theta, u_z)^T$ 的关系如下:

$$\begin{cases} \epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \epsilon_\theta = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) \\ \epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{cases}, \begin{cases} \gamma_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) \\ \gamma_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ \gamma_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \end{cases},$$

应力 $(\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{r\theta}, \tau_{rz}, \tau_{\theta z})^T$ 与应变 $(\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z, \gamma_{r\theta}, \gamma_{rz}, \gamma_{\theta z})^T$ 的关系如下:

$$\begin{cases} \sigma_r = \lambda(\epsilon_r + \epsilon_\theta + \epsilon_z) + 2\mu\epsilon_r \\ \sigma_\theta = \lambda(\epsilon_r + \epsilon_\theta + \epsilon_z) + 2\mu\epsilon_\theta \\ \sigma_z = \lambda(\epsilon_r + \epsilon_\theta + \epsilon_z) + 2\mu\epsilon_z \end{cases}, \begin{cases} \tau_{r\theta} = 2\mu\gamma_{r\theta} \\ \tau_{rz} = 2\mu\gamma_{rz} \\ \tau_{\theta z} = 2\mu\gamma_{\theta z} \end{cases}$$

这里 u_r, u_θ, u_z 分别表示径向、切向和 Z 轴方向上的弹性织物位移; $(\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z)^T$ 表示正应变, $(\gamma_{r\theta}, \gamma_{rz}, \gamma_{\theta z})^T$ 表示剪应变; $(\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z)^T$ 表示正应力, $(\tau_{r\theta}, \tau_{rz}, \tau_{\theta z})^T$ 表示剪应力; $\lambda = E\nu / ((1+\nu)(1-2\nu))$ 。

二维情形:体力忽略不计时,位移 $(u_r, u_\theta)^T$ 满足

如下方程

$$\begin{cases} \nabla^2 u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} u_r + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} u_\theta \right) = 0 \\ \nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} u_r + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} u_\theta \right) = 0, (r, \theta) \in D \end{cases} \quad (2)$$

其中 u_r, u_θ 分别表示径向和切向方向上的弹性织物位移;二维截面区域(如图5) $D = \{(r, \theta) : r_0 < r < r_0 + d, 0 \leq \theta < 2\pi\}$, r_0 是内周半径, d 是圆环厚度。

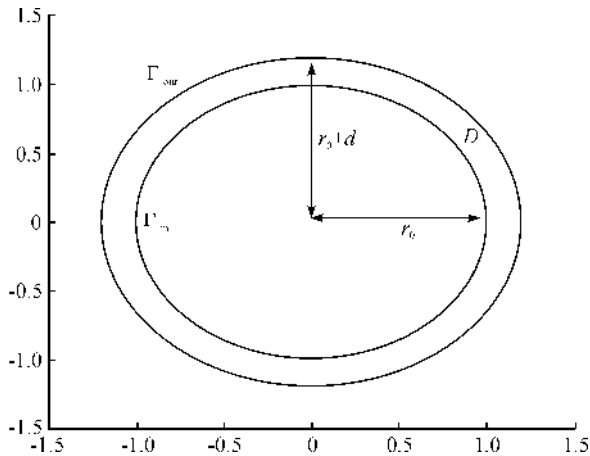


图5 服装着装前的形状示意图(二维)

在极坐标下,应变 $(\epsilon_r, \epsilon_\theta, \gamma_{r\theta})^T$ 与位移 $(u_r, u_\theta)^T$ 的关系如下:

$$\begin{cases} \epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \epsilon_\theta = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) \\ \gamma_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) \end{cases},$$

应力 $(\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta})^T$ 与应变 $(\epsilon_r, \epsilon_\theta, \gamma_{r\theta})^T$ 的关系如下:

$$\begin{cases} \sigma_r = \lambda(\epsilon_r + \epsilon_\theta + \epsilon_z) + 2\mu\epsilon_r \\ \sigma_\theta = \lambda(\epsilon_r + \epsilon_\theta + \epsilon_z) + 2\mu\epsilon_\theta \\ \tau_{r\theta} = 2\mu\gamma_{r\theta} \end{cases}$$

2 人体织物接触面应力分布的算法

2.1 二维情形

设人体与织物处于静态平衡时,内周径向变化为 u_{in} ,外周径向变化为 u_{out} ;相应地,内、外周切向的变化分别记为 $g_{in}(\theta), g_{out}(\theta)$ 。记内圆周区域为 Γ_{in} ,外圆周区域为 Γ_{out} ,两者间的环形区域为 D 。此时二维模型可以表述位移 $(u_r, u_\theta)^T$ 满足如下边值问题^[12]:

$$\begin{cases} \nabla^2 u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} u_r + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} u_\theta \right) = 0 \\ \nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} u_r + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} u_\theta \right) = 0, (r, \theta) \in D \\ u_r(r, \theta) = u_{in}, (r, \theta) \in \Gamma_{in} \\ u_r(r, \theta) = u_{out}, (r, \theta) \in \Gamma_{out} \\ u_\theta(r, \theta) = g_{in}(\theta), (r, \theta) \in \Gamma_{in} \\ u_\theta(r, \theta) = g_{out}(\theta), (r, \theta) \in \Gamma_{out} \\ u_r(r, \theta) = u_r(r, \theta + 2\pi), (r, \theta) \in D \\ u_\theta(r, \theta) = u_\theta(r, \theta + 2\pi), (r, \theta) \in D \end{cases} \quad (3)$$

对方程组(3)进行离散,二次微商、一次微商分别利用中心差分 and 向前差分公式。对 r, θ 做等步长有限差分,相应的步长分别取为 h, τ ,得到如下有限差分方程组:

$$\begin{cases} \Delta u_r - \frac{2}{r_i^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r_i^2} + \frac{1}{1-2\nu} \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} - \frac{u_r}{r_i^2} + \frac{1}{r_i} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{r_i^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r_i} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} \right] = 0 \\ \Delta u_\theta + \frac{2}{r_i^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r_i^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{r_i} \left[\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta \partial r} + \frac{1}{r_i} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{u_r}{r_i} \right] = 0 \end{cases} \quad (4)$$

其中

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial r^2} u_r(r_i, \theta_j) = \frac{u_r(r_{i+1}, \theta_j) + u_r(r_{i-1}, \theta_j) - 2u_r(r_i, \theta_j)}{h^2}, \\ \frac{\partial}{\partial r} u_r(r_i, \theta_j) = \frac{u_r(r_{i+1}, \theta_j) - u_r(r_i, \theta_j)}{h}, \\ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u_r(r_i, \theta_j) = \frac{u_r(r_i, \theta_{j+1}) + u_r(r_i, \theta_{j-1}) - 2u_r(r_i, \theta_j)}{\tau^2}, \\ \Delta u_r(r_i, \theta_j) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} u_r(r_i, \theta_j) + \frac{1}{r_i} \frac{\partial}{\partial r} u_r(r_i, \theta_j) + \frac{1}{r_i^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u_r(r_i, \theta_j) \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} u_\theta(r_i, \theta_j) = \frac{u_\theta(r_{i+1}, \theta_j) + u_\theta(r_{i-1}, \theta_j) - 2u_\theta(r_i, \theta_j)}{h^2}, \\ \frac{\partial}{\partial r} u_\theta(r_i, \theta_j) = \frac{u_\theta(r_{i+1}, \theta_j) - u_\theta(r_i, \theta_j)}{h}, \\ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u_\theta(r_i, \theta_j) = \frac{u_\theta(r_i, \theta_{j+1}) + u_\theta(r_i, \theta_{j-1}) - 2u_\theta(r_i, \theta_j)}{\tau^2}, \\ \Delta u_\theta(r_i, \theta_j) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} u_\theta(r_i, \theta_j) + \frac{1}{r_i} \frac{\partial}{\partial r} u_\theta(r_i, \theta_j) + \frac{1}{r_i^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u_\theta(r_i, \theta_j) \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} u_{\theta}(r_i, \theta_j) &= \frac{u_{\theta}(r_i, \theta_{j+1}) - u_{\theta}(r_i, \theta_j)}{\tau}, \\ \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} u_{\theta}(r_i, \theta_j) &= \\ \frac{u_{\theta}(r_{i+1}, \theta_{j+1}) + u_{\theta}(r_i, \theta_j) - u_{\theta}(r_{i+1}, \theta_j) - u_{\theta}(r_i, \theta_{j+1})}{h\tau}, \\ \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} u_r(r_i, \theta_j) &= \\ \frac{u_r(r_{i+1}, \theta_{j+1}) + u_r(r_i, \theta_j) - u_r(r_{i+1}, \theta_j) - u_r(r_i, \theta_{j+1})}{\tau h} \end{aligned} \right.,$$

$$r_i = r_0 + ih, \theta_j = \theta_0 + j\tau; i=1, 2, \dots, N, j=1, 2, \dots, M.$$

边界条件离散为 $u_{0,j}^r = u_r(r_0, \theta_j)$, $u_{N+1,j}^r = u_r(r_{N+1}, \theta_j)$, $u_{0,j}^{\theta} = u_{\theta}(r_0, \theta_j)$, $u_{N+1,j}^{\theta} = u_{\theta}(r_{N+1}, \theta_j)$, $j=1, 2, \dots, M$ 。

方程组(4)是一个 $2NM \times 2NM$ 的线性方程组, 记为 $K\vec{x} = \vec{b}$, 其中系数矩阵 K :

$$K = \begin{bmatrix} H & L \\ P & Q \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$H = \begin{bmatrix} A & B & & B \\ B & A & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & B \\ B & & B & A \end{bmatrix}_{M \times M},$$

$$L = \begin{bmatrix} F & -F & & \\ & F & \ddots & \\ & & \ddots & -F \\ -F & & & F \end{bmatrix}_{M \times M},$$

$$P = \begin{bmatrix} R & -R & & \\ & R & \ddots & \\ & & \ddots & -R \\ -R & & & R \end{bmatrix}_{M \times M},$$

$$Q = \begin{bmatrix} X & Y & & Y \\ Y & X & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & Y \\ Y & & Y & X \end{bmatrix}_{M \times M},$$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha(1) & \beta(1) & & \\ \gamma & \alpha(2) & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta(N-1) \\ & & \gamma & \alpha(N) \end{bmatrix}_{N \times N},$$

$$\begin{cases} \alpha(i) = -\frac{2}{h^2} \frac{2-2\nu}{1-2\nu} - \frac{1}{r_i h} - \frac{1}{r_i^2} \frac{2}{\tau^2} \\ \beta(i) = \frac{1}{h^2} \frac{2-2\nu}{1-2\nu} + \frac{1}{r_i h}, \gamma = \frac{1}{h^2} \frac{2-2\nu}{1-2\nu} \end{cases},$$

$$B = \frac{1}{\tau^2} \begin{bmatrix} 1/r_1^2 & & & \\ & 1/r_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/r_N^2 \end{bmatrix}_{N \times N},$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho(1)\delta(1) & -\rho(1) & & \\ & \rho(2)\delta(2) & -\rho(2) & \\ & & \ddots & -\rho(N-1) \\ & & & \rho(N)\delta(N) \end{bmatrix}_{N \times N},$$

$$\rho(i) = \frac{1}{(1-2\nu)h\tau}, \delta(i) = \frac{r_{i+1}}{r_i}$$

$$R = \begin{bmatrix} \rho(1) & -\rho(1) & & \\ & \rho(2) & \ddots & \\ & & \ddots & -\rho(N-1) \\ & & & \rho(N) \end{bmatrix}_{N \times N},$$

$$X = \begin{bmatrix} \xi(1) & \zeta(1) & & \\ \eta & \xi(2) & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \zeta(N-1) \\ & & \eta & \xi(N) \end{bmatrix}_{N \times N},$$

$$\begin{cases} \xi(i) = \frac{-2}{r_i^2 \tau^2} \frac{2-2\nu}{1-2\nu} - \frac{1}{r_i h} - \frac{2}{h^2} \\ \zeta(i) = \frac{1}{r_i h} + \frac{1}{h^2}, \quad \eta = \frac{1}{h^2} \end{cases}$$

$$Y = \frac{1}{\tau^2} \frac{2-2\nu}{1-2\nu} \begin{bmatrix} 1/r_1^2 & & & \\ & 1/r_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/r_N^2 \end{bmatrix}_{N \times N}$$

记 $u_{r,i}^r = u_r(r_i, \theta_j)$, $u_{\theta,i}^{\theta} = u_{\theta}(r_i, \theta_j)$, 解向量

$$\vec{x} = (u_{r,1}^r, u_{1,2}^r, \dots, u_{2,1}^r, u_{2,2}^r, \dots, u_{M,N}^r, u_{1,1}^{\theta}, u_{1,2}^{\theta}, \dots, u_{2,1}^{\theta}, u_{2,2}^{\theta}, \dots, u_{M,N}^{\theta})^T.$$

右端向量 \vec{b} 为

$$\vec{b} = -(b_{1,1}^r, b_{1,2}^r, \dots, b_{2,1}^r, b_{2,2}^r, \dots, b_{M,N}^r, b_{1,1}^{\theta}, b_{1,2}^{\theta}, \dots, b_{2,1}^{\theta}, b_{2,2}^{\theta}, \dots, b_{M,N}^{\theta})^T;$$

则有

$$b_{j,1}^r = (1/h^2 + 1/((1-2\nu)h^2))u_{j,0}^r,$$

$$b_{j,N}^r = -(1/((1-2\nu)r_N h \tau))u_{j,N+1}^{\theta} + (1/h^2 + 1/(r_N h) + 1/((1-2\nu)h^2))u_{j,N+1}^r + (1/((1-2\nu)r_N h \tau))u_{j+1,N+1}^{\theta}$$

$$b_{j,1}^{\theta} = (1/h^2 + 1/(r_i h))u_{j,0}^{\theta},$$

$$b_{j,N}^{\theta} = (1/((1-2\nu)r_N h \tau))(u_{j+1,N+1}^r - u_{j,N+1}^r) + (1/h^2 + 1/(r_i h))u_{j,N+1}^{\theta},$$

其余分量均为 0。注意当 $j=M+1$ 时, j 必须回转 1, 即 $u_{M+1,i}^r = u_{1,i}^r$, $u_{M+1,i}^{\theta} = u_{1,i}^{\theta}$ 。

为避免因系数矩阵的奇异性而导致错误的数值解, 采用正则化伴随共轭梯度法^[13]求解方程组(4)。

正则化伴随共轭梯度法是一种迭代算法:

$$\begin{cases} \sqrt{\alpha} \vec{v}_n^a = K \vec{x}_n^a - \vec{b} \\ \vec{x}_{n+1}^a = \vec{x}_n^a - \beta_n^a [\alpha \vec{x}_n^a + K^* \sqrt{\alpha} \vec{v}_n^a] \end{cases}$$

\vec{x}_n^a 是第 n 次迭代解, α 是正则化参数, \vec{v}_n^a 是中间变

量, K^* 是 K 的共轭, $\beta_n^a = \frac{(\vec{r}_n^a, \vec{r}_n^a)}{(K^a \vec{r}_n^a, \vec{r}_n^a)}$, 其中 $\vec{r}_n^a = K^* \vec{b} - K^a \vec{x}_n^a$, $K^a = \alpha I + K^* K$, I 表示单位矩阵。

2.2 三维情形

假定织物是圆筒(图4)形状, 内侧曲面为 $m_{in}(\theta, z)$; 人体的某一部分形状是柱体(图3近似为柱体), 体表曲面为 $b_{out}(\theta, z)$ 。当织物穿着在人体上时, 假定在人体与织物的接触面上织物沿 z 轴和轴向方向的变化相对于径向的变化很小, 即认为只有径向位移。设着装后织物的内侧径向位移 $u_{in} = b_{out} - m_{in}$, 轴向位移和 z 轴方向的位移分别为 g_{in} 、 h_{in} , 并假定圆筒织物上、下边界面上的位移均为 $\vec{u} = (u_r, u_\theta, u_z)^T = \vec{0}$, 外侧沿法线方向上的应力为 \vec{n} , 即 $\vec{n}^T T \vec{n} = 0$ [12]。 \vec{n} 表示织物外侧法向, T 表示应力张量。记着装后织物整个空间区域为 Ω , 织物的内侧边界为 Γ_{in} (此时包含形变), 外侧边界为 Γ_{out} , 织物的上下边界面分别记为 Γ_{up} 、 Γ_{down} 。在忽略织物重力的情况下, 体力为 \vec{n} 。于是三维模型可以表述位移 $(u_r, u_\theta, u_z)^T$ 满足如下边值问题:

$$\begin{cases} \nabla^2 u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\mu}{2\mu - E} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} u_r + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} u_\theta + \frac{\partial}{\partial z} u_z \right) = 0 \\ \nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\mu}{2\mu - E} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} u_r + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} u_\theta + \frac{\partial}{\partial z} u_z \right) = 0, \\ \nabla^2 u_z + \frac{\mu}{2\mu - E} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial r} u_r + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} u_\theta + \frac{\partial}{\partial z} u_z \right) = 0 \\ (r, \theta, z) \in \Omega \\ u_r(r, \theta, z) = u_{in}, (r, \theta, z) \in \Gamma_{in} \\ u_\theta(r, \theta, z) = g_{in}, (r, \theta, z) \in \Gamma_{in} \\ u_z(r, \theta, z) = h_{in}, (r, \theta, z) \in \Gamma_{in} \\ u_r = u_\theta = u_z = 0, (r, \theta, z) \in \Gamma_{up}, \Gamma_{down} \\ \vec{n}^T T \vec{n} = 0, u_\theta = u_z = 0, (r, \theta, z) \in \Gamma_{out} \end{cases} \quad (5)$$

显然, 上述问题的解还满足周期性边界条件。

重复二维情况的方法对方程组(5)做有限差分得到差分方程, 并用共轭梯度法求解。计算结果和分析见3.2节。

3 数值模拟与结果分析

3.1 二维情形算例

本文计算均利用 MATLAB 工具实现。由小变

形下的弹性理论可知, 对于没有轴向应变(或位移)的平面圆环问题, 当 $g_{in} = 0, g_{out} = 0$ 时, 其解析解为 $u_r = c_0 r + c_1 r^{-1}, u_\theta = 0$, 其中 c_0, c_1 是任意常数。

在计算中, 假定位移边界条件 $g_{in} = 0, g_{out} = 0$, 织物厚度 $d_t = 0.86 \times 10^{-3}$ m, 压缩模量 $E = 1\,225$ N/m², Poisson 比 $\nu = 0.45$ [9]; 织物初始内半径 $r_0 = 5.00 \times 10^{-2}$ m、外半径为 $r_0 + d_t$, 织物内周半径变化 $u_{in} = 1.00 \times 10^{-6}$ m、外周半径变化 $u_{out} = 0.50 \times 10^{-6}$ m。步长 $h = \frac{d_t - u_{rin} - u_{rout}}{N+1}, \tau = \frac{2\pi}{M}, N = 10, M = 20$ 。

表1是圆环区域上沿角度 $\theta = 0$ 时的径向位移数值解与径向位移解析解的比较。从表1中可以看出数值解的相对误差较小, 精度较高。这主要是因为, 对于平面圆环的情况, 通过有限差分得到的系数矩阵的条件数在 10^2 左右, 条件数较小, 即平面圆环问题是适定的, 从而保证了数值计算结果的稳定性与可靠性。然而系数矩阵的条件数并不总是较小的, 在下面3.2的分析中, 我们将看到三维情形问题的不适定性, 对于不适定问题, 经典的数值算法通常是无效的 [13]。

图6表示在直角坐标系下整个圆环区域上的径向位移分布图, 位移的大小与公式解相符, 验证了本文数值方法的有效性。为了方便观察图像, 作图时将织物的内周半径缩小到与织物厚度同一个量级。

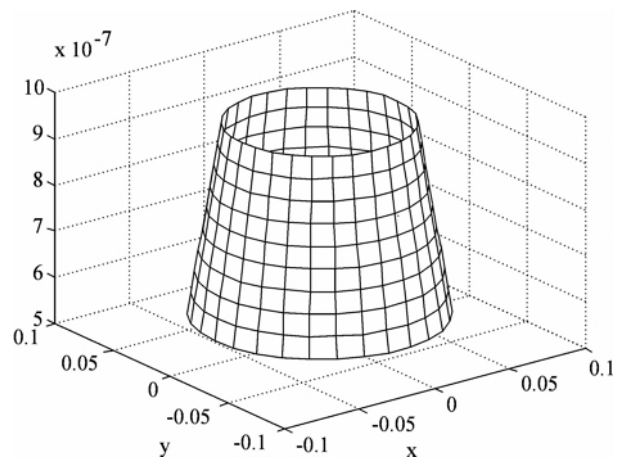


图6 区域D上径向的位移分布(直角坐标)

图7表示的是整个圆环区域上的径向应力分布图(直角坐标系)。从图7可以看出, 圆环内外边界上的力均不为0, 与通常外边界上应力为0的情况不符, 这是因为本文假定了只有径向的压缩, 忽略了有轴向力拉伸的情况, 从而需要外边界上有相应的外力来保证整个圆环区域的力的平衡。

表1 整个区域上的径向位移(极坐标)

$\theta=0$	$r=r_i/m$	数值解/ 10^{-6} m	精确解/ 10^{-6} m	绝对误差/ 10^{-8} m	相对误差/%
0.050 1		0.963 191	0.954 513	0.867 8	0.909 1
0.050 2		0.917 298	0.909 033	0.826 5	0.909 2
0.050 2		0.871 412	0.863 559	0.785 2	0.909 3
0.050 3		0.825 532	0.818 092	0.744 0	0.909 4
0.050 4		0.779 658	0.772 631	0.702 7	0.909 5
0.050 5		0.733 791	0.727 177	0.661 4	0.909 6
0.050 5		0.687 930	0.681 729	0.620 2	0.909 7
0.050 6		0.642 076	0.636 287	0.578 9	0.909 8
0.050 7		0.596 228	0.590 851	0.537 7	0.910 0
0.050 8		0.550 387	0.545 423	0.496 4	0.910 1

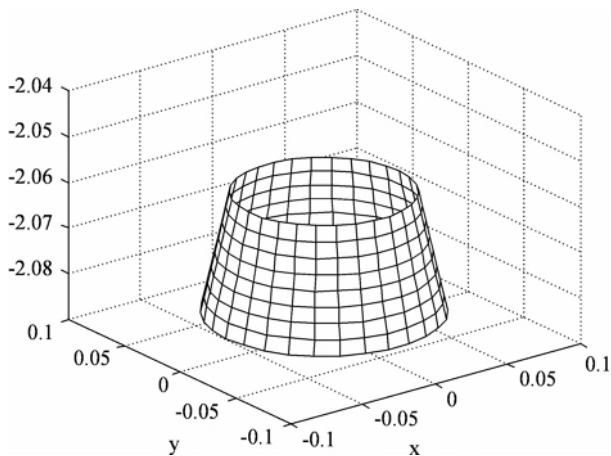


图7 区域D上径向的应力分布(直角坐标)

3.2 三维情形算例

按照第3节的假设,织物的初始形状是圆筒,穿戴在人体腿部(图3)后,织物的形状与人体腿部的形状近似相同。本文假定在柱坐标系下,从内到外的方向为径向,沿腿部向下方向为 z 轴方向, θ 方向满足右手系。

图8是人体腿部与织物接触面上织物的位移函数图,其中位移函数是关于 θ 和 z 的函数(下同)。

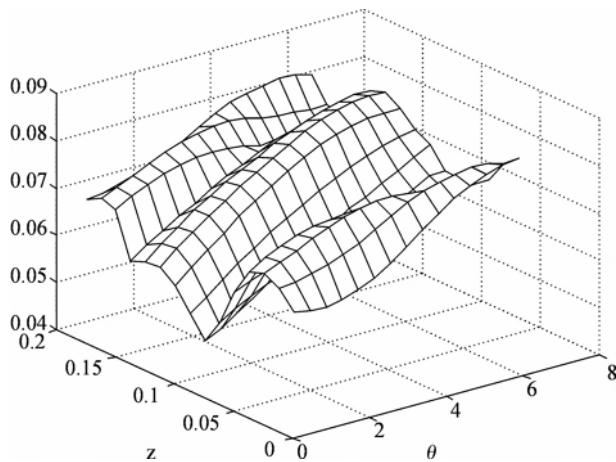
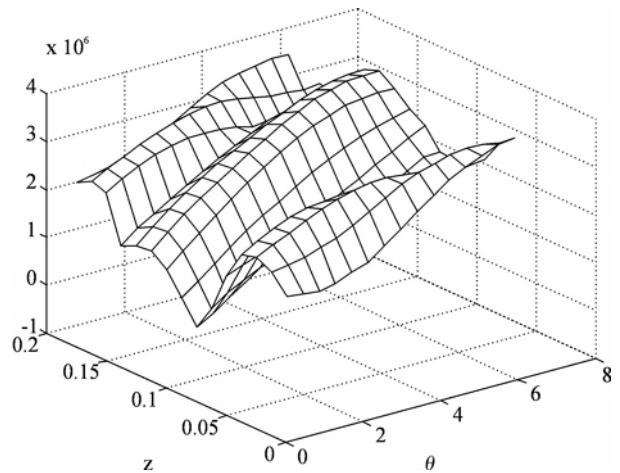
图8 接触面上位移函数 $u_r(r_0, \theta, z)$

图9是人体腿部与织物接触面上的径向应力函数。从图上可以看出,接触面上的位移与应力成正比关系,在相同的束缚条件下,人体受到的压力随着织物位移的增大而增大。

图9 接触面上的径向应力 $\sigma_r(r_0, \theta, z)$

若直接对通过有限差分得到的差分方程组求解,由于系数矩阵的条件数(10^{18})较大,所得的解严重偏离精确解,因此本文用正则化的伴随共轭梯度法求解。

4 结论与意义

4.1 通过数学建模和数值计算可以看出,若给定人体着装时织物与人体、织物与周围环境等边界上服装位移(或者形变),就可计算求解出人体与织物接触面上的应力分布,进而确定人体着装时的压力舒适程度,这属于正问题研究方法。分析结果表明,对于二维模型,差分后得到的系数矩阵条件数较小,常用数值算法能够满足精度要求;对于三维模型,相应的系数矩阵条件数大,因此应用共轭梯度法和Tikhonov正则化方法进行求解。本文提出的数学模型、数值算法为纺织材料的研发提供理论依据与科

学解释,可减少实验成本,缩短实验时间,提高研发的成功率。

4.2 基于压力舒适性提出织物材料设计反问题。基于压力舒适性的弹性织物材料设计反问题可以归结如下:为确保人体皮肤压力处于舒适性阈值范围,假设材料的厚度、结构已知,给出附加的测量数据(如弹性纺织材料的变形数据等),通过弹性力学方程组和定解条件,最优决定纺织材料的弹性拉伸模量 E 、剪切模量 μ 等参数,从而决定织物材料类型。

本文模型中,体力忽略不计。此时的反问题可具体表述为:在定解问题

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} u_r + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} u_\theta + \frac{\partial}{\partial z} u_z \right) = 0 \\ \nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} u_r + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} u_\theta + \frac{\partial}{\partial z} u_z \right) = 0, (r, \theta, z) \in \Omega \\ \nabla^2 u_z + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial r} u_r + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} u_\theta + \frac{\partial}{\partial z} u_z \right) = 0 \\ u_\theta(r, \theta, z) = g_{in}, (r, \theta, z) \in \Gamma_{in} \\ u_z(r, \theta, z) = h_{in}, (r, \theta, z) \in \Gamma_{in} \\ \vec{n}^T T \vec{n} = 0, (r, \theta, z) \in \Gamma_{out} \\ \vec{n}^T T \vec{n} = \vec{t}_{in}, (r, \theta, z) \in \Gamma_{in} \end{array} \right. \quad (7)$$

中,假设测量数据 $g_{in}, h_{in}, \vec{t}_{in}$ 和织物厚度 d 已知, \vec{t}_{in} 表示人体与弹性织物接触面上的应力,泊松比 ν 未知,试决定 ν 。

通过有限差分方法定解问题(7)可离散为线性代数方程组

$$K_\nu \vec{x} = \vec{b} \quad (8)$$

这里 K_ν 表示系数矩阵,与泊松比 ν 有关, \vec{x} 是相应的未知量, \vec{b} 是由边界条件确定的右边向量。

一般地,我们常通过最小二乘法,相应的泛函极小值问题

$$J(\nu) = \min_{\nu} \| K_\nu \vec{x} - \vec{b} \|_2$$

或者 Tikhonov 正则化方法,相应的泛函极小值问题

$$J(\nu) = \min_{\nu} \| K_\nu \vec{x} - \vec{b} \|_2 + \alpha \| \vec{x} \|_2$$

求解方程(8)。求解过程与分析将在另文中给出。

进一步还可以提出其他类型反问题,如基于热湿舒适性和压力舒适性的织物材料热传导率与弹性参数同时决定反问题,即给定环境温度和湿度组合、材料形变值以及服装热湿舒适性指标区间、压力舒适性阈值区间,假设织物材料的厚度、结构已知,通过控制方程组和定解条件同时决定织物的热传导率与弹性参数等。需深入系统研究以上问题,并获得正反问题的理论结果和求解方法,进行数值模拟。由于织物内部包含着复杂的热湿传递特征和大变形,控制方程往往是非线性、多个物理量耦合的常微分方程组或偏微分方程组,边界上具有热湿交换和能量传递,因此该研究富有挑战,亟待获得进一步的研究结果。

参考文献:

- [1] 徐定华, 陈远波. 低温环境下纺织材料类型设计反问题[J]. 纺织学报, 2011, 32(9): 24-28.
- [2] 徐定华, 葛美宝, 陈瑞林. 基于服装舒适性的纺织材料设计反问题[J]. 应用数学与计算数学学报, 2012, 26(3): 332-341.
- [3] Xu D H, Ge M B. Thickness determination in textile material design: dynamic modeling and numerical algorithms[J]. Inverse Problems, 2012, 28(3): 35011-35032.
- [4] Denton M J. Fit, stretch and comfort [J]. Textiles, 1972(3): 12-17.
- [5] Harumi M, Reiko F, Miyuki N, et al. Clothing pressure and wear feeling at under-bust part on a push-up type brassiere[J]. Sen'i Gakkaishi, 2005, 61(2): 53-58.
- [6] Noriko I, Mari I, Masae N, et al. The relation among the biaxial extension properties of girdle cloths and wearing comfort and clothing pressure of girdles[J]. Journal of the Japan Research Association for Textile End-Uses, 1995, 36: 102-108.
- [7] Harumi M, Miyuki N, Hideo M. Compressive property of legs and clothing pressure of pantyhose from the view point of difference in age[J]. Journal of the Japan Research Association for Textile End-Uses, 1997, 38(6): 324-332.
- [8] Inamura A, Nakanishi M, Niwa M. Relationship between wearing comfort and physical properties of girdles [J]. Journal of the Japan Research Association for Textile End-Uses, 1995, 36(1): 109-118.
- [9] Zhang X, Yeung K W, Li Y. Numerical simulation of 3D dynamic garment pressure [J]. Textile Research Journal, 2002, 72(3): 245-252.
- [10] Yeung K W, Li Y, Zhang X. A 3D biomechanical hu-

- man model for numerical simulation of garment-body dynamic mechanical interactions during wear [J]. Journal of the Textile Institute, 2004, 95(1): 57-79.
- [11] Liu R, Kwok Y L, Li Y, et al. A three-dimensional biomechanical model for numerical simulation of dynamic pressure functional performances of graduated compression stockings[J]. Fibers and Polymers, 2006, 7(4): 389-397.
- [12] 王敏中, 王 炜, 武际可. 弹性力学教程[M]. 2版. 北京: 北京大学出版社, 2011.
- [13] 刘继军. 不适定问题的正则化方法及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
- [14] Tsuji H, Furukara M, Kanai H, et al. Influence of curvature radius and compression energy in clothing pressure of cylinder mode[J]. Journal of Textile Engineering, 2007, 53(6): 225-230.
- [15] 梁素贞. 浅谈服装压力舒适性研究[J]. 纺织科技进展, 2010(5): 64-67.

Modeling and Calculation of Pressure Distribution of Elastic Fabric under Small Deformation

JIANG Jian-yi^a, XU Ding-hua^a, YANG Yu^b

(a. School of Science; b. School of Civil Engineering and Architecture, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: This paper establishes static mechanical model of human body-elastic fabric system according to small deformation theory in elastic mechanics; solves the problem of boundary value of the system of elliptical partial differential equations with finite difference method; solves the system of linear algebraic equations with regularized conjugate gradient method and obtains the pressure distribution at the contact point of human body and fabric. The example of numerical simulation verifies the correctness of the model. The numerical value result shows that the pressure received by human body increases with the increase of fabric displacement under the same constraint condition.

Key words: elastic fabric; small deformation; pressure comfort; finite difference method; regularized conjugate gradient method; pressure distribution; Hooke's law

(责任编辑: 马春晓)