浙江理工大学学报，第 30 卷，第 1 期，2013 年 1 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
Vol. 30，No. 1，Jan. 2013

文章编号：1673-3851 (2013) 01-0106-03

一个重要三角不等式的推广

夏星星

（浙江理工大学理学院，杭州 310018）

摘　要：研究了一个重要三角不等式成立所需条件不断减弱的问题，人们已经将条件中的数列推广到了均值有界变差数列（MVBVS）。现在通过利用 Abel 变换和适当放缩等方法，将其进一步推广，得到了在上确界有界变差（$SBVS_2$）条件下的三角不等式。

关键词：三角不等式；有界变差；推广

中图分类号：O174.21　　**文献标志码**：A

0　引　言

如果非负数列$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$对所有自然数n和某个$\lambda\geqslant 2$满足

$$\sum_{k=n}^{2n}|\Delta C_k|\leqslant\frac{M(C)}{n}\sum_{k=[\frac{n}{\lambda}]}^{[\lambda n]}C_k,$$

其中$[x]$表示不超过x的最大整数，$\Delta C=C_k-C_{k+1}$，称数列$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$为均值有界变差数列，简记为$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}\in$ MVBVS。

本文中使用M或者$M(C)$表示一个正常数或者一个仅依赖于C的正常数。

三角不等式

$$\sup_{n\geqslant 1}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}\right|\leqslant 3\sqrt{\pi}$$

是熟知的，在 Fourier 分析中具有重要的应用价值（参见文献[1]，定理 2.5）。特别在证明三角级数一致收敛性和 L^p 可积性时都有应用，目前 Wang 和 Zhao 已经将其推广到了均值有界变差（MVBV）条件（参见文献[2]）：

定理 1　设$\{n_m\}$是一自然数列，$1=n_1<n_2<n_3<\cdots$，其倒数满足

$$\sum_{j=m}^{\infty}\frac{1}{n_j}\leqslant\frac{A}{n_m},$$

其中$m=1,2,\cdots,A>1$是一个常数，如果非负数列$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}\in$ MVBVS 满足

$$nC_n\leqslant K,n=1,2,\cdots,$$

则对任意的x均有

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}C_k\sin kx\right|\leqslant M(C)A.$$

Korus 最近提出了 $SBVS_2$ 的定义，这是一种 MVBVS 的“边界条件”（参见文献[3]），定义：

如果非负数列$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$对所有自然数n和某个给定的单调趋于无穷的正数列$\{b(n)\}_{n=1}^{\infty}$满足

$$\sum_{k=n}^{2n}|\Delta C_k|\leqslant\frac{M(C)}{n}\left(\sup_{m\geqslant b(n)}\sum_{k=m}^{2m}|C_k|\right)$$

则称数列$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$为第二类上确界有界变差数列，记为$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}\in SBVS_2$。

将定理 1 的 MVBVS 条件推广到 $SBVS_2$，建立：

定理 2　设$\{n_m\}$是一自然数列，$1=n_1<n_2<n_3<\cdots$，其倒数满足

$$\sum_{j=m}^{\infty}\frac{1}{n_j}\leqslant\frac{A}{n_m},$$

其中$m=1,2,\cdots,A>1$是一个常数，如果$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}\in SBVS_2$满足

$$nC_n\leqslant K,n=1,2,\cdots,$$

则对任意的x均有

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}C_k\sin kx\right|\leqslant M(C)A.$$

收稿日期：2012－04－19

作者简介：夏星星（1989－），女，安徽巢湖人，硕士研究生，主要从事函数逼近论的研究。

1　定理 2 的证明

$x=0$ 或 $x=\pi$ 的情形显然是不需要证明的。现设 $x\in(0,\pi)$，依次选择 n 与 i 使之满足 $\frac{\pi}{n+1}\leqslant x<\frac{\pi}{n}$，$n_i\leqslant n<n_{i+1}$。因为 $kC_k<K$，则有

$$\sum_{j=1}^{i-1}\Big|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}C_k\sin kx\Big|+\Big|\sum_{k=n_i}^{n}C_k\sin kx\Big|\leqslant$$
$$\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}C_k\sin kx+\sum_{k=n_i}^{n}C_k\sin kx\leqslant$$
$$\sum_{k=1}^{n}C_k kx\leqslant Knx<K\pi.$$

由已知结论：

$$\Big|\sum_{k=p}^{q}\sin kx\Big|\leqslant\frac{A^*}{x},q\geqslant p\geqslant 1,$$

有

$$I:=\Big|\sum_{k=n+1}^{n_{i+1}-1}C_k\sin kx\Big|+\sum_{j=i+1}^{\infty}\Big|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1}C_k\sin kx\Big|,$$

应用 Abel 变换可以看出

$$I=\Big|\sum_{k=n+1}^{n_{i+1}-2}\Delta C_k\sum_{j=n+1}^{k}\sin jx+C_{n_{i+1}-1}\sum_{j=n+1}^{n_{i+1}-1}\sin jx\Big|+$$
$$\sum_{j=i+1}^{\infty}\Big|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-2}\Delta C_k\sum_{l=n_j}^{k}\sin lx+C_{n_{j+1}-1}\sum_{l=n_j}^{n_{j+1}-1}\sin lx\Big|,$$

因而

$$I\leqslant\frac{A^*}{x}\Big(\sum_{k=n+1}^{n_{i+1}-2}|\Delta C_k|+C_{n_{i+1}-1}\Big)+$$
$$\frac{A^*}{x}\sum_{j=i+1}^{\infty}\Big(\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-2}|\Delta C_k|+C_{n_{j+1}-1}\Big)$$
$$=:I_1+I_2.$$

注意到由 $nC_n\leqslant K$ 有 $C_n\to 0,n\to\infty$，就得到

$$C_{n_{i+1}-1}=\sum_{k=n_{i+1}-1}^{\infty}\Delta C_k\leqslant\sum_{k=n_{i+1}-1}^{\infty}|\Delta C_k|\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}|\Delta C_k|.$$

首先估计 I_1。当 n 充分大时，从定理 2 的条件可以推出，存在一个 $\lambda\geqslant 2$ 使得

$$I_1\leqslant\frac{2A^*}{x}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=2^j n}^{2^{j+1}n}|\Delta C_k|\leqslant$$
$$\frac{A^*}{x}\frac{M(C)}{n}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^j}\sup_{m\geqslant b(2^j n)}\sum_{k=m}^{2m}C_k\leqslant$$
$$\frac{A^*}{x}\frac{M(C)K}{n}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^j}\sup_{m\geqslant b(2^j n)}\sum_{k=m}^{2m}\frac{1}{k}\leqslant$$
$$\frac{2A^*}{x}\frac{M(C)K}{n}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^j}\leqslant$$
$$4A^*M(C)K.$$

关于 I_2，类似的讨论可以得到

$$C_{n_{j+1}-1}\leqslant\sum_{k=n_{j+1}-1}^{\infty}|\Delta C_k|\leqslant\sum_{k=n_j}^{\infty}|\Delta C_k|,$$

这样

$$I_2\leqslant\frac{2A^*}{x}\sum_{j=i+1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=2^l n_j}^{2^{l+1}n_j}|\Delta C_k|\leqslant$$
$$\frac{A^*}{x}M(C)\sum_{j=i+1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2^l n_j}\sup_{m\geqslant b(2^l n_j)}\sum_{k=m}^{2m}C_k\leqslant$$
$$\frac{A^*}{x}M(C)K\sum_{j=i+1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2^l n_j}\sup_{m\geqslant b(2^l n_j)}\sum_{k=m}^{2m}\frac{1}{k}\leqslant$$
$$\frac{2A^*}{x}M(C)K\sum_{j=i+1}^{\infty}\frac{1}{n_j}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2^l}\leqslant$$
$$\frac{4A^*}{x}M(C)K\sum_{j=i+1}^{\infty}\frac{1}{n_j}\leqslant$$
$$\frac{4A^*}{x}M(C)K\frac{A}{n_{i+1}}\leqslant$$
$$4A^*M(C)KA.$$

综合上述估计，所证三角不等式已得证明。

最后指出：存在不属于 MVBVS 但是属于 SBVS_2 且满足定理 1 中其他条件的 $\{C_n\}$ 对三角不等式也是成立的。构造如下的 $\{C_n\}$：

令 $n_1=1,n_j=2^{2^{2j}}(j=2,3,\cdots)$，显然 $1=n_1<n_2<n_3<\cdots$，且有

$$\sum_{k=j}^{\infty}\frac{1}{n_k}=\sum_{k=j}^{\infty}\frac{1}{2^{2^{2k}}}\leqslant\frac{A}{2^{2^{2j}}}.$$

定义

$$C_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n_j^2}, & n=n_j,\\ 0, & n_j<n<n_j^2,\\ \dfrac{1}{n_j^2}, & n_j^2\leqslant n<2n_j^2,\\ 0, & 2n_j^2\leqslant n<n_{j+1},\end{cases}$$ 则有

$nC_n\leqslant 3(n=1,2,\cdots)$。注意到 $\sum_{k=n_j}^{2n_j}|\Delta C_k|=\frac{1}{n_j^2}$，而对于任意给定的 $\lambda\geqslant 2$ 和充分大的 j 有

$$\frac{1}{n_j}\sum_{k=[\frac{n_j}{\lambda}]}^{[\lambda n_j]}C_k=\frac{1}{n_j^3},$$

故 $\{C_n\}\notin$ MVBVS。

另一方面，对于 $\frac{n_j}{2}\leqslant n\leqslant n_j$ 有

$$\sum_{k=n}^{2n}|\Delta C_k|\leqslant\frac{2}{n_j^2}=\frac{2}{n_j^2}\sum_{k=n_j^2}^{2n_j^2}C_k\leqslant\frac{2}{n}\sup_{m\geqslant n}\sum_{k=m}^{2m}C_k,$$

对于 $\frac{n_j^2}{2}\leqslant n\leqslant 2n_j^2$ 有

$$\sum_{k=n}^{2n}|\Delta C_k| \leqslant \frac{2}{n_j^2}\sum_{k=n_j^2}^{2n_j^2}C_k \leqslant \frac{4}{n}\sup_{m\geqslant[\frac{n}{2}]}\sum_{k=m}^{2m}C_k,$$

而对于其余$\{n_j,\cdots,n_{j+1}-1\}$范围内的n，

$$\sum_{k=n}^{2n}|\Delta C_k| = 0 \leqslant \frac{1}{n}\sup_{m\geqslant n}\sum_{k=m}^{2m}C_k,$$

因而$\{C_k\}\in SBVS_2$.

因此，定理2本质性地推广了定理1。

参考文献：

[1] 谢庭藩，周颂平. 实函数逼近论[M]. 杭州：杭州大学出版社，1998：81-82.

[2] Wang M Z, Zhao Y. Generalizations of some classical results under MVBV coditoin[J]. Math Ineq Appl, 2009, 12: 433-440.

[3] 周颂平. 三角级数研究中的单调性条件：发展和应用[M]. 北京：科学出版社，2012.

A Generalization of an Important Trigonometric Inequality

XIA Xing-xing

(Department of Mathematics, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: This paper investigates the problem of the weakening conditions which are necessary to an important trigonometric inequality. People have generalized that sequence to mean value bounded variation sequence. By Abel's transformation, appropriate scalability and other methods, the authors generalize the trigonometric inequality and come to the conclusion in the supremum bounded variation condition.

Key words: trigonometric inequality; bounded variation; generalize

（责任编辑：马春晓）