浙江理工大学学报，第 29 卷，第 5 期，2012 年 9 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
Vol. 29，No. 5，Sept. 2012

文章编号： 1673-3851 (2012) 05-0727-03

模函数的 Hölder 连续性和次可乘性

马晓艳

（浙江理工大学理学院，杭州 310018）

摘　要： 模函数 $\varphi_K(r)$ 在几何函数论、模方程理论得到广泛研究，如拟共形映照理论中 Hölder 连续性和次可乘性，文章研究了广义 Ramanujan 模方程解 $\varphi_K(a,r)$ 的 Hölder 连续性和次可乘性。当 $a=1/2$ 时，$\varphi_K(a,r)=\varphi_K(r)$。

关键词： 广义 Ramanujan 模方程；模函数；Hölder 连续性；次可乘性

中图分类号： O174　　**文献标识码：** A

0　引　言

对于实数 $a,b,c(c\neq 0,-1,-2,\cdots)$，高斯超几何函数[1-2] 定义为

$$F(a,b;c;x)={}_2F_1(a,b;c;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,n)(b,n)}{(c,n)}\frac{x^n}{n!},x\in(-1,1)\quad(1)$$

这里，当 $a\neq 0$ 时，$(a,0)=1$，其中对于 $n=1,2,\cdots$，$(a,n)=a(a+1)(a+2)(a+3)\cdots(a+n-1)$.
当 $c=a+b$ 时，函数 $F(a,b;a;x)$ 称为零平衡。当 $a\in(0,1)$，$a+b=1$，$r\in(0,1)$ 时，称

$$\mathcal{K}_a(r)=\frac{\pi}{2}F(a,1-a;1;r^2)\quad(2)$$

为第一类完全椭圆积分[3-4]。显然当 $a=1/2$ 时，$\mathcal{K}_a(r)$ 退化成第一类完全椭圆积分 $\mathcal{K}(r)$[4-8]。由式 (2) 的对称性，我们假设 $a\in(0,1/2]$。对于 $a\in(0,1/2]$，$r\in(0,1)$，$Ua:(0,1)\to(0,\infty)$ 定义为

$$Ua(r)=\frac{\pi}{2\sin\pi a}\frac{\mathcal{K}_a{}'(r)}{\mathcal{K}_a(r)}.\quad(3)$$

函数 $U(r)=U_{1/2}(r)$ 即为拟共形映照中平面 Grötzsch 环 $B^2\backslash[0,r]$ 的模函数，这里 B^2 表示平面单位圆盘。符号差 $1/a$ 的 p 次广义 Ramanujan 模方程[9] 定义为

$$\frac{F(a,1-a;1,1-s^2)}{F(a,1-a;1;s^2)}=p\frac{F(a,1-a;1,1-r^2)}{F(a,1-a;1;r^2)}\quad(4)$$

这里 $a\in(0,1/2]$，$r\in(0,1)$，$p>0$。利用式(3)，我们可以把式(4) 写成

$$\mu_a(s)=p\mu_a(r)\quad(5)$$

式(5) 的解可以表示为

$$S=\varphi_K(a,r)=Ua_a^{-1}(U_a(r)/K),K=1/p\quad(6)$$

特别地，当 $a=1/2$ 时，$\varphi_K(a,r)$ 退化成 Hersch-Pfluger 偏差函数 $\varphi_K(r)$，这个函数在拟共形映照中扮演重要的角色[10-12]。

对于 $a\in(0,1/2]$，Ramanujan 常数 $R(a)$ 定义为

$$R(a)=-2\gamma-\psi(a)-\psi(1-a),$$

其中 $R(1/2)=\log 16$，$\gamma=0.577215\cdots$ 表示 Eluer 常数，ψ 为经典 psi 函数。

最近，模函数 $\varphi_K(a,r)$ 与它的特殊形式 $\varphi_K(r)$ 在几何函数论、模方程理论得到广泛研究。特别地，很多重要的性质及其不等式在文献[3,13-15] 得以研究，如 Hölder 连续性和次可乘性，Hölder 连续性是指，设 $E\subset R^n$ 是一个集合。$f:E\to R^n$ 是一函数，$0<\alpha\leqslant 1$，若存在常数 $M>0$，对 $x_1,x_2\in E$，有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant M|x_1-x_2|^\alpha$，则称 f 是 E 上具有指数为 α 的 Hölder 连续性；次可乘性是指，若函数 $f:[0,\infty)\to R$ 对于所有的 $x\leqslant 0$，$y\leqslant 0$，满足 $f(xy)\leqslant f(x)f(y)$，则称 f 具有次可乘性。如当 $r,t\in[0,1]$，$K\geqslant 1$ 时，Anderson，Vamanamurthy 及 Vuorinen

收稿日期：2011－10－25

基金项目：国家自然科学基金资助项目(11171307，11101369)；浙江省自然科学基金项目(Y0913841)

作者简介：马晓艳(1979－)，女，吉林梅河口人，硕士，讲师，主要从事 Ramanujan 模方程、拟共形特殊函数的研究。

证明了 Hölder 连续性[13] 不等式

$$|\varphi_K(r)-\varphi_K(t)|\leqslant 4^{1-1/K}|r-t|^{1/K} \quad (7)$$

以及

$$|\varphi_{1/K}(r)-\varphi_{1/K}(t)|\geqslant 4^{1-K}|r-t|^{K} \quad (8)$$

文章主要目的是揭示模函数$\varphi_K(a,r)$的 Hölder 连续性和次可乘性，主要结果为定理 1.1、定理 1.2。

1 主要结果

定理 1.1 对于任意的 $K\in(1,\infty)$。

(1) 函数 $g_1(x)=\varphi_K(a,\tanh x)$ 从$(0,\infty)$到$(0,1)$上单调上升且为向上凹的，特别地，对于任意的 $r,t\in(0,1)$，$K\in(1,\infty)$，成立不等式

$$\varphi_K\left(a,\frac{r+t}{1+rt}\right)\leqslant\varphi_K(a,r)+\varphi_K(a,t)\leqslant 2\varphi_K\left(a,\frac{rt}{1+rt+r't'}\right) \quad (9)$$

(2) 函数 $g_2(x)=\varphi_K(a,1-\mathrm{e}^{-x})$ 从$(0,\infty)$到$(0,1)$上单调上升且为向上凹的。特别地，对于任意的 $r,t\in(0,1)$，$K\in(1,\infty)$，成立不等式

$$\varphi_K(a,r+t-rt)\leqslant\varphi_K(a,r)+\varphi_K(a,t)\leqslant 2\varphi_K(a,1-\sqrt{(1-r)(1-t)}) \quad (10)$$

即对于 $K\in(1,\infty)$，$r,t\in(0,1)$，

$$\varphi_K(a,u)\leqslant\varphi_K(a,r)+\varphi_K(a,t)\leqslant 2\varphi_K(a,v),$$

这里 $u=\max\left\{r+t-rt,\frac{r+t}{1+rt}\right\}$，

$$v=\min\left\{1-\sqrt{(1-r)(1-t)},\frac{r+t}{1+rt+r't'}\right\}。$$

定理 1.2 对于一切 $K\in(0,\infty)$，

$$A(K)=\min\{1,\mathrm{e}^{(1-\frac{1}{K})\frac{R(a)}{2}}\},$$

$$B(K)=\max\{1,\mathrm{e}^{(1-\frac{1}{K})\frac{R(a)}{2}}\},$$

在$[0,1]\times[0,1]$上定义函数 $f(r,t)$：

$$f(r,t)=\frac{\varphi_K(a,r)\varphi_K(a,t)}{\varphi_K(a,rt)}。$$

则对于一切 $K\in(1,\infty)(K\in(0,1))$，函数 $f(r,t)$ 关于 r 单调下降(单调上升)。特别地，对于任意的 $r,t\in(0,1)$，$K\in(0,\infty)$，成立不等式

$$A(K)\varphi_K(a,rt)\leqslant\varphi_K(a,r)\varphi_K(a,t)\leqslant B(K)\varphi_K(a,rt), \quad (11)$$

各等号成立当且仅当 $K=1$。

2 引 理

为了证明结论，需要下面的公式及几个引理，现叙述如下：

下面的求导公式引自文献[3]中定理 4.7(7)：

$$\frac{\partial\varphi_K(a,r)}{\partial r}=\frac{1}{K}\frac{ss'^2\mathcal{K}_a(s)^2}{rr'^2\mathcal{K}_a(r)^2}=K\frac{ss'^2\mathcal{K}'_a(s)^2}{rr'^2\mathcal{K}'_a(r)^2}, \quad (12)$$

其中 $s=\varphi_K(a,r)$，$r\in(0,1)$，$K\in(0,\infty)$。

下面的引理 2.1(1) 可根据文献[3]中引理 6.2(1)，(2)，(4)，(5)。引理 2.1(2) 可根据文献[3]中定理 6.8。

引理 2.1 对于任意的 $a\in(0,1/2]$，$K\in(1,\infty)(K\in(0,1))$，$r\in(0,1)$，令 $s=\varphi_K(a,r)$。则

(1)$h(r)=s'\mathcal{K}_a(s)/[r'\mathcal{K}_a(r)]$ 从$(0,1)$到$(1,\infty)((0,1))$严格单调下降(严格单调上升)。

(2)$J(r)=ss^1\mathcal{K}_a(s)^2/[rr'^2\mathcal{K}_a(r)^2]$ 从$(0,1)$到$(0,\infty)((0,\infty))$严格单调下降(严格单调上升)。

引理 2.2 令 $K\in(0,\infty)$，$r,b\in(0,1]$。在$[0,1]$上定义函数 f：

$$\begin{cases} f(r)=\varphi_K(a,r)^2/\varphi_K(a,br^2) \\ f(0)=f(0^+)=\mathrm{e}^{(1-\frac{1}{K})\frac{R(a)}{2}}b^{-\frac{1}{K}} \\ f(1)=f(1^-)=\dfrac{1}{\varphi_K(a,b)} \end{cases}$$

则对于 $K\in(0,1)(K\in(1,\infty))$，$f$ 严格单调上升(单调下降)。

证明：令 $x=br^2$，$s=\varphi_K(a,r)$，$u=\varphi_K(a,br^2)=\varphi_K(a,x)$，我们有 $x<r$，$f(r)=s^2/u$。对数求导，并由式(12)有

$$\frac{Kr}{2}\frac{f'(r)}{f(r)}=\frac{s'^2\mathcal{K}_a(s)^2}{r'^2\mathcal{K}_a(r)^2}-\frac{u'^2\mathcal{K}_a(u)^2}{x'^2\mathcal{K}_a(x)^2}。$$

因此，由引理2.1(1)，即可得到f的单调性及极限值。

3 定理 1.1 及定理 1.2 的证明

定理 1.1 的证明。(1) 令 $r=\tanh x=[\mathrm{e}^{2x}-1]/[\mathrm{e}^{2x}+1]$，$s=\varphi_K(a,r)$，则 $r'=\sqrt{1-r^2}=[2\mathrm{e}^{x}]/[\mathrm{e}^{2x}+1]$，$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}=r'^2$，$g_1(x)=\varphi_K(a,r)=s$，并由式(12)得

$$g'_1(x)=\frac{\partial\varphi_K(a,r)}{\partial r}\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{K}\frac{ss'^2\mathcal{K}_a(s)^2}{rr'^2\mathcal{K}_a(r)^2}\cdot r'^2。 \quad (13)$$

对于任意的 $K>1$，由式(13)及引理 2.1(2) 知，g'_1 单调下降，即得 $g_1(x)$ 的凹性。

因为 $g_1(0)=0$，$g'_1(x)$ 单调下降，所以 $g_1(x)/x$ 单调下降，又由 $g_1(x)$ 的凹性，有

$$g_1(x+y)\leqslant g_1(x)+g_1(y)\leqslant 2g_1\left(\frac{x+y}{2}\right) \quad (14)$$

令 $r=\tanh x, t=\tanh y$，则 $\tanh\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{r+t}{1+rt+r't'}$，$\tanh(x+y)=\dfrac{\tanh x+\tanh y}{1+\tanh x\cdot\tanh y}=\dfrac{r+t}{1+rt}$，故由式(14)即得不等式(9)。

(2) 令 $r=1-e^{-x}, s=\varphi_K(a,r)$，则 $g_2(x)=\varphi_K(a,r)=s$。由式(12)得，

$$g'_2(x)=\frac{1}{K}\frac{ss'^2\mathcal{K}_a(s)^2}{rr'^2\mathcal{K}_a(r)^2}(1-r) \tag{15}$$

对于任意的 $K>1$，由式(15)及引理 2.1(2) 知，g'_2 单调下降，即得 $g_2(x)$ 的凹凸性。

令 $r=1-e^{-x}, t=1-e^{-y}$，则类似证明不等式(9)的方法即可得到不等式(10)的证明。

定理 2.2 的证明。令 $D=\{(r,t):0<t<r<1\}$，$s=\varphi_K(a,r), u=\varphi_K(a,t), v=\varphi_K(a,rt)=\varphi_K(a,x)$，$x=rt<r$，则有 $f(r,t)=su/v$。对数求导，有

$$Kr\frac{1}{f(r,t)}\frac{\partial f(r,t)}{\partial r}=\frac{s'^2\mathcal{K}_a(s)^2}{r'^2\mathcal{K}_a(r)^2}-\frac{v'^2\mathcal{K}_a(v)^2}{x'^2\mathcal{K}_a(x)^2} \tag{16}$$

则根据引理 2.1(1) 以及式(16)得，对于 $K\in(1,\infty)$ ($K\in(0,1)$)，函数 $f(r,t)$ 单调下降（单调上升），在引理 2.2 中，令 $b=1$，由 r 的任意性，即可获得不等式(11)。

参考文献：

[1] Abramowitz M, Stegun I A. Handbook of Mathematical Functions with Formulas[M]. New York: Graphs and Mathematical Tables, Dover, 1965.

[2] Rainville E D. Special Functions[M]. New York: MacMillan, 1960.

[3] Anderson C D, Qiu S L. Vamanamurthy M K, et al. Generalized elliptic integrals and modular equations[J]. Pacific J, Math, 2000, 192: 1-37.

[4] Qiu S L, Vuorinen M. Special Functions in Geometric Function Theory[M]//Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory: Vol. 2, Elsevier Sci, B. V. Amsterdam, 2005: 621-659.

[5] Alzer H, Qiu S L. Monotonicity theorems and inequalities for the complete elliptic integrals[J]. J Comput Appl Math, 2004, 172: 289-312.

[6] András S, Baricz Á. Bounds for complete elliptic integral of the first kind[J]. Expo Math, 2010(28): 357-364.

[7] Guo B N, Qi F. Some bounds for the complete elliptic integrals of the first and second kinds[J]. Math Inequal Appl, 2011, 14: 323-334.

[8] Anderson G D, Vamanamurthy M K, Vuorinen M. Conformal Invariants, Inequalities, and Quasi-Conformal Maps[M]. New York: John Wiley & Sons, 1997.

[9] Berndt B C, Bhargave S, Garvan F G. Ramanujan's theories of elliptic functions to alternative bases[J]. Trans Amer Math Soc, 1995, 347: 4163-4244.

[10] Letho O, Virtanen K I. Quasiconformal Mappings in the Plane[M]. New York-Heidelberg: Springer Verlag, 1973.

[11] He C Q, Distortion estimates of quasiconformal mappings[J]. Sci Sinica Ser A, 1984, 27: 225-232.

[12] Vuorinen M. Conformal Geometry and Quasiregular Mappings[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1988.

[13] Anderson G D, Vamanamurthy M K. Vuorinen M. Distortion funtions for plane quasiconformal mappings [J]. Israel J Math, 1988, 62: 1-16.

[14] Qiu S L, Vamanamurthy M K, Vuorinen M. Bounds for quasiconformal distortion functions[J]. J Math Amal Appl, 1997, 205: 43-64.

[15] Qiu S L, Vuorinen M. Submultiplicative properties of the φ_K-distortion function[J]. Studia Math, 1996, 117: 225-242.

Holder Continuity and Submultiplicative Properties of the Modular Function

MA Xiao-yan

(School of Sciences, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: The modular function $\varphi_K(r)$ was investigated using the theory of geometric function and modular equation. The Holder continuity and submultiplicative properties of the modular function $\varphi_K(a,r)$ were studied. For $a=1/2$, $\varphi_K(a,r)=\varphi_K(r)$.

Key words: generalized Ramanujan modular equation; modular function; Holder continuity; sub-multiplicative

（责任编辑：马春晓）