浙江理工大学学报，第 29 卷，第 5 期，2012 年 9 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
Vol. 29，No. 5，Sept. 2012

文章编号：1673-3851 (2012) 05-0714-08

修正有理算子的逼近定理

程文韬
（浙江理工大学理学院，杭州 310018）

摘　要：介绍有理插值算子以及修正有理插值算子的一般形式，根据核函数的性质，提出两种控制型修正有理插值算子，并且分别给出它们的 Jackson 型估计。

关键词：$L^p_{[a,b]}$ 空间；有理插值算子；Jackson 型估计
中图分类号：O174　　**文献标识码：**A

0　引　言

有理插值算子族是一个特殊类，由于它们的结构、性质及其应用，引起许多数学家的兴趣。关于这方面的研究很广泛。设 $X=\{x_{\kappa n}\}$，$\kappa=0,1,\cdots,n$，$n=1,2,\cdots$，是$[a,b]$上一个插值矩阵，对于 $f(x)\in C_{[a,b]}$，尝试给出了有理插值算子的一般形式：

$$S_n,\lambda(f,X,x)=\sum_{\kappa=0}^{n}f(x_{\kappa n})r_\kappa(x) \qquad (1)$$

这里 $r_\kappa(x)$ 叫有理插值核函数，满足$\sum\limits_{\kappa=0}^{n}r_\kappa(x)=1$，$r_\kappa(x)>0(\kappa=0,1,\cdots,n)$，$\lambda$ 是和$\{r_\kappa(x)\}_\kappa^n=0$ 有关的参数。

先给出文中一些记号的定义：

假定 $X(n)=\{x_\kappa\}_\kappa^n=0$ 是具有 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 和存在一正常数 $C_{a,b}$ 使得 $x_j-x_{j-1}<\frac{C_{a,b}}{n}$，$j=1,\cdots,n$ 两条性质的数列。

对于 $f(x)\in L^p_{[a,b]}$，L^p 范数定义如下：

$$\|f\|_{L^p_{[a,b]}}=\left\{\int_a^b|f(t)|^p\mathrm{d}t\right\}^{\frac{1}{p}}。$$

L^p 连续模定义如下：

$$\omega(f,\delta)_{L^p_{[a,b]}}=\sup_{0<t<\delta}\|f(x+t)-f(x)\|_{L^p_{[a,b-\delta]}}。$$

$C_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\cdots}$ 表示仅和 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\cdots$ 相关的常数，出现在不同之处其值可以不同。

$AC_{[a,b]}$ 表示$[a,b]$上绝对连续函数的全体。

定义 0.1　若存在 $X=X(n)$ 和某一满足 $0<\phi(\kappa)<1$，$\kappa=1,2,\cdots$ 的正序列$\{\phi(\kappa)\}_{\kappa=1}^\infty$，若对任何 $x\in[x_{j-1},x_j]$，均满足

$$r_\kappa(x)\leqslant C_{a,b}\phi(|\kappa-j|+1)。$$

则称 $r_\kappa(x)$ 被$\{\phi(\kappa)\}_{\kappa=1}^\infty$ 全局控制，当 $\phi(\kappa)=h^\kappa$，$0<h<1$，$\kappa=1,2,\cdots$，时，称 $r_\kappa(x)$ 被等比数列$\{\phi(\kappa)\}_{\kappa=1}^\infty$ 全局控制，我们称(1) 定义的算子为几何控制型有理插值算子。当 $\phi(\kappa)=\kappa^{-\rho}$，$\rho>0$，$\kappa=1,2,\cdots$，时，称 $r_\kappa(x)$ 被以基数为 ρ 的算术序列$\{\phi(\kappa)\}_{\kappa=1}^\infty$ 全局控制，我们称(1) 定义的算子为算术控制型有理插值算子。

特别地取 $X=\left\{\frac{\kappa}{n}\right\}_{\kappa=0}^n$，$r_\kappa(x)=\dfrac{\left|x-\frac{\kappa}{n}\right|^{-\lambda}}{\sum\limits_{\kappa=0}^{n}\left|x-\frac{\kappa}{0}\right|^{-\lambda}}$ $(\kappa=0,1,\cdots,n)$，$\lambda>1$，(1) 定义的算子就是众所周知的Shepard算子，用 $L_n,\lambda(f,X,x)$ 表示，从后文可知 Shepard 算子是算术控制型有理插值算子。

若取 $X=\{x_\kappa\}_{\kappa=1}^n=\left\{\frac{\kappa}{n}\right\}_\kappa^n=1$

$$r_\kappa(x)=\frac{P_\kappa(x)}{\sum\limits_{l=1}^{k}P_l(x)},\kappa=1,2,\cdots,n,$$

$$P_\kappa(x)=x^{\lambda\kappa}\prod_{l=1}^{\kappa}x_l^{-\Delta\lambda l},\quad \kappa=1,2,\cdots,n,$$

收稿日期：2011－09－07
作者简介：程文韬(1985－)，男，安徽安庆人，硕士研究生，主要从事函数逼近论的研究。

$\Delta\lambda_1=\lambda_1, \Delta\lambda_\kappa=\lambda_\kappa-\lambda\kappa-1, \quad \kappa=2,\cdots,n,$
$0\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n, \quad \Delta\lambda_\kappa\geqslant M\kappa, \quad M$ 是一个固定常数。

(1) 定义的算子就是众所周知的 Bak 算子,用 $L_n(f,X,x)$ 代替,从后文可知 Bak 算子是几何控制型有理插值算子。

(2) 定义的算子只适合在连续空间,但在 L^p 空间,并没有多少结果。我们知道,一个有效处理 L^p 空间算子逼近的工具就是著名的 Kantorovich 型算子,定义如下:

$$S^*_{n,\lambda}(f,X,x)=\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{1}{|I_\kappa|}\int_{I_\kappa}f(u)\mathrm{d}u\times r_\kappa(x) \quad (2)$$

这里 I_κ 是区间 $[a,b]$ 上除端点外没交集的区间序列,且满足 $\bigcup_{\kappa=0}^{n}I_\kappa\subseteq[a,b]$,$r_\kappa(x)$ 还是前面的定义。Kantorovich 型算子本质就是用结点区间上的积分平均值去代替结点的函数值,类似于定义 0.1,我们给出如下定义:

定义 0.2　若存在 $X=X(n)$ 和某一满足 $0<\phi(\kappa)<1,\kappa=1,2,\cdots$ 的正序列 $\{\phi(\kappa)\}_{\kappa=1}^{\infty}$,若对任何 $x\in[x_{j-1},x_j]$,均满足

$$r_\kappa(x)\leqslant C_{a,b}\phi(|\kappa-j|+1)。$$

则称 $r_\kappa(x)$ 被 $\{\phi(\kappa)\}_{\kappa=1}^{\infty}$ 全局控制,当 $\phi(\kappa)=h^\kappa,0<h<1,\kappa=1,2,\cdots$,时,称 $r_\kappa(x)$ 被等比数列 $\{\phi(\kappa)\}_{\kappa=1}^{\infty}$ 全局控制,我们称(2) 定义的算子为几何控制型均值有理插值算子。当 $\phi(\kappa)=\kappa^{-\rho},\rho>0,\kappa=1,2,\cdots$,时,称 $r_\kappa(x)$ 被以基数为 ρ 的算术序列 $\{\phi(\kappa)\}_{\kappa=1}^{\infty}$ 全局控制,我们称(2) 定义的算子为算术控制型均值有理插值算子。

进而我们知道,Kantorovich-Shepard 算子是几何控制型均值修正有理插值算子,Kantorovich-Bak 算子是算术控制型均值修正有理插值算子。

在 L^p 空间上,还有另一种修正算子,我们称为 Durrmeyer 型算子,定义如下:

$$D_{m,\lambda}(f,x)=\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{\int_a^b f(t)r_\kappa(t)\mathrm{d}t}{\int_a^b r_\kappa(w)\mathrm{d}w}\times r_\kappa(x) \quad (3)$$

我们知道,Durrmeyer 型算子的本质是积分平均代替结点的函数值。从而,我们给出如下定义:

定义 0.3　若存在 $X=X(n)$ 和某一满足 $0<\phi(\kappa)<1,\kappa=1,2,\cdots$ 的正序列 $\{\phi(\kappa)\}_{\kappa=1}^{\infty}$,若对任何 $x\in[x_{j-1},x_j]$,均满足

$$r_\kappa(x)\leqslant C_{a,b}\phi(|\kappa-j|+1)。$$

则称 $r_\kappa(x)$ 被 $\{\phi(\kappa)\}_{\kappa=1}^{\infty}$ 全局控制,当 $\phi(\kappa)=h^\kappa,0<h<1,\kappa=1,2,\cdots$,时,称 $r_\kappa(x)$ 被等比数列 $\{\phi(\kappa)\}_{\kappa=1}^{\infty}$ 全局控制,我们称(3) 定义的算子为几何控制型积分修正有理插值算子。当 $\phi(\kappa)=\kappa^{-\rho},\rho>0,\kappa=1,2,\cdots$,时,称 $r_\kappa(x)$ 被以基数为 ρ 的算术序列 $\{\phi(\kappa)\}_{\kappa=2}^{\infty}$ 全局控制,我们称(3) 定义的算子为算术控制型积分修正有理插值算子。

同样能得到,Durrmeyer-Shepard 算子是几何控制型积分修正有理插值算子,DurrmeyerBak 算子是算术控制型积分修正有理插值算子。

将在本文中得到如下两结论:

定理 0.4　设 $f(x)\in L^p_{[a,b]},1\leqslant p<+\infty$,若对于(3) 定义的算子是几何控制型积分修正有理插值算子,则有如下结论:

$$\| D_{n,h}(f,x)-f(x)\| L^p_{[a,b]}\leqslant C_{p,h,a,b\omega}\left(f,\frac{1}{n}\right)_{L^p_{[a,b]}}。$$

定理 0.5　设 $f(x)\in L^p_{[a,b]},1\leqslant p<+\infty$,若对于(3) 定义的算子是算术控制型积分修正有理插值算子,则有如下结论:

$$\| D_{n,\rho}(f,x)-f(x)\| L^p_{a,b}\leqslant C_{p,h,a,b\omega}(f,[\varepsilon_n]^{\frac{1}{p}})_{L^p_{[a,b]}}。$$

其中:

$$\varepsilon_n=\begin{cases} n^{1-\rho} & 1<\rho<2 \\ \dfrac{\log n}{n} & \rho=2 \\ \dfrac{1}{n} & \rho>2 \end{cases}。$$

1　引　理

引理 1.1　设 $f(x)\in L^p_{[a,b]},1\leqslant p<+\infty$,(3) 定义的算子是 $L^p_{[a,b]}$ 空间的一致有界正线性算子,即

$$\| D_{n,\lambda}(f,x)\|_{L^p_{[a,b]}}\leqslant C\| f\|_{L^p_{[a,b]}}。$$

证　当 $p=1$ 时,

$$\| D_{n,\lambda}(f,x)\|_{L^1_{[a,b]}}=$$
$$\int_a^b\left|\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{\int_a^b f(x)r_\kappa(t)\mathrm{d}t}{\int_a^b r_\kappa(w)\mathrm{d}w}\times r_\kappa(x)\right|\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\int_a^b\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{\int_a^b|f(t)|r_\kappa(t)\mathrm{d}t}{\int_a^b r_\kappa(w)\mathrm{d}w}\times r_\kappa(x)\mathrm{d}x=$$
$$\sum_{\kappa=0}^{n}\int_a^b|f(t)|r_\kappa(t)\mathrm{d}t=$$
$$\int_a^b|f(t)|\mathrm{d}t=$$
$$\| f\|_{L^1_{[a,b]}}。$$

当 $1<p<+\infty$ 时,取 q 为 p 的对偶数,即满足 $\frac{1}{p}+$

$\frac{1}{q}=1$,文中其它地方也表示此定义。

$$
\begin{aligned}
&\| D_n(f) \|_{L_{[a,b]}^p}^p = \\
&\int_a^b \left| \sum_{\kappa=0}^n \frac{1}{\int_a^b r_\kappa(w)\mathrm{d}w} \int_a^b f(t) r_\kappa(t)\mathrm{d}x \times r_\kappa(x) \right|^p \mathrm{d}x \leqslant \\
&\int_a^b \left[\sum_{\kappa=0}^n \frac{1}{\int_a^b r_\kappa(w)\mathrm{d}w} \int_a^b | f(t) | r_\kappa(t)\mathrm{d}t \times r_\kappa(x) \right]^p \mathrm{d}x \leqslant \\
&\int_a^b \sum_{\kappa=0}^n r_\kappa(x) \frac{\left[\int_a^b | f(t) | r_\kappa(t)\mathrm{d}t\right]^p}{\left[\int_a^b r_\kappa(w)\mathrm{d}w\right]^p} \mathrm{d}x = \\
&\sum_{\kappa=0}^n \frac{\left[\int_a^b | f(t) | r_\kappa(t)\mathrm{d}t\right]^p}{\left[\int_a^b r_\kappa(w)\mathrm{d}w\right]^{p-1}} = \\
&\sum_{\kappa=0}^n \frac{\left[\int_a^b | f(t) | r_\kappa^{\frac{1}{p}}(t) r_\kappa^{\frac{1}{q}}(t)\mathrm{d}t\right]^p}{\left[\int_a^b r_\kappa(w)\mathrm{d}w\right]^{p-1}} \leqslant \\
&\sum_{\kappa=0}^n \frac{\left[\int_a^b | f(t) |^p r_\kappa(t)\mathrm{d}t \left[\int_a^b r_\kappa(t)\mathrm{d}t\right]^{\frac{p}{q}}\right]}{\left[\int_a^b r_\kappa(w)\mathrm{d}w\right]^{p-1}} = \\
&\sum_{\kappa=0}^n \int_a^b | f(t) |^p r_\kappa(t)\mathrm{d}t = \\
&\int_a^b | f(t) |^p \sum_{\kappa=0}^n r_\kappa(t)\mathrm{d}t = \\
&\| f \|_{L_{[a,b]}^p}^p 。
\end{aligned}
$$

即,$\| D_n(f) \| L_{[a,b]}^p$ 一致有界,定理 1.1 证毕。

引理 1.2 设 $g \in AC_{[a,b]}$,$X = X(n)$,且满足 $g' \in L_{[a,b]}^p$,$1 \leqslant p < +\infty$,g 在(1)定义下的算子是几何控制型有理插值算子,则有

$$\| S_{n,h}(g) - g \|_{L[a,b]}^{p} \leqslant \frac{G_{a,b,n}}{n} \| g' \|_{L[a,b]}^{p},1 \leqslant p < +\infty。$$

证 我们有

$$
\begin{aligned}
&| S_{n,h}(g,x) - g(x) | = \\
&\left| \sum_{\kappa=0}^n (g(x_\kappa) - g(x)) r_\kappa(x) \right| = \\
&\left| \sum_{\kappa=0}^n \int_x^{xk} | g'(t) | \mathrm{d}t r_\kappa(x) \right| 。
\end{aligned}
$$

当 $p = 1$ 时,

$$
\begin{aligned}
&\| S_{n,h}(g) - g \|_{L_{[a,b]}^1} \leqslant \\
&\int_a^b \left| \sum_{\kappa=0}^n \int_x^{x_\kappa} | g'(t) | \mathrm{d}t r_\kappa(x) \right| \mathrm{d}x \leqslant \\
&\sum_{j=1}^n \sum_{\kappa=0}^n \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_x^{x_\kappa} | g'(t) | \mathrm{d}t r_\kappa(x) \right| \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

当 $k \geqslant j$ 时,$x^* = x_{j-1}$,否则取 $x^* = x_j$,下面还将用到这一表达式,这样就有

$$
\begin{aligned}
&\| S_{n,h}(g) - g \|_{L_{[a,b]}^1} \leqslant \\
&\sum_{j=1}^n \sum_{\kappa=0}^n \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x^*}^{x_\kappa} | g'(t) | \mathrm{d}t r_\kappa(x) \right| \mathrm{d}x \leqslant \\
&2\sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x_{j-1}}^{x_j} | g'(t) | \mathrm{d}t\mathrm{d}x + \\
&\sum_{j=1}^n \sum_{\kappa=0,\kappa\neq j,\kappa\neq j-1} \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} \int_{x^*}^{x_\kappa} | g'(t) | \mathrm{d}t r_\kappa(x) \right| \mathrm{d}x \leqslant \\
&\frac{C_{a,b}}{n} \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} | g'(t) | \mathrm{d}t + \\
&\frac{C_{a,b}}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{\kappa=0,\kappa\neq j,\kappa\neq j=1}^n h^{|\kappa-j|+1} \left| \int_{x^*}^{x_\kappa} | g'(t) | \mathrm{d}t \right| \mathrm{d}x \leqslant \\
&\frac{C_{a,b}}{n} \| g' \| L_{[a,b]}^1 + \frac{C_{a,b}}{n} \sum_{m=1}^n h^{(m+1) \| g' \| L_{[a,b]}^1} \leqslant \\
&\frac{C_{a,b,h}}{n} \| g' \|_{L[a,b]}^{1} 。
\end{aligned}
$$

当 $1 < p < +\infty$ 时,对 $x \in [x_{j-1},x_j]$,有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\kappa=0}^n r_\kappa^{\frac{p}{2p-2}}(x) \leqslant C_{a,b}^{\frac{p}{2p-2}} \sum_{\kappa=0}^n h^{\frac{p(|\kappa-j|+1)}{2p-2}} \leqslant \\
&C_{a,b}^{\frac{p}{2p-2}} \sum_{m=1}^n h^{\frac{pm}{2p-2}} \leqslant C_{a,b}^{\frac{p}{2p-2}} \left(\sum_{m=1}^n h^{\frac{m}{2}}\right)^{\frac{p}{p-1}} \leqslant C_{a,b,h}^{\frac{p}{p-1}} 。
\end{aligned}
$$

则有:

$$
\begin{aligned}
&\| S_{n,h}(g) - g \|_{L[a,b]}^{p} = \\
&\left\{ \int_a^b \left| \sum_{\kappa=0}^n \int_x^{x_\kappa} | g'(t) | \mathrm{d}t r_\kappa(x) \right|^p \mathrm{d}x \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \\
&\left\{ \int_a^b \left| \sum_{\kappa=0}^n r_\kappa^{\frac{p}{2p-2}}(x) \right|^{p-1} \sum_{\kappa=0}^n r_\kappa^{\frac{p}{2}}(x) \right. \\
&\left. \left| \int_x^{x_\kappa} | g'(t) | \mathrm{d}t \right|^p \mathrm{d}x \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \\
&\left\{ \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left| \sum_{\kappa=0}^n r_\kappa^{\frac{p}{2p-2}}(x) \right|^{p-1} \sum_{\kappa=0}^n r_\kappa^{\frac{p}{2}}(x) \right. \\
&\left. \left| \int_x^{x_\kappa} | g'(t) | \mathrm{d}t \right|^p \mathrm{d}x \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \\
&\left\{ \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} C_{a,b,h}^p \sum_{\kappa=0}^n r_\kappa^{\frac{p}{2}}(x) \right. \\
&\left. \left| \int_x^{x_\kappa} | g'(t) | \mathrm{d}t \right|^p \mathrm{d}t \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \\
&C_{a,b,h} \left\{ \sum_{j=1}^n \sum_{\kappa=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} r_\kappa^{\frac{p}{2}}(x) | x_\kappa - x^* |^{p-1} \right. \\
&\left. \left| \int_{x^*}^{x_\kappa} | g'(t)^p \mathrm{d}t | \mathrm{d}x \right| \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \\
&\frac{C_{a,b,h}}{n} \left\{ \sum_{j=1}^n \sum_{\kappa=0}^n q^{\frac{p(|j-\kappa|+1)}{2}} (| j-\kappa |+1)^{p-1} \right. \\
&\left. \left| \int_{x^*}^{x_\kappa} | g'(t) |^p \mathrm{d}t \right| \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \\
&\frac{C_{a,b,h}}{n} \left\{ \sum_{j=1}^n \sum_{\kappa=0,\kappa\neq j,\kappa\neq j-1} h^{\frac{p(|j-\kappa|+1)}{2}} (| j-\kappa |+1)^{p-1} \right.
\end{aligned}
$$

$$\left|\int_{x^*}^{x_\kappa}|g'(t)^p\mathrm{d}t|\right|+2^p\sum_{j=1}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j}|g'(t)|^p\mathrm{d}t\Big\}^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\frac{C_{a,b,h}}{n}\Big\{\sum_{m=1}^{n}h^{\frac{p(m+1)}{2}}(m+1)^{p-1}$$

$$\sum_{|j-\kappa|=m}\left|\int_{x^*}^{x_\kappa}|g'(t)|^p\mathrm{d}t\right|+2^p\|g'\|_{L^p_{[a,b]}}^{p}\Big\}^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\frac{C_{a,b,h}}{n}\Big\{\Big[\sum_{m=1}^{n}h^{\frac{p(m+1)}{2}}(m+1)^p+2^p\Big]\|g'\|_{L^p_{[a,b]}}^{p}\Big\}^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\frac{C_{a,b,h}}{n}\Big[\sum_{m=1}^{n}h^{\frac{(m+1)}{2}}(m+1)+2\Big]\|g'\|L^p_{[a,b]}\leqslant$$

$$\frac{C_{a,b,h}}{n}\|g'\|L^p_{[a,b]}。$$

引理 1.2 证毕。

引理 1.3　设 $g\in AC_{[a,b]}$,$X=X(n)$,且满足 $g'\in L^p_{[a,b]}$,$1\leqslant p<+\infty$,g 在(3)定义下的算子是几何控制型积分修正有理插值算子,则有

$$\|D_{n,h}(g)-S_{n,h}(g)\|L^p_{[a,b]}\leqslant$$

$$\frac{C_{a,b,p,h}}{n}\|g'\|L^p_{[a,b]},1\leqslant p<+\infty。$$

证　当 $p=1$ 时,

$$\|D_{n,h}(g)-S_{n,h}(g)\|_{L^1_{[a,b]}}\leqslant$$

$$\int_a^b\Big|\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{1}{\int_a^b r_\kappa(w)\mathrm{d}w}$$

$$\int_a^b(g(t)-g(x_\kappa))r_\kappa(t)\mathrm{d}t\times\mathrm{d}\kappa(x)\Big|\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\int_a^b\sum_{\kappa=0}^{n}\left|\int_{x_\kappa}^{t}|g'(u)|\mathrm{d}u\right|r_\kappa(t)\mathrm{d}t=$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{\kappa=0}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\left|\int_{x_\kappa}^{t}|g'(u)\mathrm{d}u|\right|r_\kappa(t)\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{\kappa=0}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\left|\int_{x_\kappa}^{x^*}|g'(u)|\mathrm{d}u\right|r_\kappa(t)\mathrm{d}t。$$

从引理 1.2 证明 $p=1$ 时相关结论可以得到:

$$\|D_{n,h}(g)-S_{n,h}(g)\|_{L^1_{[a,b]}}\leqslant\frac{C_{a,b,q}}{n}\|g'\|_{L^1_{[a,b]}}。$$

当 $1<p<+\infty$ 时,

$$\|D_{n,h}(g)-S_{n,h}(g)\|_{L^p_{[a,b]}}^{p}\leqslant$$

$$\int_a^b\Big[\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{1}{\int_a^b r_\kappa(w)\mathrm{d}w}\int_a^b$$

$$|g(t)-g(x_\kappa)|r_\kappa(t)\mathrm{d}t\times r_\kappa(x)\Big]^p\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\int_a^b\sum_{\kappa=0}^{n}r_\kappa(x)\frac{\Big[\int_a^b|g(t)-g(x_\kappa)|r_\kappa(t)\mathrm{d}t\Big]^p}{\Big[\int_a^b r_\kappa(w)\mathrm{d}w\Big]^p}\mathrm{d}x=$$

$$\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{\Big[\int_a^b|g(t)-g(x_\kappa)|r_\kappa(t)\mathrm{d}t\Big]^p}{\Big[\int_a^b r_\kappa(w)\mathrm{d}w\Big]^{p-1}}=$$

$$\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{\Big[\int_a^b|g(t)-g(x_\kappa)|r_\kappa^{\frac{1}{p}}(t)r_\kappa^{\frac{1}{q}}(t)\mathrm{d}t\Big]^p}{\Big[\int_a^b r_\kappa(w)\mathrm{d}w\Big]^{p-1}}\leqslant$$

$$\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{\Big[\int_a^b|g(t)-g(x_\kappa)|^p r_\kappa(t)\mathrm{d}t\Big]\Big[\int_a^b r_\kappa(t)\mathrm{d}t\Big]^{\frac{p}{q}}}{\Big[\int_a^b r_\kappa(w)\mathrm{d}w\Big]^{p-1}}=$$

$$\sum_{\kappa=0}^{n}\int_a^b\left|\int_{x_\kappa}^{t}g'(u)\mathrm{d}u\right|^p r_\kappa(t)\mathrm{d}t=$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{\kappa=0}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\left|\int_{x_\kappa}^{t}g'(u)\mathrm{d}u\right|^p r_\kappa(t)\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{\kappa=0}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\left|\int_{x_\kappa}^{x^*}g'(u)\mathrm{d}u\right|^p r_\kappa(t)\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{\kappa=0}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\left|\int_{x_\kappa}^{x^*}|g'(u)|^p\mathrm{d}u\right|$$

$$|x^*-x_\kappa|^{p-1}r_\kappa(t)\mathrm{d}t\leqslant$$

$$C_{a,b}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\kappa=0}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\left|\int_{x_\kappa}^{x^*}|g'(u)|^p\mathrm{d}u\right|$$

$$|x^*-x_\kappa|^{p-1}q^{|j-\kappa|+1}\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\frac{C_{a,b}}{n^p}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\kappa=0}^{n}h^{|j-\kappa|+1}(|j-\kappa|+1)^{p-1}$$

$$\left|\int_{x^*}^{x_\kappa}|g'(t)|^p\mathrm{d}t\right|\leqslant$$

$$\frac{C_{a,b}}{n^p}\Big\{\sum_{j=1}^{n}\sum_{\kappa=0,\kappa\neq j,\kappa\neq j-1}h^{|j-\kappa|+1}(|j-\kappa|+1)^{p-1}$$

$$\left|\int_{x^*}^{x_\kappa}|g'(t)|^p\mathrm{d}t\right|+2^p\sum_{j=1}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j}|g'(t)|^p\mathrm{d}t\Big\}\leqslant$$

$$\frac{C_{a,b}}{n^p}\Big\{\sum_{m=1}^{n}h^{m+1}(m+1)^{p-1}\sum_{|j-\kappa|=m}$$

$$\left|\int_{x^*}^{x_\kappa}|g'(t)|^p\mathrm{d}t\right|+2^p\|g'\|_{L^p_{[a,b]}}^{p}\Big\}\leqslant$$

$$\frac{C_{a,b}}{n^p}\Big[\sum_{m=1}^{n}h^{m+1}(m+1)^p+2^p\Big]\|g'\|_{L^p_{[a,b]}}^{p}\leqslant$$

$$\frac{C_{a,b,p,h}}{n^p}\|g'\|_{L^p_{[a,b]}}^{p}。$$

即:

$$\|D_{n,h}(g)-S_{n,h}(g)\|_{L^p_{[a,b]}}\leqslant\frac{C_{a,b,p,h}}{n}\|g'\|_{L^p_{[a,b]}}$$

引理 2.3 证毕。

引理 1.4　$r_\kappa(x)$ 被以基数为 $\rho(\rho>1)$ 的算术序列 $\{\phi(\kappa)\}_{\kappa=1}^{\infty}$ 全局控制,则有对任何 $t\in[a,b]$,均有 $\sum_{\kappa=0}^{n}|t-x_\kappa|r_\kappa(t)\leqslant C_{a,b,\rho}\varepsilon_n$ 成立。

证　对任何 $t\in[x_{j-1},x_j]$,$j=1,\cdots,n$,我们能

得到 $|t-x_\kappa| \leqslant C_{a,b}\dfrac{|j-\kappa|+1}{n}$ 和 $r_\kappa(t) \leqslant C_{a,b}(|j-\kappa|+1)^{-\rho}$ 成立，从而

$$\sum_{\kappa=0}^{n}|t-x_\kappa|r_\kappa(t) \leqslant C_{a,b}\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{|j-\kappa|+1}{n}(|j-\kappa|+1)^{-\rho} \leqslant C_{a,b,\rho}\varepsilon_n。$$

引理1.4证毕。

引理1.5 设 $g\in AC_{[a,b]}$，$X=X(n)$，且满足 $g'\in L^p_{[a,b]}$，$1\leqslant p<+\infty$，g 在(3)定义下的算子是算术控制型积分修正有理插值算子，则有

$$\| D_{n,\rho}(g)-g\|_{L^p_{[a,b]}} \leqslant C_{a,b,\rho,p}[\varepsilon_n]^{\frac{1}{p}}\|g'\|_{L^p_{k[a,b]}}。$$

证 定义极大函数：

$$M(g,x):=\sup_{t\in[a,b]}\left|\frac{1}{x-t}\int_t^x|g(u)\mathrm{d}u|\right|。$$

由文献[1]，我们知道：

$$\|M(g)\|_{L^p_{[a,b]}} \leqslant C_p\|g\|_{L^p_{[a,b]},p>1}。$$

对任何 $g(x)\in AC$，当 $p>1$ 时，

$$\begin{aligned}
&|D_{n,\rho}(g,x)-g(x)|=\\
&\left|\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{1}{\int_a^b r_\kappa(w)\mathrm{d}w}\int_a^b[g(t)-g(x)]r_\kappa(t)\mathrm{d}t\times r_\kappa(x)\right| \leqslant\\
&\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{1}{\int_a^b r_\kappa(w)\mathrm{d}w}\int_a^b|g(t)-g(x)|r_\kappa(t)\mathrm{d}t\times r_\kappa(x) \leqslant\\
&\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{1}{\int_a^b r_\kappa(w)\mathrm{d}w}\int_a^b[|g(t)-g(x_\kappa)|+\\
&|g(x)-g(x_\kappa)|]r_\kappa(t)\mathrm{d}t\times r_\kappa(x) \leqslant\\
&\sum_{\kappa=0}^{n}M(g',x)r_\kappa(x)|x-x_\kappa|+\\
&\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{1}{\int_a^b r_\kappa(w)\mathrm{d}w}\int_a^b|M(g',t)||t-x_\kappa|r_\kappa(t)\mathrm{d}t\times r_\kappa(x)\\
&:=I_1+I_2
\end{aligned} \tag{4}$$

由引理1.4可知：

$$\|I_1\|_{L^p_{[a,b]}} \leqslant C_{s,p\varepsilon_n}\|g'\|_{L^p_{[a,b]}} \leqslant C_{s,p}\varepsilon_n^{\frac{1}{p}}\|g'\|_{L^p_{[a,b]}} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
&\|I_2\|^p_{L^p_{[a,b]}}=\\
&\int_a^b\left|\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{1}{\int_a^b r_\kappa(w)\mathrm{d}w}\int_a^b|M(g',t)||t-x_\kappa|r_\kappa(t)\mathrm{d}t\times r_\kappa(x)\right|^p\mathrm{d}x \leqslant\\
&\int_a^b\sum_{\kappa=0}^{n}r_\kappa(x)\frac{1}{\int_a^b r_\kappa(w)^p}\left[\int_a^b|M(g',t)||t-x_\kappa|r_\kappa(t)\mathrm{d}t\right]^p\mathrm{d}x=\\
&\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{1}{\int_a^b r_\kappa(w)^{p-1}}\left[\int_a^b|M(g',t)||t-x_\kappa|^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p}}r_\kappa^{\frac{1}{q}}(t)r_\kappa^{\frac{1}{p}}(t)\mathrm{d}t\right]^p \leqslant\\
&\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{1}{\int_a^b r_\kappa(w)^{p-1}}\left[\int_a^b|M(g',t)|^p|t-x_\kappa|r_\kappa(t)\mathrm{d}t\right]\left[\int_a^b|t-x_\kappa|r_\kappa(t)\mathrm{d}t\right]^{\frac{p}{q}} \leqslant\\
&C_{a,b}\sum_{\kappa=0}^{n}\int_a^b|M(g',t)|^p|t-x_\kappa|r_\kappa(t)\mathrm{d}t=\\
&C_{a,b}\int_a^b|M(g',t)|^p\sum_{\kappa=0}^{n}|t-x_\kappa|r_\kappa(t)\mathrm{d}t \leqslant\\
&C_{a,b,\rho,p}\varepsilon_n\|g'\|^p_{L^p_{[a,b]}}
\end{aligned}$$

可知：

$$\|I_2\|_{L^p_{[a,b]}} \leqslant C_{a,b,\rho,p}[\varepsilon_n]^{\frac{1}{p}}\|g'\|_{L^p_{[a,b]}} \tag{6}$$

由式(4)、式(5)、式(6)可得引理1.5当 $p>1$ 时成立。

当 $p=1$ 时，我们可得

$$\begin{aligned}
&|D_n(g,x)-g(x)| \leqslant\\
&\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{1}{\int_a^b r_\kappa(w)\mathrm{d}w}\int_a^b\left|\int_t^x|g'(u)|\mathrm{d}u\right|r_\kappa(t)\mathrm{d}t\cdot r_\kappa(x) \leqslant\\
&\sum_{\kappa=0}^{n}\left|\int_x^{x_\kappa}|g'(u)|\mathrm{d}u\right|\cdot r_\kappa(x)+\\
&\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{1}{\int_a^b r_\kappa(w)\mathrm{d}w}\int_a^b\left|\int_t^{x_\kappa}|g'(u)|\mathrm{d}u\right|r_\kappa(t)\mathrm{d}t\cdot r_\kappa(x)\\
&:=I_3+I_4。
\end{aligned}$$

其中：

$$\begin{aligned}
&\|I_3\|_{L^1_{[a,b]}}=\\
&\int_a^b\sum_{\kappa=0}^{n}\left|\int_x^{x_\kappa}|g'(u)|\mathrm{d}u\right|\times r_\kappa(x)\mathrm{d}x=\\
&\sum_{j=1}^{n}\sum_{\kappa=0}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\left|\int_x^{x_\kappa}|g'(u)|\mathrm{d}u\right|\times r_\kappa(x)\mathrm{d}x \leqslant\\
&\sum_{j=1}^{n}\sum_{\kappa=0}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\left|\int_{x^*}^{x_\kappa}|g'(u)|\mathrm{d}u\right|\times r_\kappa(x)\mathrm{d}x \leqslant\\
&\frac{C_{a,b}}{n}\sum_{m=0}^{n}\sum_{|j-\kappa|=m}[|j-\kappa|+1]^{-\rho}\left|\int_{x^*}^{x_\kappa}|g'(u)|\mathrm{d}u\right| \leqslant\\
&\frac{C_{a,b}}{n}\sum_{m=0}^{n}[m+1]^{1-\rho}\|g'\|_{L^1_{[a,b]}} \leqslant\\
&C_{a,b,\rho}\varepsilon_n\|g'\|_{L^1_{[a,b]}}。
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\|I_4\|_{L^1_{[a,b]}}=\\
&\sum_{\kappa=0}^{n}\int_a^b\left|\int_t^{x_\kappa}|g'(u)|\mathrm{d}u\right|\times r_\kappa(t)\mathrm{d}t=
\end{aligned}$$

$\| I_3 \|_{L^1_{[a,b]}} \leqslant C_{a,b,\rho} \varepsilon_n \| g' \|_{L^1_{[a,b]}}$

引理 1.5 证毕。

2 定理的证明

定理 0.4 的证明 对于 $f(x) \in L^p_{[a,b]}, 1 \leqslant p < +\infty$，$K$－泛函定义如下：

$$K(f,h)_{L^p_{[a,b]}} = \inf_{g \in AC_{[a,b]}, g' \in L^p_{[a,b]}} \{ \| f - g \|_{L^p} + h \| g' \|_{L^p} \},$$

我们知道[2]：

$$\frac{1}{C_{a,b}} \omega(f,h)_{L^p_{[a,b]}} = K(f,h)_{L^p_{[a,b]}} C_{a,b} \omega(f,h)_{L^p_{[a,b]}}。$$

$\forall g(x) \in AC_{[a,b]}, g'(x) \in L^p_{[a,b]}$，由引理 1.1，引理 1.2，引理 1.3 则有：

$$\begin{aligned}
&\| D_{n,h}(f) - f \|_{L^p_{[a,b]}} \leqslant \\
&\quad \| D_{n,h}(f) - D_{n,h}(g) \|_{L^p_{[a,b]}} + \\
&\quad \| D_{n,h}(g) - S_{n,h}(g) \|_{L^p_{[a,b]}} + \\
&\quad \| S_{n,h}(g) - g \|_{L^p_{[a,b]}} + \| f - g \|_{L^p_{[a,b]}} \leqslant \\
&\quad C \| f - g \|_{L^p_{[a,b]}} + \frac{C_{a,b,p,h}}{n} \| g' \|_{L^p_{[a,b]}} + \\
&\quad \frac{C_{a,b,h}}{n} \| g' \|_{L^p_{[a,b]}} \leqslant \\
&\quad C_{a,b,p,h} \left\{ \| f - g \|_{L^p_{[a,b]}} + \frac{1}{n} \| g' \|_{L^p_{[a,b]}} \right\}
\end{aligned}$$

对 g 取下确界就有，

$$\begin{aligned}
&\| D_n(f) - f \|_{L^p_{[a,b]}} \leqslant C_{a,b,p,h} K\left(f, \frac{1}{n}\right)_{L^p_{[a,b]}} = \\
&\inf_{g \in AC_{a,b}, g' \in L^p_{[a,b]}} \left\{ \| f - g \|_{L^p_{[a,b]}} + \frac{1}{n} \| g' \|_{L^p_{[a,b]}} \right\} \leqslant \\
&C_{a,b,p,h} \omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_{L^p_{[a,b]}}。
\end{aligned}$$

定理 0.4 得证。

定理 0.5 的证明 K－泛函定义如同定理 0.4 的证明里面的定义，

$\forall g(x) \in AC_{[a,b]}, g'(x) \in L^p_{[a,b]}$，由引理 1.1，引理 1.5 则有：

$$\begin{aligned}
&\| D_n(f) - f \|_{L^p_{[a,b]}} \leqslant D_n(f) - D_n(g) \|_{L^p_{[a,b]}} + \\
&\| D_n(g) - g \|_{L^p_{[a,b]}} + \| f - g \|_{L^p_{[a,b]}} \leqslant \\
&C \| f - g \|_{L^p_{[a,b]}} + C_{a,b,\rho,p} \{\varepsilon_n\}^{\frac{1}{P}} \| g' \|_{L^p_{[a,b]}} \leqslant \\
&C_{a,b,\rho,p} \{ \| f - g \|_{L^p_{[a,b]}} + \{\varepsilon_n\}^{\frac{1}{P}} \| g' \|_{L^p_{[a,b]}} \}
\end{aligned}$$

对 g 取下确界就有，

$$\begin{aligned}
&\| D_n(f,x) - f(x) \|_{L^p_{[a,b]}} \leqslant \\
&C_{a,b,\rho,p} K(f, \{\varepsilon_n\}^{\frac{1}{P}})_{L^p_{[a,b]}} = \\
&\inf_{g \in AC_{[a,b]}, g' \in L^p_{[a,b]}} \{ \| f - g \|_{L^p_{[a,b]}} + \\
&\{\varepsilon_n\}^{\frac{1}{P}} \| g' \|_{L^p_{[a,b]}} \} \leqslant \\
&C_{a,b,\rho,p} \omega(f, \{\varepsilon_n\}^{\frac{1}{P}})_{L^p_{[a,b]}}。
\end{aligned}$$

定理 0.5 得证。

3 应 用

3.1 Bak 算子 Bak 算子定义上文已经介绍，$a = 0, b = 1, X(n) = \left\{ \frac{k}{n} \right\}_{k=0}^{n}$，Durrmeyerbak 算子可定义如下：

$$D_n^1(f,x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\int_0^1 rk(w)\mathrm{d}w} \int_0^1 f(t) r_k(t) \mathrm{d}t \times r_k(x)$$

由文献[3]能得到：

引理 3.1.1 对任何 $x \in \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n} \right], 1 \leqslant j \leqslant n$ 成立

$$r_\kappa(x) \leqslant \mathrm{e}^{-C|j-\kappa|}, \kappa = 1, 2, \cdots, n。$$

由引理 3.1.1 可知，$D_n^1(f,x)$ 是属于几何控制型积分修正有理插值算子，第一部分已经给出这个论断。利用定理 0.4 的结果可以建立如下定理：

定理 3.1.2 设 $f(x) \in L^p_{[0,1]} (1 \leqslant p < +\infty)$，则存在一个仅依赖于 M 和 p 的正常数 C_p，使得

$$\| D_n^1(f) - f \| L^p_{[0,1]} \leqslant C_p w\left(f, \frac{1}{n}\right) L^p_{[0,1]}。$$

3.2 Shepard 算子 Shepard 算子定义第一节已经介绍，$a = 0, b = 1, X(n) = \left\{ \frac{\kappa}{n} \right\}_{\kappa=0}^{n}$，Durrmeyer-Shepard 算子可定义如下：

$$D_{n,\lambda}^2(f,x) = \sum_{\kappa=0}^{n} \frac{1}{\int_0^1 r_\kappa(w)\mathrm{d}w} \int_0^1 f(t) r_\kappa(t) \mathrm{d}t \times r_\kappa(x)。$$

由文献[4]能得到：

引理 3.2.1 对任何 $x \in \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n} \right], 1 \leqslant j \leqslant n$ 成立

$$r_\kappa(x) \leqslant C_\lambda (| j - \kappa | + 1)^{-\lambda}, \kappa = 0, 1, 2 \cdots, n。$$

由引理 3.2.1 可知，$D_{n,\lambda}^2(f,x)$ 是属于算术控制型积分修正有理插值算子，第一部分已经给出这个论断。利用定理 0.5 的结果可以建立如下定理：

定理 3.2.2 设 $f(x) \in L^p_{[0,1]} (1 \leqslant p < +\infty)$，则存在一个仅依赖于 p 和 $\lambda (\lambda > 1)$ 的正常数 $C_{p,\lambda}$，使得

$$\| D_{n,\lambda}^2(f) - f \|_{L^p_{[0,1]}} \leqslant C_{p,\lambda} w(f, [\varepsilon_n]^{\frac{1}{p}})_{L^p_{[0,1]}}。$$

3.3 Vertesi 算子 文献[5]介绍了连续函数空间 $C_{[-1,1]}$ 上的 Vertesi 有理插值算子，其定义如下：

$$L_n(f,x) = L_{n,s}(f,X,x) := \sum_{\kappa=0}^{n} f(x_\kappa) r_\kappa(x) =$$

$$\sum_{\kappa=0}^{n} f(x_\kappa) \frac{|l_\kappa(x)|^s}{\sum_{m=0}^{n} |l_m(x)|^s}, s>0。$$

这里 $U_{n-1}(x)=\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$，$(x=\cos\theta)$ 为第二类 Chebyshev 多项式，$X=\{x_\kappa\}_{\kappa=0}^{n}=\{\cos\theta_\kappa\}_{\kappa=0}^{n}=\left\{\cos\frac{\kappa\pi}{n}\right\}_{\kappa=0}^{n}$ 是 $(1-x^2)U_{n-1}(x)$ 的零点，$\{l_\kappa(x)\}_{\kappa=0}^{n}$ 是 Lagrange 插值基本多项式，其中：

$$l_0(x)=\frac{(1-x^2)U_{n-1}(x)}{2n(1-x)},$$

$$l_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}(1-x^2)U_{n-1}(x)}{2n(1+x)},$$

$$l_\kappa(x)=\frac{(-1)^{\kappa-1}(1-x^2)U_{n-1}(x)}{2n(x-x_\kappa)}, \kappa=1,\cdots,n-1。$$

同时，文献[5]给出了连续函数的逼近阶，即有

$$|L_n(f,x)-f(x)|=O\left(w\left(f,\frac{1-x^2}{n-1}|U_{n-1}(x)|\right)\right),(s>3)。$$

文献[6]定义了 Kantorovich-Vertesi 算子 $L_n^*(f,x)$，其定义如下：

定义 3.3.1 令 $y_\kappa=\cos\eta_\kappa=\cos\frac{\kappa\pi}{n+1}$，$I_\kappa=[y_{\kappa+1},y_\kappa]$，$\kappa=0,1,\cdots,n$。

$$L_n^*(f,x)=L_n^*(f,X,x):=\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{1}{y_\kappa-y_{\kappa+1}}\int_{y_{\kappa+1}}^{y_\kappa}f(t)\mathrm{d}t\frac{|l_\kappa(x)|^s}{\sum_{m=0}^{n}|l_m(x)|^s}.$$

同时，给出了如下结论：

定理 3.3.2 设 $f(x)\in L^p_{[-1,1]}(1\leqslant p\leqslant+\infty)$，则 $s>2$ 时有：

$$\|L_n^*(f,x)-f(x)\|_{L^p_{[-1,1]}}\leqslant C_{p,s}w\left(f,\frac{1}{n}\right)_{L^p_{[-1,1]}}。$$

我们可以定义 Durrmeyer-Vertesi 算子 $D_n^3(f,x)$，其定义如下：

$$D_{n,s}^3(f,x)=\sum_{\kappa=0}^{n}\frac{1}{\int_{-1}^{1}r_\kappa(w)\mathrm{d}w}\int_{-1}^{1}f(t)r_\kappa(t)\mathrm{d}t\times r_\kappa(x)。$$

取 $X(n)=X$，我们能证明如下引理：

引理 3.3.3 对任意 $x\in[-1,1]$，不妨设 $x\in[x_j,x_{j-1}]$，$j=1,\cdots,n$，则有

$$r_\kappa(x)=\frac{|l_\kappa(x)|^s}{\sum_{m=0}^{n}|l_m(x)^s|}\leqslant C_s(|j-\kappa|+1)^{-s}, s>0, \kappa=1,2,\cdots,n。\quad(7)$$

证 当 x 取值为结点时候结论显然成立，以下考虑 x 不取值为结点。

当 $\kappa=j$ 时，式(7)是显然的。

当 $\kappa\neq j$ 时，从文献[5]知 $|l_j(x)|\sim 1$，因此有

$$r_\kappa(x)\leqslant\frac{|l_\kappa(x)|^s}{|l_j(x)|^s}\leqslant C_s|l_\kappa(x)|^s=C_s\left|\frac{(1-x^2)U_{n-1}(x)}{n(x-x_\kappa)}\right|^s\leqslant C_s\left|\frac{\sin\theta}{n}\frac{\sin\theta}{2\sin\frac{\theta+\theta_\kappa}{2}}\frac{1}{\sin\frac{\theta-\theta_\kappa}{2}}\right|^s。$$

对 $\theta\in[0,\pi]$，运用不等式 $\left|\sin\frac{\theta-\theta_\kappa}{2}\right|\leqslant\sin\frac{\theta+\theta_\kappa}{2}$ 得：

$$\sin\theta=\sin\left(\frac{\theta+\theta_\kappa}{2}+\frac{\theta-\theta_\kappa}{2}\right)\leqslant\sin\frac{\theta+\theta_\kappa}{2}+\left|\sin\frac{\theta-\theta_\kappa}{2}\right|\leqslant 2\sin\frac{\theta+\theta_\kappa}{2}。$$

即不等式 $\frac{\sin\theta}{2\sin\frac{\theta+\theta_\kappa}{2}}\leqslant 1$ 成立，故：

$$r_\kappa(x)\leqslant C_s\left|\frac{1}{n(\theta-\theta_\kappa)}\right|^s\leqslant C_s(|j-\kappa|+1)^{-s}。$$

引理 3.3.3 证毕。

由引理 3.3.3 可知 $D_{n,s}^3(f,x)$ 是属于算术控制型积分修正有理插值算子，利用定理 0.5 的结果可以建立如下定理：

定理 3.3.4 设 $f(x)\in L^p_{[-1,1]}(1\leqslant p<+\infty)$，则存在一个仅依赖于 p 和 $s(s>1)$ 的正常数 $C_{p,s}$，使得 $\|D_{n,s}^3(f)-f\|L^p_{[-1,1]}\leqslant C_{p,s}w_{\left(f,[\varepsilon_n]^{\frac{1}{p}}\right)L^p_{[-1,1]}}$。

参考文献：

[1] Stein E M. Singular Integrals and Differentiablity of Functions[M]. Princeton: Princeton Univ. Press, 1970.

[2] Devore R A. Degree of Approxiamtion, in: Approximation Theory Ⅱ[M]. New York: Academic Press, 1976: 117-162.

[3] Xiao W, Zhou S P. On Müntz rational apporoximation [J]. J Approx theory, 2001, 111: 50-58.

[4] Xiao W, Zhou S P. A Jackson type estimates for Shepard operator in L^p spaces for $p\geqslant1$[J]. Acta Math Hungar, 2002, 95(3): 217-224.

[5] 孙燮华. 关于连续函数用有理算子的逼近[J]. 数学学报, 1986, 29(2): 195-206.

[6] 梅雪峰, 虞旦盛, 周颂平. L^p 空间 Kantorovich-Vertesi 算子逼近的 Jackson 型估计[J]. 高校应用数学学报: A辑, 2002, 17(3): 329-334.

Approximation Theorem on Modified Rational Operators

CHENG Wen-tao
(School of Sciences，Zhejiang Sci-Tech University，Hangzhou 310018，China)

Abstract：In this paper，the general forms of rational interpolation operators and modified rational interpolation operators are introduced. Using the kernel function，two new types of control-modified rational interpolation operators are introduced. The Jackson estimates are also given.

Key words：$L^p_{[a;\ b]}$ space；rational interpolation；Jackson estimate

（责任编辑：马春晓）