浙江理工大学学报，第 29 卷，第 3 期，2012 年 5 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
Vol. 29，No. 3，May. 2012

文章编号：1673-3851 (2012) 03-0370-04

基于区间值 Vague 集多属性决策的 TOPSIS 方法

刘阳丽[1]，杨爱萍[2]，戴文战[1,3]
（1. 浙江理工大学自动化研究所，杭州 310018；2. 浙江财经学院，杭州 310018；3. 浙江工商大学，杭州 310018）

摘　要： 为解决属性值为区间值 Vague 集的多属性决策问题，提出了一种新的基于 TOPSIS 的多属性决策方法。该方法利用记分函数确定了方案集的理想解和负理想解，定义了区间值 Vague 集的距离，并得到各方案到理想解和负理想解的距离，根据相对贴近度的大小对各方案进行优劣排序。实例分析验证了方法的可行性。

关键词： 区间值 Vague 集；TOPSIS；记分函数；多属性决策
中图分类号： TP13　　**文献标识码：** A

0　引　言

Vague 集的特点是由一个真隶属度函数和一个假隶属度函数来描述隶属度的界，它在处理不确定信息时有更强的表示能力。自 1993 年 Gau 和 Buehrer 提出了 Vague 集概念以来，引起了国内外学者的高度重视[1]。接近理想点法（technique for order preference by similarity to an ideal solution，TOPSIS）是一种常用的多属性决策方法，它主要借助决策问题的“理想解”和“负理想解”排序选优，目前已经广泛应用于各种决策领域中[2]。但是随着不确定性的增加，决策成员对每个方案的支持、反对和弃权程度只能或只愿意以区间的形式给出，因此，对基于区间值 Vague 集的多属性决策方法的研究已经变得越来越重要[3]。周珍等[4－5]将实数型 Vague 集群决策的记分函数扩展到区间值 Vague 集上，给出了两种改进的记分函数和加权记分函数，并将实数型 Vague 集的距离方法扩展成区间值 Vague 集的距离度量方法，建立基于距离的区间值 Vague 集多准则决策的相对优属度法；万树平[6]提出了区间值 Vague 集的距离，针对区间数 Vague 集表达的多传感器信息融合问题，提出了一种基于 TOPSIS 的融合方法；陈秋萍[7]在区间值 Vague 集决策矩阵的基础上，构造了模糊相对优势决策矩阵和模糊加权决策矩阵，给出了区间值 Vague 集多目标模糊决策方法；刘培德，关忠良[8]针对属性值为 Vague 集值的多属性决策问题，提出了一种灰色关联度和 TOPSIS 相结合的决策方法，相对于 TOPSIS 的决策方法更具有优越性。

本文提出了一种基于区间值 Vague 集多属性决策的 TOPSIS 方法。a)根据 Vague 集的特点，利用记分函数确定方案集的正理想解和负理想解；b)定义了区间值 Vague 集的距离量度，据此度量各方案与理想解和负理想解的距离。c)根据 TOPSIS 方法计算各方案的相对贴近度，用相对贴近度的大小对各方案进行优劣排序。

1　区间值 Vague 集

传统的 Vague 集 A 表述为 $A=[t_A(x),1-f_A(x)]$，$t_A(x)+f_A(x)\leqslant 1$，式中 $t_A(x)$是从支持 x 的证据所导出的 x 的肯定隶属度下界，$f_A(x)$是从反对 x 的证据所导出的 x 的否定隶属度下界，$t_A(x)$，$f_A(x)$都是确定的单值。用投票模型解释：对于 1 个 Vague 集 $A=[0.7,0.8]$，可理解为投赞成票的

收稿日期：2011－10－08
项目基金：国家高技术研究发展计划(863 计划)(2009AA04Z139)；教育部高等学校博士学科点专项基金项目(20070338002)；浙江省教育厅科研项目(Y201016039)
作者简介：刘阳丽(1986－)，女，湖南邵阳人，硕士研究生，研究方向为多目标决策。
通讯作者：戴文战，电子邮箱：dwzhan@zstu.edu.cn

为 7 人，投反对票的为 2 人，弃权的为 1 人。

因为区间值相对于实数值具有更大的灵活性，将 $t(x)$，$f(x)$ 由实数值扩展为区间值模糊集合，则可得到区间值 Vague 集，显然，这种集合表达不确定数据和模糊数据的能力更强。

1.1 区间值 Vague 集的基本概念

定义 1 设 Vague 集 $G=\{\langle x,G_I(x),G_J(x)\rangle \mid x\in U\}$ 为区间值 Vague 集，其中 U 是论域，区间值模糊集合 $G_I(x)$，$G_J(x)$ 分别为 $x\in U$ 关于 G 的真假隶属度，$G_I(x)=[t_G^l(x),t_G^u(x)]\subseteq[0,1]$，$G_J(x)=[1-f_G^u(x),1-f_G^l(x)]\subseteq[0,1]$，且有 $t_G^u(x)+f_G^u(x)\leqslant 1$。

利用区间数的二元运算关系，定义区间值 Vague 集的不确定度如下：

定义 2 $G_H(x)$ 表示区间值 Vague 集 G 的不确定度，则 $G_I(x)+G_J(x)+G_H(x)=[1,1]$。则 $G_H(x)=[1-t_G^u(x)-f_G^u(x),1-t_G^l(x)-f_G^l(x)]\subseteq[0,1]$。

1.2 区间值 Vague 集的距离

定义 3 设 U 是一个论域，V 是 U 上所有的 Vague 集组成的集合，$A\in V$，$B\in V$。d 满足 $d:V\times V\to[0,1]$。如果 $d(A,B)$ 满足性质 $(P_1)\sim(P_4)$，则称 $d(A,B)$ 为 Vague 集 A,B 的距离。

(P1) $d(A,B)\geqslant 0$；

(P2) $d(A,B)=0\Leftrightarrow A=B$；

(P3) $d(A,B)=d(B,A)$；

(P4) 如果 $A,B,C\in V$，$A\subseteq B\subseteq C$，则 $d(A,C)\geqslant d(A,B)$，$d(A,C)\geqslant d(B,C)$。

假定 $A=([t_1^l,t_1^u],[1-f_1^u,1-f_1^l])$，$B=([t_2^l,t_2^u],[1-f_2^u,1-f_2^l])$ 为论域 U 上任意两个区间值 Vague 集，则定义海明测度：

$$l^l(A,B)=\frac{1}{3}\left(|t_1^l-t_2^l|+|f_1^l-f_2^l|+|\pi_1^l-\pi_2^l|\right),$$

$$l^u(A,B)=\frac{1}{3}\left(|t_1^u-t_2^u|+|f_1^u-f_2^u|+|\pi_1^u-\pi_2^u|\right),$$

$$l(A,B)=l^l(A,B)+l^u(A,B)$$

其中，$\pi_1=[\pi_1^l,\pi_1^u]=[1-t_1^u-f_1^u,1-t_1^l-f_1^l]$，$\pi_2=[\pi_2^l,\pi_2^u]=[1-t_2^u-f_2^u,1-t_2^l-f_2^l]$。

定理 1 设 U 为有限论域，$l(A,B)$ 为 Vague 集 A,B 的距离。

2 区间值 Vague 集多属性决策的 TOPSIS 方法

2.1 基于区间值 Vague 集的决策问题描述

设决策方案集 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$，$C=\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$ 为方案对应的属性，假设决策方案 A_i 在属性集 C 下的特征由以下区间值 Vague 集表示 $A_i=\{(C_1,[A_{i1I}A_{i1J}]),(C_2,[A_{i2I}A_{i2J}]),\cdots,(C_n,[A_{inI}A_{inJ}])\}$，其中 $A_{ijI}=[t_{ij}^l,t_{ij}^u]$ 表示决策方案 A_i 满足属性 C_j 的程度区间，$A_{ijJ}=[f_{ij}^l,f_{ij}^u]$ 表示 A_i 不满足属性 C_j 的程度区间。$A_{ijH}=[\pi_{ij}^l,\pi_{ij}^u]=[1-t_{ij}^u-f_{ij}^u,1-t_{ij}^l-f_{ij}^l]$ 表示 A_i 对属性 C_j 的不确定区间。$t_{ij}^u+f_{ij}^u\leqslant 1$，$1\leqslant i\leqslant m$，$1\leqslant j\leqslant n$。则原始决策矩阵 $\boldsymbol{M}$ 可表示为：

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\langle[t_{11}^l,t_{11}^u],[f_{11}^l,f_{11}^u]\rangle & \langle[t_{12}^l,t_{12}^u],[f_{12}^l,f_{12}^u]\rangle & \cdots & \langle[t_{1n}^l,t_{1n}^u],[f_{1n}^l,f_{1n}^u]\rangle\\ \langle[t_{21}^l,t_{21}^u],[f_{21}^l,f_{21}^u]\rangle & \langle[t_{22}^l,t_{22}^u],[f_{22}^l,f_{22}^u]\rangle & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \langle[t_{m1}^l,t_{m1}^u],[f_{m1}^l,f_{m1}^u]\rangle & \langle[t_{m2}^l,t_{m2}^u],[f_{m2}^l,f_{m2}^u]\rangle & \cdots & \langle[t_{mn}^l,t_{mn}^u],[f_{mn}^l,f_{mn}^u]\rangle\end{bmatrix}。$$

假设属性的权重向量已知，为 $W=\{w_1,w_2,\ldots,w_n\}$，且 $\sum_{i=1}^{n}w_i=1$。基于区间值 Vague 集的多属性决策问题就是利用上述权重 W 和各方案在不同属性下的区间值 Vague 集 $[A_{ijI},A_{ijJ}]$ 来确定方案的优劣排序。

2.2 记分函数

区间值 Vague 集是实数型 Vague 集的扩展，本文将实数型 Vague 集的多属性决策方法的记分函数进行扩展，应用到区间值 Vague 集的多属性决策方法中。

定义 4 记 $m_{ijI}=\frac{t_{ij}^l+t_{ij}^u}{2}$，$m_{ijJ}=\frac{f_{ij}^l+f_{ij}^u}{2}$，$m_{ijH}=\frac{\pi_{ij}^l+\pi_{ij}^u}{2}$，则有 $m_I+m_J+m_H=1$。其中 m_{ijI}，m_{ijJ}，m_{ijH} 为 m_I，m_J，m_H 中的任意元素。

根据 Chen 和 Tan[9-10] 提出的记分函数，可扩展为记分函数 $S(A_i,C_j)$：

$$S(A_i,C_j)=m_{ijI}+m_{ijH}\times m_{ijI}-m_{ijJ}-m_{ijH}\times m_{ijJ}\quad(1)$$

其矩阵形式表示为：

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}S(A_1,C_1) & S(A_1,C_2) & \cdots & S(A_1,C_n)\\ S(A_2,C_1) & S(A_2,C_2) & \cdots & S(A_2,C_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ S(A_m,C_1) & S(A_m,C_2) & \cdots & S(A_m,C_n)\end{bmatrix}$$

记分函数 $S(A_i,C_j)$ 表示决策方案 A_i 满足属性 C_j 的程度。$S(A_i,C_j)$ 越大越好。

2.3 TOPSIS 方法

2.3.1 确定理想解和负理想解

理想解(positive ideal solution, PIS)是方案集

A 中不一定存在的虚拟的最佳方案，它的每个属性值都是决策矩阵中该属性的最好的值；而负理想(negative ideal solution，NIS)则是虚拟的最差方案，它的每个属性值都是决策矩阵中该属性的差的值。采用记分函数 $S(A_i,C_j)$ 来估计方案对于决策者需求的满意程度，来确定方案集的正负理想解。

对于记分函数 S，令

$$P_j^+ = \max_{1\leqslant j\leqslant m} S(A_i,C_j),(1\leqslant j\leqslant n) \tag{2}$$

$$P_j^- = \min_{1\leqslant j\leqslant m} S(A_i,C_j),(1\leqslant j\leqslant n) \tag{3}$$

则记 $P^+=\{P_1^+,P_2^+,\ldots P_n^+\}$，$P^-=\{P_1^-,P_2^-,\ldots P_n^-\}$。

根据 P^+ 在记分函数矩阵 $\boldsymbol{S}$ 中的位置，从原始决策矩阵 $\boldsymbol{M}$ 中提取出与其相同位置(即行和列都相同)的元素组成一个行向量，例如，P_1^+ 在记分函数矩阵 $\boldsymbol{S}$ 中的位置为第 2 行第 1 列，则从原始决策矩阵 $\boldsymbol{M}$ 中提取第 2 行第 1 列位置上的元素。

此行向量即为区间值 Vague 集决策矩阵的理想解 V^+，可表示为：

$$V^{j+}=\langle[t_j^{+l},t_j^{+u}],[f_j^{+l},f_j^{+u}]\rangle \tag{4}$$

根据 P^- 在记分函数矩阵 $\boldsymbol{S}$ 中的位置，从原始决策矩阵 $\boldsymbol{M}$ 中提取出与其相同位置(即行和列都相同)的元素组成一个行向量，此行向量即为区间值 Vague 集决策矩阵的负理想解 V^-，可表示为：

$$V_j^-=\langle[t_j^{-l},t_j^{-u}],[f_j^{-l},f_j^{-u}]\rangle \tag{5}$$

2.3.2　计算方案 A_i 到正理想解 V^+ 和负理想解 V^- 的距离 $D(A_i,V^+)$，$D(A_i,V^-)$

根据定理 1，方案 A_i 到正理想解 V^+ 的距离 $D(A_i,V^+)$：

$$D^l(A_i,V^+)=\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n}w_j\left[|t_{ij}^l-t_j^{+l}|+|f_{ij}^l-f_j^{+l}|+|\pi_{ij}^l-\pi_j^{+l}|\right] \tag{6}$$

$$D^u(A_i,V^+)=\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n}w_j\left[|t_{ij}^u-t_j^{+u}|+|f_{ij}^u-f_j^{+u}|+|\pi_{ij}^u-\pi_j^{+u}|\right] \tag{7}$$

$$D(A_i,V^+)=D^l(A_i,V^+)+D^u(A_i,V^+) \tag{8}$$

方案 A_i 到负理想解 V^- 的距离 $D(A_i,V^-)$：

$$D^l(A_i,V^-)=\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n}w_j\left[|t_{ij}^l-t_j^{-l}|+|f_{ij}^l-f_j^{-l}|+|\pi_{ij}^l-\pi_j^{-l}|\right] \tag{9}$$

$$D^u(A_i,V^-)=\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n}w_j\left[|t_{ij}^u-t_j^{-u}|+|f_{ij}^u-f_j^{-u}|+|\pi_{ij}^u-\pi_j^{-u}|\right] \tag{10}$$

$$D(A_i,V^-)=D^l(A_i,V^-)+D^u(A_i,V^-) \tag{11}$$

其中，$\pi_j^{+l}=1-t_j^{+l}-f_j^{+l}$，$\pi_j^{+u}=1-t_j^{+u}-f_j^{+u}$，$\pi_j^{-l}=1-t_j^{-l}-f_j^{-l}$，$\pi_j^{-u}=1-t_j^{-u}-f_j^{-u}$。

2.3.3　确定相对贴近度 C_i：

$$C_i=\frac{D(A_i,V^-)}{[D(A_i,V^-)+D(A_i,V^+)]} \tag{12}$$

2.3.4　方案排序

根据相对贴近度 C_i 的大小对各方案进行排序：相对贴近度 C_i 越大，则方案越优；反之，相对贴近度 C_i 越小，则方案越劣。

3　实例分析

假设某高新技术风险投资商共有 5 个投资方案，为方案 A_1、A_2、A_3、A_4 和 A_5。专家评价投资方案的主要依据有 6 个指标，分别为环境风险 C_1、市场风险 C_2、技术风险 C_3、生产风险 C_4、管理风险 C_5 和财务风险 C_6，假设这 6 个指标的权重已知，为 $w=[0.16,0.2,0.2,0.14,0.18,0.12]$。专家对各投资方案按上述 6 个因素进行评价，给出的评价结果采用区间值 Vague 集来表示，则原始决策矩阵 $\boldsymbol{M}$ 可写成如下形式：

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}
\langle[0.55,0.6],[0.8,0.9]\rangle & \langle[0.4,0.5],[0.6,0.7]\rangle & \langle[0.4,0.5],[0.9,0.95]\rangle & \langle[0.6,0.7],[0.85,0.9]\rangle & \langle[0.7,0.8],[0.8,0.8]\rangle & \langle[0.3,0.4],[0.9,1.0]\rangle \\
\langle[0.8,0.8],[0.8,0.85]\rangle & \langle[0.6,0.7],[0.75,0.85]\rangle & \langle[0.35,0.45],[0.9,0.9]\rangle & \langle[0.45,0.55],[0.8,0.9]\rangle & \langle[0.45,0.55],[0.75,0.85]\rangle & \langle[0.4,0.4],[0.7,0.85]\rangle \\
\langle[0.3,0.4],[0.55,0.6]\rangle & \langle[0.5,0.6],[0.7,0.8]\rangle & \langle[0.65,0.7],[0.7,0.75]\rangle & \langle[0.5,0.55],[0.95,1.0]\rangle & \langle[0.6,0.75],[0.9,0.95]\rangle & \langle[0.55,0.6],[0.6,0.7]\rangle \\
\langle[0.5,0.55],[1.0,1.0]\rangle & \langle[0.75,0.85],[0.9,0.95]\rangle & \langle[0.55,0.65],[0.8,0.85]\rangle & \langle[0.4,0.45],[0.7,0.75]\rangle & \langle[0.35,0.55],[0.55,0.6]\rangle & \langle[0.6,0.7],[0.8,0.85]\rangle \\
\langle[0.4,0.45],[0.6,0.65]\rangle & \langle[0.5,0.6],[0.75,0.8]\rangle & \langle[0.55,0.65],[0.8,0.85]\rangle & \langle[0.7,0.8],[0.85,0.95]\rangle & \langle[0.5,0.6],[0.9,1.0]\rangle & \langle[0.55,0.65],[0.9,0.95]\rangle
\end{bmatrix}$$

a)由公式(1)通过计算可得到原始决策矩阵的记分函数矩阵 $\boldsymbol{S}$，

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}
0.5419 & 0.1200 & 0.5531 & 0.6431 & 0.5775 & 0.4800 \\
0.6406 & 0.5175 & 0.4500 & 0.4725 & 0.3900 & 0.2406 \\
-0.0919 & 0.3600 & 0.4200 & 0.7250 & 0.7500 & 0.2419 \\
0.7744 & 0.8156 & 0.3300 & 0.1950 & 0.0281 & 0.5581 \\
0.0600 & 0.3981 & 0.5206 & 0.7475 & 0.7000 & 0.6956
\end{bmatrix}$$

b)根据式(2)和式(3)可得到 P^+ 和 P^-

$P^+=[0.7744,0.8156,0.5531,0.7475,0.7500,0.6956]$，

$P^-=[-0.0919,0.1200,0.3300,0.1950,0.0281,0.2406]$

c)根据 P^+ 和 P^- 在记分函数矩阵 $\boldsymbol{S}$ 中的位置，可得到方案集的理想解 V^+ 和负理想解 V^-

$V^{+}=\{\langle[0.5,0.55],[1.0,1.0]\rangle,\langle[0.75,0.85],[0.9,0.95]\rangle,\langle[0.4,0.5],[0.9,0.95]\rangle,\langle[0.7,0.8],[0.85,0.95]\rangle,\langle[0.6,0.75],[0.9,0.95]\rangle,\langle[0.55,0.65],[0.9,0.95]\rangle\}$，

$V^{-}=\{\langle[0.3,0.4],[0.55,0.6]\rangle,\langle[0.4,0.5],[0.6,0.7]\rangle,\langle[0.55,0.65],[0.65,0.75]\rangle,\langle[0.4,0.45],[0.7,0.75]\rangle,\langle[0.35,0.55],[0.55,0.6]\rangle,\langle[0.4,0.4],[0.7,0.85]\rangle\}$。

d)根据式(6)～式(8)、式(9)～式(11)计算出各方案到正理想解 V^{+} 和负理想解 V^{-} 的距离 $D(A_i,V^{+})$，$D(A_i,V^{-})$。

$D(A_i,V^{+})=[0.3653,0.3880,0.4107,0.3407,0.3667]$，

$D(A_i,V^{-})=[0.4420,0.4645,0.4037,0.4062,0.4421]$

e)根据式(12)计算出相对贴近度 C_i。

$C_i=[0.5475,0.5449,0.4957,0.5439,0.5466]$

综合可得到表 1。

表 1　方案与正理想解和负理想解的距离及相对贴近度

方 案	$D(A_i,V^{-})$	$D(A_i,V^{+})$	C_i	排序
A_1	0.3653	0.4420	0.5475	1
A_2	0.3880	0.4645	0.5449	3
A_3	0.4107	0.4037	0.4957	5
A_4	0.3407	0.4062	0.5439	4
A_5	0.3667	0.4421	0.5466	2

按照 C_i 的大小，对备选方案进行排序。得到备选方案的优劣排序结果为 $A_1 > A_5 > A_2 > A_4 > A_3$，因此，方案 A_1 为最佳方案。

4　结　语

针对区间值 Vague 集，提出一种新的距离度量，并且将 TOPSIS 决策方法的应用拓展到基于区间值 Vague 集的模糊多属性决策方法中。给出了基于区间值 Vague 集的多属性决策的 TOPSIS 方法，通过实例，证明了该方法的有效性和优越性。

参考文献：

[1] Gau W L，Buehrer D J. Vague sets[J]. IEEE Transactions on Systems，Man and Cybernetics，1993，23(2)：610-614.

[2] Hwang C L，Yoon K. Multiple Attribute Decision Making Methods and Applications：a State of the Art Survey[M]. NewYork：Springer-Verlag，1981.

[3] 马志锋，邢汉承，郑晓妹. 区间值 Vague 集决策系统其规则提取方法[J]. 电子学报，2001，29(5)：585-589.

[4] 周　珍，吴祈宗，刘福祥，等. 基于区间值 Vague 集的多准则模糊决策方法[J]. 北京理工大学学报，2005，25(11)：1019-1023.

[5] 周　珍，吴祁宗，刘福祥，等. 基于距离的区间值 Vague 集的多准则决策方法[J]. 北京理工大学学报，2006，26(8)：693-696.

[6] 万树平. 基于区间数 Vague 集的多传感器信息融合 TOPSIS 法[J]. 传感器与微系统，2009，28(10)：64-66.

[7] 陈秋萍. 区间值 Vague 集的多目标模糊决策方法[J]. 沙洲职业工学院学报，2009，12(1)：19-23.

[8] 刘培德，关忠良. 一种属性变量为 Vague 集的多属性决策方法[J]. 哈尔滨工程大学学报，2009，30(1)：106-109.

[9] Chen S M，Tan J M. Handling multi-criteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory[J]. Fuzzy Sets and Systems，1994，67(2)：163-172.

[10] Hong D H，Choi C H. Multi-criteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory[J]. Fuzzy Sets and Systems，2000，114：103-114.

TOPSIS Method of Multi-attribute Decision-making Based on Interval-value Vague Sets

LIU Yang-li[1]，*YANG Ai-ping*[2]，*DAI Wen-zhan*[1]

(1. Institute of Automation，Zhejiang Sci-Tech University，Hangzhou 310018，China；
2. Zhejiang University of Finance and Economics，Hangzhou 310018，China)

Abstract：In order to solve the Multi-attribute decision-making problem with interval-value Vague sets，a new Multi-attribute decision-making method based on TOPSIS is proposed. The method chooses the positive and negative ideal solutions based on the score function，defines the distance between the interval-value Vague sets，and gets the distance between every alternative and the positive ideal solutions or the negative ideal solutions. The alternatives are ranked by the relative closeness degree of each alternative and positive or negative ideal solutions.. A numerical example proves the practicability of the decision making method.

Key words：Interval-value Vague sets；TOPSIS；Score function；Multi-attribute decision-making

（责任编辑：杨元兆）