

标准差保费原理下含限制条件的最优保险策略

许 洲¹, 孟祥美²

(1. 浙江理工大学理学院, 杭州 310018; 2. 杭州银行, 杭州 310003)

摘 要: 讨论使投保人的期望效用最大化的最优保险问题。给出了在标准差保费计算原理下并将保险公司的期望损失控制在一个特定水平时最优保险策略的充分条件。作为例子,在特殊的效用函数形式下,得到了最优保险策略的具体形式。

关键词: 最优保险; 期望效用; 标准差保费计算原理

中图分类号: F840:O211

文献标识码: A

0 引 言

保险实质上是一个风险转移的过程,面对未来不确定的损失(风险)时,投保人购买保险合同将其中的一部分风险转移给保险公司。通常情况下,投保人总希望用一定的保费购买其认为“最优”的保险。假设风险为 X ,可以看成是定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, Pr)$ 上的一个随机变量,投保人以 P 的价格,将风险的一部分 $I(X)$ 转移给保险公司。 $I(X)$ 通常称为保险策略或保险覆盖函数,满足 $0 \leq I(x) \leq x$ 。记满足这个条件的所有保险策略的集合为 \mathcal{I} 。“最优保险”是指在风险最小或期望效用最大化意义下,从保险策略 \mathcal{I} 集中找一个最优的解 I^* 。

Arrow^[1-2]最早研究最优保险决策问题,假设保费计算原理采用期望值原理,在使投保人的期望效用最大化的意义下,得出停止损失保险是该问题的最优解。Deprez 和 Gerber^[3]将保费原理一般化,即采用凸保费计算原理,并假设其具有 Gâteaux 可导,在 Arrow 所提出的框架下,给出了最优保险策略的形式。Young^[4]进一步将保费原理的条件放宽,讨论了凸保费计算原理,但非 Gâteaux 可导情况(即 Wang 的保费原理^[5-6])下的最优保险策略 I^* 满足的充分必要条件。Promislow 和 Young^[7]则引进了

比 Gâteaux 可导更弱的可微函数形式,对于更一般的目标函数及保费原理给出统一的最优保险框架模型。Zhou 和 Wu^[8]在 Arrow 的模型^[1]中加入控制保险公司风险的限制条件,考虑使投保人的期望效用最大化的问题,得出最优保险策略是分段线性可免赔(piecewise linear deductible)保险。

相对于使投保人的期望效用最大化,将风险最小化作为优化目标则多在最优再保险中得到应用。再保险也称分保,是保险公司在原保险合同的基础上,通过签订分保合同,转移其所承担的风险和责任的方式。通俗地说,也就是对保险公司的保险。“最优再保险”是指在使原保险公司风险最小或期望效用最大化意义下,从再保险策略集中找一个最优的策略。因此,从问题的数学意义上看,最优再保险和最优保险并没有本质差别。文献[9-12]都以最小化某一风险度量为目标,给出了不同的最优再保险策略。

在前人的文章中,大多数考虑的是使投保人的期望效用最大化或者风险最小化的问题,很少有人注意到保险公司的期望收益和外在风险。而保险公司从事保险业务,自然希望得到较大的经济收益。故这种仅仅考虑投保人的利益而没有关注保险公司经济利益的方法,不是完全符合实际的。笔者借鉴文献[8]的思想,同时考虑保险公司和投保人两方面

的利益,将保险公司的期望损失控制在一个特定水平,作为最优保险问题的限制条件,在标准差保费计算原理下讨论使投保人的期望效用最大化的问题。在 Zhou 和 Wu^[8] 的文中,采用的是均值保费计算原理,用对偶的最优化方法给出问题的最优解,但这种方法不具有一般性,在标准差保费计算原理下这种方法是不可行的。笔者利用拉格朗日乘数法和概率不等式,给出了标准差保费计算原理下含限制条件的最优保险问题的充分条件。

首先,建立标准差保费原理下含限制条件的最优保险数学模型;其次,给出该问题的最优保险策略 I^* 满足的充分条件;再应用前面得到的定理,给定特殊的效用函数,得到了最优保险策略的具体形式。

1 模型的建立

设投保人的初始财富为 W_1 ,目前正面临即将可能发生的损失(风险) X ,投保人希望以 P 的价格(保费)向保险公司转移部分风险 $I(X) \in \mathcal{I}$ 。假设投保人的效用函数为 $u(\cdot)$,保险公司采用的保费计算原理为 $\Pi(X)$,那么投保人的最优策略问题可以转化为期望效用最大化的问题,

$$\max_{I \in \mathcal{I}} E[u(W_1 - X + I(X) - P)] \tag{1}$$

其中 $P = \Pi[I(X)]$ 。

如引言中所提到的,上述模型已经有很多的讨论。将在上述模型的基础上进一步考虑保险公司的利益。假设保险公司的初始财富为 W_2 ,收取了投保人的保费 P ,当投保人所面临的风险 X 发生时,保险公司将需要支付给投保人的赔偿额为 $I(X)$,此时保险公司总资产是一个随机变量,即 $W_2 - I(X) + P$ 。考虑到保险公司的利益,将其总资产控制在一个事先给定的水平 ϵ 上,即满足:

$$E[W_2 - I(X) + P - W_-] \leq \epsilon \tag{2}$$

其中 W_- 代表保险公司按某种规定(如监管部门的要求)所预留的额度。 x^- 表示当 $x \leq 0$ 时, $x^- = -x$,当 $x > 0$, $x^- = 0$ 。

记 $\delta = W_2 + P - W_-$,并假设保险公司按标准差保费原理向投保人收取保费,即 $P = E[I(X)] + \beta D[I(X)]$,其中 $D[I(X)] = \sqrt{\text{Var}[I(X)]}$,参数 $\beta > 0$,笔者所考虑的模型如下:

$$\text{Model I: } \begin{cases} \max_{I \in \mathcal{I}} E[u(W_1 - X + I(X) - P)], \\ \text{s. t. } \begin{cases} P = E[I(X)] + \beta D[I(X)], & \text{(a)} \\ E[\delta - I(X)]^- \leq \epsilon, & \text{(b)} \\ 0 \leq I(X) \leq X. & \text{(c)} \end{cases} \end{cases} \tag{3}$$

其中, W_- 和风险承受 $\epsilon > 0$ 是事先给定的。在模型 I 中,如果采用均值保费计算原理, $P = (1 + \theta)E[I(X)]$,即为文献[8]中讨论了上述最优问题;如果不考虑限制条件(b),同时令 $\omega(x) = -u(-x + W_1 - E[X])$,模型 I 的问题转化为 Kaluszka^[13] 所讨论的问题,即:

$$\text{Model II: } \begin{cases} \min_{I \in \mathcal{I}} E[\omega(\overline{X - I(X)})], \\ \text{s. t. } \begin{cases} P = E[I(X)] + \beta D[I(X)], & \text{(a)} \\ 0 \leq I(X) \leq X. & \text{(c)} \end{cases} \end{cases} \tag{4}$$

虽然 Kaluszka 讨论的并不是最优保险策略,而是最优再保险的问题,但从模型的数学意义来看两者并没有本质差别。在 Kaluszka 的文章中定义了 ω_c^* 函数,即

$$\omega_c^*(x) = \max\{t; ct + \omega'(t) \leq x\}.$$

其中, ω' 代表 ω 的左导数, ω_c^* 可以看作 ω_c 的反函数, $\omega_c: t \rightarrow ct + \omega'(t)$ 。

2 主要结果及证明

从模型 I 看, $\delta = W_2 + P - W_-$ 中的值 W_2, P, W_- 均是事前给定的,所以下面分两种情形来分析模型 I 的最优解。

情形 I: $\delta \leq 0$, 即 $P \leq W_- - W_2$ 。

在这种情形下,由于 $I(X) \geq 0$,所以,条件(b)可以改写为 $E[I(X) - \delta] \leq \epsilon$,即 $E[I(X)] \leq \delta + \epsilon$ 。又由条件(a)可得出 $E[I(X)] = P - \beta D[I(X)]$ 。因此,

(1) 当 $P \leq \delta + \epsilon + \beta D[I(X)]$,则条件(b)直接由条件(a)推出,所以条件(b)没有起到实质性的作用。模型 I 可转化为模型 II。

由文献[13],若存在最优解,则最优解的形式为: $I^*(X) = (X - b - \omega_c'(c(X - b) + d))^+$ 。且 b, c, d 满足 $0 \leq b \leq E[X], \omega'(-b) \leq d < \omega'(\infty), c > 0$,同时满足:

$$\begin{cases} \text{(i)} & E[I^*] + \beta D[I^*] = P, \\ \text{(ii)} & b = E[X - I^*], \\ \text{(iii)} & \beta E[d - \omega'(X - b)]^+ = cD[I^*]. \end{cases}$$

(2) 当 $P > \delta + \epsilon + \beta D[I(X)]$,则条件(a)和条件(b)不能同时成立,此时模型 I 无解。

情形 II: $\delta > 0$, 即 $P > W_- - W_2$ 。

因为 u 为凹函数,记 $s_u(\cdot)$ 为 $\partial u(t)$ 的一个偏导数,则 $s_u(\cdot)$ 为非增函数。对于给定的函数 $I(x)$, $I^*(x)$,下式成立:

$$u(W_1 - x + I(x) - P) - u(W_1 - x + I^*(x) - P) \leq s_u(W_1 - x + I^*(x) - P)(I(x) - I^*(x)). \tag{5}$$

记 $s^*(x) = s_u(W_1 - x + I^*(x) - P)$, 显然 $s^*(x)$ 满足:

$$\int_0^{+\infty} \{u(W_1 - x + I(x) - P) - u(W_1 - x + I^*(x) - P)\} dF(x) \leq \int_0^{+\infty} \{s^*(x)(I(x) - I^*(x))\} dF(x). \quad (6)$$

定理 令 $I^*(x): [0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$, $D[I^*(x)] > 0$, 假设存在 $s^*(x)$ 满足式(6)。若有 $\lambda \leq 0$, 使得下述条件成立:

- (i) 对于使得 $I^*(x) = 0$ 的所有 x , 满足 $s^*(x) \leq 0$;
- (ii) 对于使得 $I^*(x) = x$ 的所有 x , 满足 $s^*(x) + \lambda \geq 0$;
- (iii) 对于使得 $0 < I^*(x) < \delta$ 的所有 x , 满足 $s^*(x) = 0$;
- (iv) 对于使得 $\delta < I^*(x) < x$ 的所有 x , 满足 $s^*(x) + \lambda = 0$;
- (v) 对于使得 $I^*(x) = \delta$ 的所有 x , 满足 $s^*(x) \geq 0, s^*(x) + \lambda \leq 0$;
- (vi) $\Pi(I^*) = P, E[\delta - I^*]^- \leq \epsilon, \lambda(E[\delta - I^*]^- - \epsilon) = 0$ 。

则 I^* 为最优解。

证明: 考虑拉格朗日函数: $L_\lambda(I) = E[u(W_1 - X + I(X) - P)] + \lambda(E[\delta - I]^- - \epsilon)$ 。

这里 $\lambda \leq 0$ 。在集合 \mathcal{I} 中以及 $\Pi(I) = P, E[\delta - I]^- \leq \epsilon$ 的限制条件下, 要使期望效用函数最大, 记 $\rho(I) = E[u(W_1 - X + I(X) - P)]$, 即使 $\rho(I^*)$ 最大, 仅需同时满足 $\lambda(E[\delta - I^*]^- - \epsilon) = 0$ 和 $L_\lambda(I) \leq L_\lambda(I^*)$ 即可。

事实上, 对于任意的 $0 \leq I(X) \leq X$, 当 $\lambda(E[\delta - I^*]^- - \epsilon) = 0$ 时, 有

$$\rho(I^*) = L_\lambda(I^*) \geq L_\lambda(I) \geq \rho(I)。$$

于是, 由(vi)知, 对于给定的 $\beta > 0, \lambda \leq 0$, 只需证明在 \mathcal{I} 上, $I^*(x)$ 使得 $L_\lambda(I)$ 最大即可。

易知,

$$L_\lambda(I) - L_\lambda(I^*) = E[u(W_1 - X + I(X) - P)] - E[u(W_1 - X + I^*(X) - P)] + \lambda(E[\delta - I]^- - E[\delta - I^*]^-)。 \quad (7)$$

将式(7)期望效用中的期望表示成积分的形式, 则式(7)转化为:

$$L_\lambda(I) - L_\lambda(I^*) = \int_0^{+\infty} \{u(W_1 - x + I(x) - P) - u(W_1 - x + I^*(x) - P)\} dF(x) +$$

$$\lambda(E[\delta - I]^- - E[\delta - I^*]^-)。 \quad (8)$$

因为,

$$\begin{aligned} E(\delta - I)^- - E(\delta - I^*)^- &= \int_0^{+\infty} [(\delta - I)^- - (\delta - I^*)^-] dF(x) = \\ &= \int_{(I^* < \delta) \cap (I \geq \delta)} (I - \delta) dF(x) - \int_{(I^* \geq \delta) \cap (I < \delta)} (I^* - \delta) dF(x) + \\ &+ \int_{(I^* \geq \delta) \cap (I \geq \delta)} (I - I^*) dF(x) \geq \int_{(I^* \geq \delta) \cap (I < \delta)} (\delta - I^*) dF(x) + \\ &+ \int_{(I^* \geq \delta) \cap (I \geq \delta)} (I - I^*) dF(x) \geq \int_{(I^* \geq \delta) \cap (I < \delta)} (I - I^*) dF(x) + \\ &+ \int_{(I^* \geq \delta) \cap (I \geq \delta)} (I - I^*) dF(x) \geq \int_{(I^* \geq \delta)} (I - I^*) dF(x) \end{aligned}$$

同时, 由于 $\lambda \leq 0$, 所以:

$$\lambda(E[\delta - I]^- - E[\delta - I^*]^-) \leq \lambda \int_{(I^* \geq \delta)} (I - I^*) dF(x)。 \quad (9)$$

将式(6), 式(9)代入式(8)得:

$$L_\lambda(I) - L_\lambda(I^*) \leq \int_0^{+\infty} \{s^*(x)(I(x) - I^*(x))\} dF(x) + \lambda \int_{(I^* \geq \delta)} (I(x) - I^*(x)) dF(x),$$

按照 $I^*(x)$ 的取值范围将上式分段, 并注意到 $\int x dF(x) \leq \int (-x)^- dF(x)$, 得:

$$\begin{aligned} L_\lambda(I) - L_\lambda(I^*) &\leq \int_0^{+\infty} \{s^*(x)(I(x) - I^*(x))\} dF(x) + \\ &+ \lambda \int_{\{x \geq 0 | I^*(x) > \delta\}} (I(x) - I^*(x)) dF(x) + \\ &+ \lambda \int_{\{x \geq 0 | I^*(x) = \delta\}} (\delta - I(x))^- dF(x) = \\ &= \int_A \{s^*(x)I(x)\} dF(x) + \int_B \{(s^*(x) + \lambda)(I(x) - x)\} dF(x) \quad (10) \\ &+ \int_C \{s^*(x)(I(x) - I^*(x))\} dF(x) + \\ &+ \int_D \{(s^*(x) + \lambda)(I(x) - I^*(x))\} dF(x) \quad (11) \\ &+ \int_{(G \cap \{I(x) < \delta\})} \{s^*(x)(I(x) - \delta)\} dF(x) + \end{aligned}$$

$$\int_{(G \cap I(x) > \delta)} \{(s^*(x) + \lambda)(I(x) - \delta)\} dF(x). \quad (12)$$

其中: $A = \{x \geq 0 \mid I^*(x) = 0\}$, $B = \{x \geq 0 \mid I^*(x) = x\}$, $C = \{x \geq 0 \mid 0 < I^*(x) < \delta\}$, $D = \{x \geq 0 \mid \delta < I^*(x) < x\}$, $G = \{x \geq 0 \mid 0 < I^*(x) = \delta\}$.

由条件(i)和 $I(x) \geq 0$ 可知式(10)第一个积分非正;由条件(ii)和 $I(x) \leq x$ 可知式(10)第二个积分非正;由条件(iii)可知式(11)第一个积分为0;由条件(iv)可知式(11)第二个积分为0;由条件(v)可知式(12)积分非正。

证毕。

3 例子

考虑平方效用函数 $u(x) = -(W_1 - E[X] - x)^2$, 且考虑 $\delta > 0$ 情形, 则在本文限制条件下的最优保险策略为:

$$I^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq M, \\ x - M, & M < x \leq M + \delta, \\ \delta, & M + \delta < x \leq M + \delta + c, \\ x - M - c, & x > M + \delta + c. \end{cases} \quad (13)$$

其中 $M \geq 0, c = \inf\{\kappa \geq 0: \int_{M+\delta+\kappa}^{+\infty} (x - M - \delta - \kappa) dF(x) \leq \epsilon\}$.

证明: 定义两个函数 $d, e: R_+ \rightarrow R_+$, 满足:

$$\begin{aligned} e(\omega) &= \int_{\omega}^{\omega+\delta} (x - \omega) dF(x) + \int_{\omega+\delta}^{\omega+\delta+c} \delta dF(x) + \int_{\omega+\delta+c}^{+\infty} (x - \omega - c) dF(x), \\ (d(\omega))^2 &= \int_{\omega}^{\omega+\delta} (x - \omega)^2 dF(x) + \int_{\omega+\delta}^{\omega+\delta+c} \delta^2 dF(x) + \int_{\omega+\delta+c}^{+\infty} (x - \omega - c)^2 dF(x) - (e(\omega))^2. \end{aligned}$$

对任意的 $\omega \in [0, \bar{\omega}]$, 令:

$$P = e(\omega) + \beta d(\omega), \quad (14)$$

其中, $\beta \geq 0$ 且满足 $e(0) + \beta d(0) \leq E[X]$, 则对于给定的保费 P, ω 是唯一确定的。

同时由于: $d(\bar{\omega}) = D[I_1^*(X)] > 0$, 其中

$$I_1^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \bar{\omega}, \\ x - \bar{\omega}, & \bar{\omega} < x \leq \bar{\omega} + \delta, \\ \delta, & \bar{\omega} + \delta < x \leq \bar{\omega} + \delta + c, \\ x - \bar{\omega} - c, & x > \bar{\omega} + \delta + c. \end{cases}$$

且成立下面的不等式:

$$E[X] = \int_0^{+\infty} x dF(x) = \bar{\omega} + \int_0^{+\infty} (x - \bar{\omega}) dF(x)$$

$$\leq \bar{\omega} + \int_{\bar{\omega}}^{+\infty} I_1^*(x) dF(x) = \bar{\omega} + e(\bar{\omega}),$$

构造方程:

$$E[X] = \omega + e(\omega) + \beta d(\omega). \quad (15)$$

当 $\omega = 0$ 时, 等式右边为: $\omega + e(\omega) + \beta d(\omega) = e(0) + \beta d(0) \leq E[X]$.

当 $\omega \nearrow \bar{\omega}$ 时, 等式右边为: $\bar{\omega} + e(\bar{\omega}) + \beta d(\bar{\omega}) \geq \bar{\omega} + e(\bar{\omega}) \geq E[X]$.

由于式(15)右边是连续的, 故存在 $M \in (0, \bar{\omega})$ 使得式(15)成立。用 M 定义式(13)中的 I^* , 并由式(14)知, $P = E[I^*] + \beta D[I^*]$. 所以, $E[X] - P = M$.

由于 $u(x) = -(W_1 - E[X] - x)^2$, 所以,
$$s^*(x) = s_u(x) = u'(W_1 - x + I^*(x) - P) = -2(-x + I^*(x) - P + E[X]).$$

显然, $s^*(x)$ 满足不等式(6)。

当 $I^*(x) = 0$ 时, 满足不等式 $s^*(x) \leq 0$, 即不等式 $-2(-x - P + E[X]) \leq 0$ 成立: 可得, $x \leq M$. 于是, 当 $I^*(x) = 0, x \leq M$ 时, 定理的条件(i)成立。

当 $I^*(x) = x - M, M < x < M + \delta$ 时, 有 $0 < I^*(x) < \delta$, 此时下面方程成立:

$$-2(-x + I^*(x) - P + E[X]) = 0,$$

于是, 定理的条件(iii)成立。

当 $I^*(x) = x - M - c, x > M + \delta + c$ 时, 取 $\lambda = -2c$, 其中 $c \geq 0$, 则有 $\delta < I^*(x) < x$, 且方程 $-2(-x + I^*(x) - P + E[X]) + \lambda = 0$ 成立。于是, 定理的条件(iv)成立。

当 $I^*(x) = \delta$ 时, 满足 $-2(-x + \delta - P + E[X]) \geq 0$, 可得, $x \geq M + \delta$. 同时满足:

$$-2(-x + \delta - P + E[X]) + (-2c) \leq 0,$$

可得, $x \leq M + \delta + c$. 于是, 当 $I^*(x) = \delta, M + \delta \leq x \leq M + \delta + c$ 时, 定理的条件(v)成立。

因此, 式(13)为最优保险策略。此时, 模型 I 中的目标函数关于 c 递减, 同时由于受条件(b)的限制, 所以, $c = \inf\{\kappa \geq 0: \int_{M+\delta+\kappa}^{+\infty} (x - M - \delta - \kappa) dF(x) \leq \epsilon\}$.

证毕。

参考文献:

[1] Arrow K J. Uncertainty and the welfare economics of medical care[J]. American Economic Review, 1963, 53 (5): 941-973.
[2] Arrow K J. Optimal insurance and generalized deductibles[J]. Scandinavian Actuarial Journal, 1974(1): 1-42.

- [3] Deprez O, Gerber H U. On convex principles of premium calculation[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 1985, 4 (3): 179-189.
- [4] Young V R. Optimal insurance under Wang's premium principle[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 1999, 25(2): 109-122.
- [5] Wang S, Young V R, Panjer H H. Axiomatic characterization of insurance prices[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 1997, 21(2): 173-183.
- [6] Wang S. Premium calculation by transforming the layer premium density[J]. ASTIN Bulletin, 1996, 26 (1): 71-92.
- [7] Promislow S D, Young V R. Unifying framework for optimal insurance[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2005, 36(3): 347-364.
- [8] Zhou C Y, Wu C F. Optimal insurance under the insurer's risk constraint[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2008, 42(3): 992-999.
- [9] Gajek L, Zagrodny D. Insurers optimal reinsurance strategies[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2000, 27(1): 105-112.
- [10] Gajek L, Zagrodny D. Optimal reinsurance under general risk measures[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2004, 34(2): 227-240.
- [11] Koller B, Detwyllyer N. APS reinsurance[J]. ASTIN Bulletin, 1997, 27(2): 329-337.
- [12] Kaluszka M. Mean-variance optimal reinsurance arrangements[J]. Scandinavian Actuarial Journal, 2004 (1): 28-41.
- [13] Kaluszka M. An extension of Arrow's result on optimality of a stop loss contract[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2004, 35(3): 527-536.

Optimal Insurance under Standard Deviation Premium Principle and the Insurer's Risk Constraint

XU Zhou¹, MENG Xiang-mei²

(1. School of Sciences, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China;

2. Bank of Hangzhou, Hangzhou 310003, China)

Abstract: In this paper, the authors derive optimal insurance for maximizing the insured's expected utility of terminal wealth, under standard deviation premium principle and the insurer's risk constraint. The constraint controls the expected loss of insurer's terminal wealth below some pre-specified level. Sufficient conditions for optimality of an insurance contract are given. An explicit form of optimal contract is derived in the case of giving an explicit form of utility function.

Key words: optimal insurance; expected utility; standard deviation premium principle

(责任编辑: 马春晓)