浙江理工大学学报,第 28 卷,第 5 期,2011 年 9 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
Vol. 28, No. 5, Sept. 2011

文章编号: 1673-3851 (2011) 05-0825-06

广义 Agard 偏差函数的性质

马晓艳[1a], 裘松良[1a], 钟根红[1b], 赵叶华[2]
(1. 浙江理工大学, a. 理学院, b. 科技与艺术学院, 杭州 310018; 2. 杭州电子科技大学数学研究所, 杭州 310018)

摘　要: 探讨一些由广义 Agard 偏差函数 $\eta_K(a,x)$ 定义的函数的单调性及凹凸性,并由此获得了关于 $\eta_K(a,x)$, $\lambda(a,K)$的一些不等式。

关键词: $\eta_K(a,x)$; $\lambda(a,K)$; 单调性; 不等式; 凹凸性

中图分类号: O174　　　**文献标识码:** A

0 引　言

本文当 $r\in[0,1]$时,$r'=\sqrt{1-r^2}$。当 $r\in[0,1]$,$x,K\in(0,\infty)$,广义 Agard 偏差函数定义为

$$\eta_K(a,x)=\left(\frac{s}{s'}\right)^2=\left(\frac{\varphi_K(a,r)}{\varphi_{1/K}(a,r')}\right)^2,r=\sqrt{\frac{x}{x+1}},\tag{1}$$

当 $x=1$ 时,即为广义线性偏差函数[1]

$$\lambda(a,K)=\eta_K(a,1)=\left(\frac{\varphi_K(a,1/\sqrt{2})}{\varphi_{1/K}(a,1/\sqrt{2})}\right)^2。\tag{2}$$

这里

$$\varphi_K(a,r)=\mu_a^{-1}(\mu_a(r)/K),\mu_a(r)=\frac{\pi}{2\sin(\pi a)}\frac{\kappa'_a(r)}{\kappa_a(r)},\tag{3}$$

$$\kappa_a(r)=\frac{\pi}{2}F(a,1-a;1;r^2),\kappa'_a(r)=\kappa_a(r'),\tag{4}$$

其中 $F(a,b;c;x)$即为高斯超几何函数[2],其定义为

$$F(a,b;c;x)={}_2F_1(a,b;c;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a,n)(b,n)}{(c,n)n!}x^n,\ |x|<1,\tag{5}$$

这里,当 $a\neq 0$ 时$(a,0)=1$,对于 $n\in N$,有$(a,n)=a(a+1)\cdots(a+n-1)$。

很显然 $\eta_K(1/2,x)=\eta_K(x)$,$\lambda(1/2,K)=\lambda(K)$,$\eta_K(x)$即为 Agard 在研究平面拟共形映照中引入 η 偏差函数[3],对于 $K\in(0,\infty)$,$r\in(0,1)$,$r'=\sqrt{1-r^2}$,$x=(r/r')^2$,其定义为

$$\eta_K(x)=\left(\frac{\varphi_K(r)}{\varphi_{1/K}(r')}\right)^2,\lambda(K)=\left(\frac{\varphi_K(1/\sqrt{2})}{\varphi_{1/K}(1/\sqrt{2})}\right)^2,0<K<\infty。$$

并且 $\eta_K(1)=\lambda(K)$,这两个函数在拟共形映照的极值问题和拟正则映照及拟对称函数等数学领域中发挥重要的作用[4-9]。因此,对广义 Agard 偏差函数 $\eta_K(a,x)$理论的研究有着重要的理论意义和应用价值。

当 $a=1/2$ 时,式(3)、式(4)中的函数即为 Hersch-Pfluger φ_K-偏差函数 $\varphi_K(r)$[6] 以及 Grötzcsh 极值环

收稿日期: 2010-10-08
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10771195);浙江省教育厅科学研究基金资助项目(Y200908819)
作者简介: 马晓艳(1979-),女,吉林梅河口人,硕士,讲师,主要从事复分析的研究。

$B^2/[0,r]$的模 $\mu(r)$(B^2 表示单位圆盘),其定义为

$$\varphi_K(r)=\varphi_K\left(\frac{1}{2},r\right)=\mu^{-1}(\mu(r)/K),\mu(r)=\mu_{1/2}(r)=\frac{\pi}{2}\frac{K'(r)}{K(r)},$$

其中

$$K(r)=K_{1/2}(r)=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;r^2\right)$$

为第一类完全椭圆积分[10-12]。

广义 Agard 偏差函数的性质比 η 偏差函数 $\eta_K(t)$的性质要少的多,因此对前者研究更困难些。本文的目的是给出一些由 $\eta_K(a,x)$定义的函数的单调性,并由此获得关于 $\eta_K(a,x)$与 $\lambda(a,K)$的相关不等式。

本文当 $r\in[0,1]$时,$r'=\sqrt{1-r^2}$,$a\in(0,1/2]$,且 $R(a)=-2\gamma-\psi(a)-\psi(1-a)$,这里 $\gamma=0.572\,1\cdots$为 Euler 常数,ψ 为经典的 psi 函数。这里

$$R\left(\frac{1}{2}\right)=-2\left(\gamma+\psi\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\log 16$$

表示 Ramanujan 常数[3]。

在本文的研究中,下面的引理起着重要的作用。为便于引用,现叙述如下[1]:

引理 对于任意 $a\in(0,\frac{1}{2}]$,$K\in(1,\infty)$,$r\in(0,1)$,令 $s=\varphi_K(a,r)$,则函数

a) $f(r)=K_a(s)/K_a(r)$从$(0,1)$到$(1,K)$上单调上升;

b) $g(r)=s'K_a(s)^2/(r'K_a(r)^2)$从$(0,1)$到$(0,1)$上单调下降;

c) $h(r)=sK'_a(s)^2/(rK'_a(r)^2)$从$(0,1)$到$(1,\infty)$上单调下降。

1 主要结果

定理 1 设 $K>1$,

a)在 R 上定义函数 $f_1(x)\equiv\log\eta_K(a,\mathrm{e}^x)$以及 $f_2(x)\equiv(\eta_K(a,\mathrm{e}^x))^{-1/2}$,则函数 f_1 在$(-\infty,+\infty)$上严格单调上升且是向下凸的,并对于所有的 $x\in(-\infty,+\infty)$,满足条件 $f_1(R)=R$,$1/K<f'_1(x)<K$;而函数 f_2 严格单调下降且是向下凸的,并满足条件 $f_2(R)\in(0,\infty)$。特别地,成立不等式

$$\frac{4\eta_K(a,c^2)\eta_K(a,d^2)}{(\sqrt{\eta_K(a,c^2)}+\sqrt{\eta_K(a,d^2)})^2}\leqslant\eta_K(a,cd)\leqslant\sqrt{\eta_K(a,c^2)\eta_K(a,d^2)},\tag{6}$$

第一个等号成立当且仅当 $c=d$,第二个等号成立当且仅当 $K=1$ 且 $c=d$。对于所有的 $0<c\leqslant d$,成立不等式

$$\left(\frac{d}{c}\right)^{1/K}\leqslant\frac{\eta_K(a,d)}{\eta_K(a,c)}\leqslant\left(\frac{d}{c}\right)^K,\tag{7}$$

各等号成立当且仅当 $K=1$ 或 $c=d$。

b)函数 $f_3(x)\equiv\eta_K(a,x)\eta_K(a,1/x)$ 在$(0,1]$($[1,\infty)$)上严格单调下降(上升)。特别地,对所有的 $x\in(0,\infty)$以及 $K\in[1,\infty)$,成立不等式

$$\lambda(a,K)^2\leqslant\eta_K(a,x)\eta_K(a,1/x),\tag{8}$$

等号成立当且仅当 $x=1$ 或 $K=1$。

c)函数 $f_4(x)\equiv x^{-K}\eta_K(a,x)$在 $(0,\infty)$上单调下降,函数 $f_5(x)\equiv x^{-1/K}\eta_K(a,x)$在 $(0,\infty)$上单调上升,且 $f_4(0,\infty)=[\mathrm{e}^{(K-1)\frac{R(a)}{2}},\infty)$、$f_5(0,\infty)=(\mathrm{e}^{(1-1/K)\frac{R(a)}{2}},\infty)$。

d)函数 $f_6(x)\equiv\dfrac{\eta_K(a,x)}{x}$ 在$(0,1)$上单调下降,在$(1,\infty)$上单调上升。

定理 2 对任意的 $K\in(1,\infty)$,$x\in(0,\infty)$,函数 $f_1(K)\equiv(\log\eta_K(a,x)-\log x)/(K-1)$从 $(1,\infty)$到(A,B)上单调下降,函数 $f_2(K)\equiv(\eta_K(a,x)-x)/(K-1)$ 从$(1,\infty)$到$\left(B\left(\frac{r}{r'}\right)^2,\infty\right)$上单调上升,其中 $r=\sqrt{x/(1+x)}$,

$$A=\frac{\pi}{\sin(\pi a)}\frac{\kappa_a(r)}{\kappa'_a(r)}=2\mu_a(r'),B=\frac{4}{\pi\sin(\pi a)}\kappa_a(r)\kappa'_a(r)$$

定理 3　a)对任意的 $K\in[1,\infty)$，$r\in[1/\sqrt{2},1)$，$x=(r/r')^2$，成立不等式

$$\lambda(a,K)x\leqslant\eta_K(a,x)\leqslant\lambda(a,K)x^K,\tag{9}$$

各等号成立当且仅当 $K=1$ 或 $r=1/\sqrt{2}$，当 $r\in(0,1/\sqrt{2})$，第一个不等号依然成立，而第二个不等号反向。

b)对任意的 $K\in[1,\infty)$，$r\in(0,1)$，成立不等式

$$\eta_K(a,x)\geqslant K^4x,\tag{10}$$

等号成立当且仅当 $K=1$。

推论 4　令 $C=[4K_a^2(1/\sqrt{2})]/[\pi\sin(\pi a)]$，其中 $K_a(1/\sqrt{2})=[c\sin(\pi a)]/[4\sqrt{\pi}]$，$c=\Gamma\left(\frac{1-a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)$。

a)函数 $g_1(K)\equiv(\log\lambda(a,K))/(K-1)$ 从 $(1,\infty)$ 到 $(\pi/\sin(\pi a),C)$ 上单调下降。特别地，对任意的 $K\in(1,\infty)$，成立不等式

$$\exp\left(\frac{\pi}{\sin(\pi a)}(K-1)\right)<\lambda(a,K)<\exp\left(\frac{4}{\pi\sin(\pi a)}\kappa_a^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(K-1)\right)。$$

b)函数 $g_2(K)\equiv(\lambda(a,K)-1)/(K-1)$ 从 $(1,\infty)$ 到(C,∞)上是单调上升。特别地，对任意的 $K\in(1,\infty)$，成立不等式

$$\lambda(a,K)>\frac{4}{\pi\sin(\pi a)}\kappa_a^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(K-1)+1。$$

2　主要结果的证明

本节为了证明定理，经常用到以下导数公式：对于 $r=\sqrt{x/(1+x)}$，$s=\varphi_K(a,r)$，

$$\frac{\partial\eta_K(a,x)}{\partial x}=\frac{1}{K}\left(\frac{r's\kappa_a(s)}{rs'\kappa_a(r)}\right)^2=K\left(\frac{r's\kappa'_a(s)}{rs'\kappa_a(r)}\right)^2=K\eta_K(a,x)\left(\frac{r'\kappa'_a(s)}{r\kappa'_a(r)}\right)^2,\tag{11}$$

$$\frac{\partial\eta_K(a,x)}{\partial K}=\frac{8\eta_K(a,x)\mu_a(r)\kappa_a(s)^2}{\pi^2K^2},\tag{12}$$

$$\frac{\partial\varphi_K(a,r)}{\partial r}=\frac{1}{K}\frac{ss'^2\kappa_a(s)^2}{rr'^2\kappa_a(r)^2}=K\frac{ss'^2\kappa'_a(s)^2}{rr'^2\kappa'_a(r)^2}。\tag{13}$$

定理 1 的证明：a)令 $f_1(x)=2\log(s/s')$，其中 $s=\varphi_K(a,r)$，$r=\sqrt{\mathrm{e}^x/(\mathrm{e}^x+1)}$则 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}x=rr'^2/2$，由式(13)得

$$f_1(x)=\frac{1}{K}\frac{\kappa_a(s)^2}{\kappa_a(r)^2},$$

故由引理(1)知，$f'_1(x)>0$ 且 f'_1 关于 r 从$(0,1)$ 到$(1/K,K)$上严格单调上升。因此函数 f_1 严格单调上升并且是下凸的，并且满足不等式

$$1/K<f'_1(x)<K。\tag{14}$$

接下来，当 $p,q\in(0,1)$ 且 $p+q=1$ 时，则据函数 f_1 的凹凸性，有

$$\log\eta_K(a,\mathrm{e}^{px+qy})=f_1(px+qy)\leqslant pf_1(x)+qf_1(y)=\log\eta_K(a,\mathrm{e}^x)^p+\log\eta_K(a,\mathrm{e}^y)^q。$$

因此有

$$\eta_K(a,\mathrm{e}^{px}\mathrm{e}^{qy})\leqslant\eta_K(a,\mathrm{e}^x)^p\eta_K(a,\mathrm{e}^y)^q。$$

令 $\mathrm{e}^{x/2}=c$，$\mathrm{e}^{y/2}=d$，及 $p=q=1/2$，则式(6) 的上界即可得到。

如果 $x>y$ 且 $K\geqslant1$，由式(14)，从 y 到 x 积分可得，$(x-y)/K\leqslant f_1(x)-f_1(y)\leqslant K(x-y)$，令 $\mathrm{e}^x=d$，$\mathrm{e}^y=c$，则可得到式(7)。

求导得

$$-f'_2(x)=\frac{s'}{2Ks}\left[\frac{\kappa_a(s)}{\kappa_a(r)}\right]^2=\frac{1}{2K}\frac{s'\kappa_a(s)^2}{r'\kappa_a(r)^2}\frac{r'}{s},$$

则由引理(2)可得,$f'_2(x)<0$ 且知 f'_2 关于 r 单调上升。因此得到关于 f_2 的论断。如果令 $e^x=c^2$ 以及 $e^y=d^2$,那么式(6)的下界即可由 f_2 的凹凸性得到。

等式成立的情况是显然的。

b)令 $r=\sqrt{x/(x+1)}$,$u=\varphi_K(a,r')$,$s=\varphi_K(a,r)$ 以及 $g(r)=(1/2)\log f_3(x)=\log s-\log s'+\log u-\log u'$,则由式 (13)得

$$g'(r)=\frac{1}{Krr'^2}\left[\frac{\kappa_a(s)^2}{\kappa_a(r)^2}-\frac{\kappa_a(u)^2}{\kappa_a(r')^2}\right],$$

故由引理(1)得,

$$\begin{cases}\text{对于 } r\geqslant r',\text{即 } r\in(1/\sqrt{2},1),\text{有 } g'(r)>0\Rightarrow g(r)\text{单调上升。}\\ \text{对于 } r\leqslant r',\text{即 } r\in(0,1/\sqrt{2}),\text{有 } g'(r)<0\Rightarrow g(r)\text{单调下降。}\end{cases}$$

又由式(1)得函数 f_3 的单调性。据式(2)以及 f_3 的单调性,便可获得不等式(8)。

c)令 $s=\varphi_K(a,r)$,$r=\sqrt{x/(x+1)}$,据式(1)有 $f_4(x)=\dfrac{\left(\frac{s}{s'}\right)^2}{x^K}=\left(\dfrac{s}{s'}\right)^2\left(\dfrac{r'}{r}\right)^{2K}=F(r)$。据式(13),对数求导有

$$\frac{F'(r)}{F(r)}=\frac{2K}{rr'^2}\left(\frac{\kappa'_a(s)^2}{\kappa'_a(r)^2}-1\right),$$

故由引理(1)得到 $F'(r)<0$,便得 f_4 的单调性。再据文献[1]Theorem6.7 可得极限值。

类似地,可得函数 f_5的相关结论。

d)令 $r=\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$,则 $f_6(x)=F(r)=\left(\dfrac{s}{s'}\right)^2\Big/\left(\dfrac{r}{r'}\right)^2$,据式(13),对数求导有

$$\frac{F'(r)}{F(r)}=\frac{2}{K}\ \frac{1}{rr'^2}\left[\frac{\kappa_a(s)}{\kappa_a(r)}-\sqrt{K}\right]\left[\frac{\kappa_a(s)}{\kappa_a(r)}+\sqrt{K}\right]。$$

由引理(1),存在唯一一点 $r_0\in(0,1)$满足$\dfrac{\kappa_a(s_0)}{\kappa_a(r_0)}=\sqrt{K}$,$(s_0=\varphi_K(a,r_0))$。事实上,$r_0=1/\sqrt{2}$。由文献[13]定理 2(1),对于 $r\in\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}},1\right)$,有 $\kappa_a(s)\kappa'_a(s)\geqslant\kappa_a(r)\kappa'_a(r)\geqslant\kappa_a\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$。因此由 $s=\varphi_K(a,r)$,对于任意的 $K\in(1,\infty)$,当 $r\in\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}},1\right)$时,有

$$\frac{\kappa_a(s)}{\kappa_a(r)}=\sqrt{K}\sqrt{\frac{\kappa_a(s)\kappa'_a(s)}{\kappa_a(r)\kappa'_a(r)}}>\sqrt{K}。$$

此式表明 F 在$(0,r_0]$上单调下降,在 $[r_0,1]$上单调上升。因此函数 f_6在 $(0,x_0]$单调下降,在$[x_0,\infty)$单调上升,这里 $x_0=(r_0/r'_0)^2=1$。

定理 2 的证明:a)令 $f_1(K)=g_1(K)/g_2(K)$,其中 $g_1(K)=\log\eta_K(a,x)-\log x$,$g_2(K)=K-1$,则 $g_1(1)=g_2(1)=0$,并由式(12)有

$$\frac{g'_1(K)}{g'_2(K)}=\frac{2}{\sin^2(\pi a)}\ \frac{1}{\mu_a(r)}\kappa'_a(s)^2。$$

由文献[14]Theorem 1.25 单调性 l'Hôpital 法则知 f_1 的单调性。极限值显然易得。

b)同样,令 $f_2(K)=g_1(K)/g_2(K)$,其中 $g_1(K)=\eta_K(a,x)-x$,$g_2(K)=K-1$,则 $g_1(1)=g_2(1)=0$,有

$$\frac{g'_1(K)}{g'_2(K)}=\frac{2}{\sin^2(\pi a)}\ \frac{1}{\mu_a(r)}\ \frac{s^2\kappa'_a(s)^2}{s'^2}。$$

再由单调性 l'Hôpital 法则知 f_2 的单调性。

定理 3 的证明:a)不等式(9)中各等号成立是显然的,因此仅需证明严格不等式即可。令 $s=\varphi_K(a,r)$,由式 (13)以及引理(1)知,对任意的 $K\in(1,\infty)$,$r\in(0,1)$有

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}=K\,\frac{ss'^2\kappa'_a(s)^2}{rr'^2\kappa'_a(r)^2}<K\,\frac{ss'^2}{rr'^2},$$

现设 $1/\sqrt{2}<r<1$,则 $\mu_a(1/\sqrt{2})>\mu_a(r)>0$,故由文献[1]等式(4.8)得 $\varphi_K(a,1/\sqrt{2})=\mu_a^{-1}\left(\frac{\pi}{2K\sin\pi a}\right)<s<\mu_a^{-1}(0)=1$,则有

$$\int_{\mu_a^{-1}\left(\frac{\pi}{2K\sin\pi a}\right)}^{s}\frac{\mathrm{d}t}{tt'^2}<K\int_{1/\sqrt{2}}^{r}\frac{\mathrm{d}t}{tt'^2}。$$

因此,

$$\log\left(\frac{s}{s'}\right)-\frac{1}{2}\log\lambda(a,K)<K\log\left(\frac{r}{r'}\right),$$

即

$$\left(\frac{s}{s'}\right)<\sqrt{\lambda(a,K)}\left(\frac{r}{r'}\right)^K。$$

故可得到不等式(9)的上界。同理可得到 $0<r<1/\sqrt{2}$的相关情形。

接下来,考虑不等式(9)的下界,令 $f(r)=(sr')/(s'r)$,求导有

$$rr'^2\frac{f'(r)}{f(r)}=\frac{1}{K}\frac{\kappa_a(s)^2}{\kappa_a(r)^2}-1=\frac{\kappa'_a(s)\kappa_a(r)}{\kappa_a(s)\kappa'_a(r)}\frac{\kappa_a(s)^2}{\kappa_a(r)^2}-1=\frac{\kappa'_a(s)\kappa_a(s)}{\kappa_a(r)\kappa'_a(r)}-1。$$

因此由文献[13]定理 2(1),因此有 $f(r)\geqslant f(1/\sqrt{2})=\sqrt{\lambda(a,K)}$,故可得到不等式(9)的下界。

b)从以上论断并由引理(2),(3)可得

$$K\left(\frac{s'}{r'}\right)^2<K\frac{ss'^2\kappa'_a(s)^2}{rr'^2\kappa'_a(r)^2}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}=\frac{1}{K}\frac{ss'^2\kappa_a(s)^2}{rr'^2\kappa_a(r)^2}<\frac{1}{K}\frac{ss'}{rr'}。$$

因此

$$K^2<\frac{ss'}{rr'}\left(\frac{r'}{s'}\right)^2=\frac{sr'}{s'r},$$

即

$$\eta_K(a,x)=\left(\frac{s}{s'}\right)^2>K^4\left(\frac{r}{r'}\right)^2。$$

即不等式(10)得证。

参考文献:

[1] Anderson G D, Qiu S L, Vamanumurthy M K, et al. Generalized elliptic integrals and modular equations[J]. Pacific Journal of Mathematics, 2000, 192(1): 1-37.

[2] Aramowitz M, Stegun I A. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Draphs and Mathematical Tables[M]. New York: Dover, 1965.

[3] Agard S. Distortion theorems for quasiconformal mappings[J]. Ann Acad Sci Fenn Ser: AI, 1968, 413: 1-12.

[4] He C Q. Distortion estimates of quasiconformal mappings[J]. Sci Sinica Ser: A, 1984, 27: 225-232.

[5] Qiu S L, Vamanamurthy M K, Vuorinen M. Bounds for quasiconformal distortion functions[J]. J Math Anal Appl, 1997, 205: 43-64.

[6] Lehto O, Virtaned K I. Quasiconformal Mappings in the Plane[M]. New York: Springer-Verlag, 1973.

[7] Lehto O, Virtaned K I, Väisälä J. Contributions to the distortin theorey of quasiconformal mappings[J]. Ann Acad Sci Fenn Ser: AI, 1959, 273: 1-14.

[8] Beurling A, Ahlfors L. The boundary correspondence under quasi-conformal mappings[J]. Acta Math, 1956, 96: 125-142.

[9] Lehto O. Univalent Functions and Teichmüller Spaces[M]. New York: Springer-Verlag, 1987.

[10] Bowman F. Introduction to Elliptic Functions with Applications[M]. New York: Dower, 1961.

[11] Byrd P F, Friedman M D. Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists: Grundlehren Math[M]. New York: Springer-Verlag, 1954.

[12] Whittaker E T, Waston G N. A Course of Modern Analysis[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1858.

[13] 马晓艳, 裘松良. 广义椭圆积分的性质[J]. 浙江理工大学学报, 2007, 24(2): 200-205.

[14] Anderson G D, Vamanumurthy M K, Vuorinen M. Conformal Invariants, Inequalities, and Quasiconformal Maps[M]. Hoboken: John Wiley and Sons, 1997.

Properties of the Generalized Agard Distortion Function

MA Xiao-yan[1], *QIU Song-liang*[1], *ZHONG Gen-hong*[2], *ZHAO Ye-hua*[3]

(1. School of Sciences, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China;

2. College of Science and Art, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310021, China;

3. Institute of Mathematics, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: The authors present some monotonous properties and concavity and convexity properties of certain functions defined in terms of the generalized Agard distortion function $\eta_K(a,x)$, from which some inequalities about $\eta_K(a,x)$, $\lambda(a,K)$ follow.

Key words: $\eta_K(a,x)$; $\lambda(a,K)$; monotonous property; inequality; concavity and convexity property

（责任编辑：马春晓）