浙江理工大学学报，第 28 卷，第 1 期，2011 年 1 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
Vol. 28，No. 1，Jan. 2011

文章编号：1673-3851 (2011) 01-0131-04

有序加权几何均值(OWG)算子的序结构

李　楠，樊太和
（浙江理工大学理学院，杭州 310018）

摘　要： 讨论有序加权几何均值(OWG)算子的比较问题。将原有的 OWG 算子定义作了推广，从而使得 OWG 算子对闭单位区间的乘积上所有元素都有定义。证明了按照权重向量的序关系 OWG 算子集合构成一个完备格。在此基础上，给出了权重向量中的并不可约元的结构，并给出了用并不可约元表示权重向量集合里的所有元素的方法。

关键词： 有序加权几何均值算子；算子比较；序；并不可约元

中图分类号： O159　　**文献标识码：** A

0　引　言

Yager 首先引入了有序加权几何均值（以下简称为 OWG）算子的概念[1]。有关 OWG 算子的一些性质也已经在一些论文中讨论过，如单调性、对称性等等[2]。同时，OWG 算子在一些领域中的应用也是可见的，如信息决策[1-2]。本文第一部分首先推广了 OWG 算子的定义，使得它可以适用于闭单位区间的乘积上所有元素；第二部分利用格论方法讨论 OWG 算子的比较问题；第三部分讨论 OWG 算子的权重向量的并不可约元结构。

1　OWG 算子及一些性质

首先回顾一下 OWG 算子的定义[1]：

定义 1　OWG 算子 F_w 是一个映射，即 $F_w: I^{+^n} \to I^+$，且满足对每个 $x \in I^{+^n}$，$F_w(x_1, x_2, \cdots x_n) = x_{(1)}^{w_1} x_{(2)}^{w_2} \cdots x_{(n)}^{w_n}$，其中 $I^+ = (0,1]$，$I = [0,1]$；$w_i \in [0,1]$，$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$，$w = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$ 称为 OWG 算子 F_w 的权重向量。$x_{(1)} \geqslant x_{(2)} \geqslant \cdots \geqslant x_{(n)}$ 是 $x_1, x_2 \cdots, x_n$ 的单调不增的重新排列。

相对于有序加权均值（简称 OWA）算子而言[3]，有序加权几何均值（OWG）算子对当某个 $x_i = 0$ 这种情况没有定义。但实际上，这种现象是可能发生的，也就是一个决策者在评定某些标准时可能给出零值的情况。此外，从纯数学角度看，I^+ 不是 R 上的紧致子集，但 I 是紧致的。因此定义在 I 上的函数有很多好的数学性质，例如："紧致集的连续像是紧致的"等。而定义在 I^+ 上的函数不具有类似性质。为此，以下扩张 OWG 算子的定义，使得自变量可以取 I^n 中任意值。

设 $w \in [0,1]$，考虑映射 $f(x) = x^w$，$x \in (0,1]$。显然 f 在 $(0,1]$ 上连续。如果当 $w \neq 0$ 时，f 在 I 上连续。但是如果当 $w = 0$ 时，补充定义 $f(0) = 1$，那么 f 在 $x = 0$ 点处就是右连续的。类似地，可以将此定义推广到整个 I^n。从而有：

收稿日期：2010－05－26
基金项目：国家自然科学基金项目(10871229)
作者简介：李　楠(1985－)，女，山西长治人，硕士研究生，主要从事模糊推理的研究。

定义2 映射 $F'_w: I^n \to I$ 叫做有序加权几何均值(OWG)算子，如果满足每个 $x \in I^n$，$F'_w(x_1, x_2, \cdots x_n) = x_{(1)}^{w_1} x_{(2)}^{w_2} \cdots x_{(n)}^{w_n}$，$w_i \in [0,1]$，$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$，$\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$ 称为 F'_w 的权重向量。$x_{(1)} \geqslant x_{(2)} \geqslant \cdots \geqslant x_{(n)}$ 是 $x_1, x_2 \cdots, x_n$ 的单调不增的重新排列。规定：当某个 $x_{(i)}$ 和它的指数 w_i 都取0时，$x_{(i)}^{w_i} = 0^0 = 1$。

定理1 如上定义的OWG算子 $F(x_1, x_2, \cdots x_n) = x_{(1)}^{w_1} x_{(2)}^{w_2} \cdots x_{(n)}^{w_n}$ 在整个 I^n 上连续。

注1 a)如果 $w = (1, 0, \cdots, 0)$，则 $F'_w(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_{(1)}^1 = \max(x_1, x_2, \cdots, x_n)$；

b)如果 $w = (0, 0, \cdots, 1)$，则 $F'_w(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_{(n)}^1 = \min(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。

因此OWG算子可视为min算子和max算子的推广。

OWG算子仍具有下面的性质：

a)单调性：如果对于 $i = 1, 2, \cdots, n$，有 $a_i \geqslant a'_i$，则 $F'_w(a_1, a_2, \cdots, a_n) \geqslant F'_w(a'_1, a'_2, \cdots, a'_n)$。

b)对称性：对于 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的任意置换 $(a'_1, a'_2, \cdots, a'_n)$，有 $F'_w(a_1, a_2, \cdots, a_n) = F'_w(a'_1, a'_2, \cdots, a'_n)$。

c)幂等性：如果对 $i = 1, 2, \cdots, n$，有 $a = a_i$，则 $F'_w(a_1, a_2, \cdots, a_n) = a$。

类似于OWA算子[3-4]，下面讨论OWG算子的比较问题。

定义3 设 F', G' 是两个OWG算子，定义 $F' \leqslant G'$，如果对任意 $x \in I^n$，都有 $F'(x) \leqslant G'(x)$。

基于上述定义，给出下面的命题。

命题1 由权重向量 $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$，$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$ 分别定义的两个OWG算子 F'_w 和 F'_v。当 $i = 1, 2, \cdots, n$ 时 $w_i, v_i \geqslant 0$ 且 $\sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n} v_i = 1$。$F'_w \leqslant F'_v$ 的充要条件是对每个 $i(1 \leqslant i \leqslant n-1)$，$\sum_{j=1}^{i} w_j \leqslant \sum_{j=1}^{i} v_j$。

证明 充分性：对任意 $x \in I^n$，$F'_w = x_{(1)}^{w_1} x_{(2)}^{w_2} \cdots x_{(n)}^{w_n}$。

当 $F'_w = 0$，直接有 $F'_w \leqslant F'_v$。

当 $F'_w \neq 0$，得

$$\frac{F'_v}{F'_w} = \frac{x_{(1)}^{v_1} x_{(2)}^{v_2} \cdots x_{(n)}^{v_n}}{x_{(1)}^{w_1} x_{(2)}^{w_2} \cdots x_{(n)}^{w_n}}。$$

如果对每个 $i(1 \leqslant i \leqslant n-1)$，有 $\sum_{j=1}^{i} w_j \leqslant \sum_{j=1}^{i} v_j$ 且 $x_{(i)} \geqslant x_{(i+1)}$，则 $x_{(1)}^{v_1 - w_1} \geqslant x_{(2)}^{v_1 - w_1}$ $(v_1 - w_1 \geqslant 0)$。于是

$$\begin{aligned}\frac{F'_v}{F'_w} &= x_{(1)}^{v_1 - w_1} x_{(2)}^{v_2 - w_2} \cdots x_{(n)}^{v_n - w_n} (v_1 - w_1 \geqslant 0) \geqslant x_{(2)}^{v_1 - w_1} x_{(2)}^{v_2 - w_2} x_{(3)}^{v_3 - w_3} \cdots x_{(n)}^{v_n - w_n} \\ &= x_{(2)}^{\sum_{i=1}^{2}(v_i - w_i)} x_{(3)}^{v_3 - w_3} \cdots x_{(n)}^{v_n - w_n} \left(\sum_{i=1}^{2} v_i - \sum_{i=1}^{2} w_i \geqslant 0\right) \geqslant x_{(3)}^{\sum_{i=1}^{2}(v_i - w_i)} x_{(3)}^{v_3 - w_3} \cdots x_{(n)}^{v_n - w_n} \\ &\cdots\cdots\end{aligned}$$

由归纳法可知

$$\frac{F'_v}{F'_w} \geqslant x_{(n)}^{\sum_{i=1}^{n}(v_i - w_i)} = x_{(n)}^0 = 1\left(\sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n} w_i = 1\right)。$$

从而 $F'_w \leqslant F'_v$。

必要性：只要证明“如果存在 i，使得 $\sum_{j=1}^{i} w_j \leqslant \sum_{j=1}^{i} v_j$ 不成立，则存在 x，使得 $F'_w(x) \leqslant F'_v(x)$ 不成立。”

设 $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$，$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$。则 $F'_w = x_{(1)}^{w_1} x_{(2)}^{w_2} \cdots x_{(n)}^{w_n}$，$F'_v = x_{(1)}^{v_1} x_{(2)}^{v_2} \cdots x_{(n)}^{v_n}$。如果存在 i，有 $\sum_{j=1}^{i} w_j > \sum_{j=1}^{i} v_j$。并且满足 $0 < a < 1$，$x = (\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{i}, a, a, \cdots, a)$，则 $F'_w(x) = 1^{\sum_{j=1}^{i} w_j} \cdot a^{1 - \sum_{j=1}^{i} w_j}$，$F'_v(x) = 1^{\sum_{j=1}^{i} v_j} \cdot a^{1 - \sum_{j=1}^{i} v_j}$。由指数函数 $a^x (0 < a < 1)$ 的单调递减性，可知 $a^{1 - \sum_{j=1}^{i} w_j} > a^{1 - \sum_{j=1}^{i} v_j}$ $\left(1 - \sum_{j=1}^{i} w_j < 1 - \sum_{j=1}^{i} v_j\right)$。从而 $F'_w(x) > F'_v(x)$。

定义4 设 $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$，$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$。如果对所有的 $i = 1, 2, \cdots, n$，$w_i, v_i \geqslant 0$，$\sum_{i=1}^{n} w_i =$

$\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$。则 $\boldsymbol{w} \leqslant \boldsymbol{v}$ 当且仅当对每个 $i(1 \leqslant i \leqslant n-1)$，$\sum_{j=1}^{i} w_j \leqslant \sum_{j=1}^{i} v_j$。

注 2　由上所述，根据权重向量的大小关系来区别由不同的权重向量决定的 OWG 算子。

2　关于 OWG 算子的 orness

设 Ω 是 OWG 算子所有权重向量组成的集合，即 $\Omega = \left\{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, n; \sum_{i=1}^{n} a_i = 1\right\}$。$\Omega$ 上的序关系由定义 4 中给出 。

设 L_0 为长度为 n 的所有不降序列的集合，具体定义如下：$L_0 = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in I, x_i \leqslant x_{i+1}, i = 1, 2, \cdots, n-1$ 且 $x_n = 1\}$。

如果 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in L_0$，则 $x \leqslant y$ 当且仅当对所有的 $i \leqslant n, x_i \leqslant y_i$。

注 3　因为 L_0 中元素的交、并是逐点进行计算的，即

$$x \vee y = (x_1 \vee y_1, \cdots, x_{n-1} \vee y_{n-1}, x_n \vee y_n);$$

$$x \wedge y = (x_1 \wedge y_1, \cdots, x_{n-1} \wedge y_{n-1}, x_n \wedge y_n)。$$

因此 L_0 是 I^n 的子格。同时，很容易看出 L_0 是 I^n 的一个完备子格。

现在定义映射 $\beta: \Omega \rightarrow L_0$ 如下：

$$\beta(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \left(a_1, (a_1 + a_2), \cdots, \sum_{j=1}^{n} a_j\right),$$

由 β 是 Ω 和 L_0 的一个同构映射，可知 Ω 是一个同构于 L_0 的完备格，并且对 Ω 中元素 $\{a^k\}_{k \in K}$ 的交、并有下述公式：

$$\bigvee_{k \in K} a_k = \left(\bigvee_{k \in K} a_1^k, \bigvee_{k \in K} (a_1^k + a_2^k) - \bigvee_{k \in K} a_1^k, \cdots, \bigvee_{k \in K} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^k\right) - \bigvee_{k \in K} \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j^k\right)\right);$$

$$\bigwedge_{k \in K} a_k = \left(\bigwedge_{k \in K} a_1^k, \bigwedge_{k \in K} (a_1^k + a_2^k) - \bigwedge_{k \in K} a_1^k, \cdots, \bigwedge_{k \in K} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^k\right) - \bigwedge_{k \in K} \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j^k\right)\right)。$$

类似于 OWA 的 orness[3,5]，设 F' 是由权重向量 $(w_1, w_2, \cdots, w_n)$ 确定的 OWG 算子，那么 F' 的 orness 也可以定义为：$\mathrm{orness}(F') = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (n-i) w_i$。

定义 5[7]　设 L 为格。$\boldsymbol{v}: L \rightarrow I$，如果对任意的 $x, y \in L$，有

$$\boldsymbol{v}(x \vee y) + \boldsymbol{v}(x \wedge y) = \boldsymbol{v}(x) + \boldsymbol{v}(y),$$

则称 $\boldsymbol{v}$ 为赋值映射(valuation)。

如果 $x > y$ 推出 $\boldsymbol{v}(x) > \boldsymbol{v}(y)$，则称赋值映射 $\boldsymbol{v}$ 是正的。这里的“$>$”表示严格大于。

定义 6[7]　如果 $\boldsymbol{v}$ 是格 L 上的正赋值映射，则称 $\boldsymbol{v}$ 为 L 上的一个度量。此时称 $(L, \boldsymbol{v})$ 为一个度量格。

例如，设 $\boldsymbol{v}: L_0 \rightarrow I$ 定义为：$\boldsymbol{v}(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} x_i$，则 $\boldsymbol{v}$ 为 L_0 的一个度量。并且映射 $\boldsymbol{v}: L_0 \rightarrow I$ 是一个度量当且仅当它有下面的表示形式[6]：

$$\boldsymbol{v}(x) = v_1(x_1) + \sum_{i=2}^{n-1} (v_i(x_i) - v_i(x_{i-1})),$$

此时对每个 $i \leqslant n-1$，v_i 都是 I 上的严格递增函数，并且对所有的 $a, b \in I$，有 $a < b, v_{i+1}(b) - v_{i+1}(a) < v_i(b) - v_i(a) (i = 1, 2, \cdots, n-1)$。

由 OWA 算子和 OWG 算子的相似性，也有如下广义的 OWG 算子的“orness”的定义：

一个映射 $\gamma: \Omega \rightarrow R$ 是称为广义 orness 算子，如果它能表示为下面的形式：

$$\gamma(a) = v_1(a_1) + \sum_{i=2}^{n-1} \left(v_i\left(\sum_{j=1}^{i} a_j\right) - v_i\left(\sum_{j=1}^{i-1} a_j\right)\right)$$

此时 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \Omega$，满足对所有的 $i \leqslant n-1$，v_i 是 I 上的严格递增函数，$v_1(0) = 0, v_1(1) = 1$，且对所有 $a, b \in I$，有 $a < b, v_{i+1}(b) - v_{i+1}(a) < v_i(b) - v_i(a) (i = 1, 2, \cdots, n-1)$。

3 OWG 算子的格论性质

定义 7[9] 设 L 为格。元素 $x\in L$ 称为并不可约元，如果满足以下条件：

a) $x\neq 0$（如果 L 有最小元）；

b) 对所有的 $a,b\in L$，由 $x=a\vee b$ 可以推出 $x=a$ 或者 $x=b$。

设 $x=(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{i-1},\underbrace{a,a,\cdots,a}_{n-i},1)\in L_0$，$a\in(0,1]$。首先说明 x 是 L_0 的并不可约元。为此，只需证明“如果 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},1)$，$z=(z_1,z_2,\cdots,z_{n-1},1)\in L_0$，若 $y<x$，$z<x$，则 $y\vee z<x$。”

假定 $y_i\geqslant a$，由 $y\in L_0$，可得 $y_{n-1}\geqslant y_{n-2}\geqslant\cdots\geqslant y_i\geqslant a$。因此，$y\geqslant x$。这与已知条件 $y<x$ 矛盾。假定不成立，于是得“如果 $y<x$，则 $y_i<a$”。同理，得到 $z_i<a$。由 L_0 中逐点序的定义，并且 $y_i\vee z_i<a$，可知 $y\vee z<x$，从而 x 是并不可约元。

利用上述 L_0 中的并不可约元形式，以下给出 Ω 中并不可约元的一般形式。

设

$$t=(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{i-1},a,0,0,\cdots,0,1-a)\in\Omega(a\in(0,1])$$

由 β 是 Ω 和 L_0 的一个同构映射，可知 t 是权重向量集合 Ω 中的并不可约元。并且 Ω 中所有权重向量都可以由这一形式的并不可约元来表示。事实上，设 $a=(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{n-1},a_n)\in\Omega$，则定义：

$$d_1=(a_1,0,0,\cdots,0,1-a_1)\in\Omega;$$

$$d_2=(0,a_1+a_2,0,\cdots,0,1-(a_1+a_2))\in\Omega;$$

……

$$d_{n-1}=\left(0,0,\cdots,0,\sum_{j=1}^{n-1}a_j,1-\sum_{j=1}^{n-1}a_j\right)\in\Omega。$$

则 $a=d_1\vee d_2\vee\cdots\vee d_{n-1}$。

以上讨论同时说明形如式(1)的元素是 Ω 中全体并不可约元素。

注 4 对任意 $a\in L_0$，如果 $a\neq(0,0,\cdots,0,1)$ 且 $a\neq(1,1,\cdots,1,1)$，则 a 在 L_0 中没有补元。因此 L_0 不是布尔格。由 Ω 和 L_0 的格同构知 Ω 不是布尔格。

4 结 语

本文重点是放在 OWG 算子的比较问题上。对于 OWG 算子在现实中的直接应用并未涉及。这个问题将在以后的论文中讨论。

参考文献：

[1] Yager R R, Xu Z S. The continuous ordered weighted geometric operator and its application to decision making[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157: 1393-1402.

[2] Xu Z S. 基于语言信息的决策理论与方法[M]. 北京：科学出版社，2008.

[3] Yager R R. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decisionmaking[J]. IEEE. Trans System Man Cybernet, 1988, 18: 183-190.

[4] Skala H J. Concerning ordered weighted averaging aggregation operators[J]. Statistical Papers, 1991, 32: 35-44.

[5] Yager R R. Families of OWA operators[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1993, 59: 125-148.

[6] Fan T H, Ralescu D A. On the comparisons of OWA operators and ordinal OWA operators[J]. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems, 1997, 5: 1-12.

[7] Birkhoff G. Lattice Theory[M]. 3rd ed. Providence: AMS Colloquium Publications, Providence, 1967.

[8] Rutherford D E. Introduction to Lattice Theory[M]. Edinburgh: Oliver & Boyd Ltd., 1965.

[9] Davey B A, Priestley H A. Introductions to Lattices and Order[M]. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

（下转第 154 页）

nal of the American Chemical Society，1949，71(10)：3301-3303.

[17] Zhou Guo-bin，Zhang Peng-fei，Pan Yuan-jiang. A novel method for synthesis of arylacetic acids from aldehydes，N-(2，3,4,6-tetra-O-pivaloylated-D-glucopyranosyl) amine and trimethylsilylcyanide[J]. Tetrahedron，2005，61(23)：5671-5677.

A Novel Synthetic Technology of 4-Methoxyphenylacetic Acid

CHEN Gang，*YAO Guo-xin*，*ZHU Jin-tao*

(School of Sciences，Zhejiang Sci-Tech University，Hangzhou 310018，China)

Abstract：4-methoxyphenylacetic acid is prepared from anisole by Friedel-Crafts reaction with ethyl oxalylchloride under the catalyst of aluminum trichloride to give ethyl 4-methoxybenzoylformate，without purification，which are subjected to reduction by Wolff-Kishner-Huang reaction with hydrazine hydrate with an overall yield of 55. 4%，and it's structure is characterized by IR、^{1}HNMR and MS.

Key words：anisole；Wolff-Kishner-Huang reaction；4-methoxyphenylacetic acid；synthesis

（责任编辑：许惠儿）

（上接第134页）

Order Structure on Ordered Weighted Geometric(OWG) Operators

LI Nan，*FAN Tai-he*

(School of Sciences，Zhejiang Sci-Tech University，Hangzhou 310018，China)

Abstract：The authors are primarily concerned with the comparisons of the OWG operators. The original definition of OWG operators is generalized so that the OWG can be defined on the product of closed unit intervals. It is proved that the set of OWG operators forms a complete lattice according to the order on the set of all weight vectors. The structure of the set of all join-irreducible elements is described. Furthermore，the method as how to express all weight vectors via join-irreducible elements is demonstrated.

Key words：OWG operators；comparison；order；join-irreducible elements

（责任编辑：马春晓）