浙江理工大学学报，第 28 卷，第 1 期，2011 年 1 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
Vol. 28，No. 1，Jan. 2011

文章编号：1673-3851 (2011) 01-0126-05

一类时延并联限制细胞神经网络的周期解

王玲娜[1]，张丽俊[2]
（1. 浙江师范大学数理与信息工程学院，浙江金华 321004；2. 浙江理工大学理学院，杭州 310018）

摘　要：研究一类时延并联限制细胞神经网络的周期解。利用压缩映射原理和构造 Lyapunov 泛函的方法，给出判定此系统周期解的存在唯一性及指数稳定性的条件，并给出了一个例子说明条件是可行的。这些条件可用于设计周期稳定的时延并联限制细胞神经网络，也很容易用简单的代数方法进行验证，这对此类细胞神经网络的设计和应用起到了重要作用。

关键词：并联限制神经网络；周期解；指数稳定性；压缩映射原理；Lyapunov 泛函
中图分类号：O175；TN711　　　**文献标识码**：A

0　引　言

近年来，细胞神经网络（CNNs）已经引起了包括计算机科学、人工智能、信息科学、自动控制、数学、生物、物理等学科领域内的众多科学家的巨大热情和广泛兴趣，并且得到了许多重要结果[1-4]。随着细胞神经网络的迅速发展，其在工程上的应用也越来越广泛，表现出越来越高的实效性。并联限制细胞神经网络（SICNNs）是由 Bouzerdoum 和 Pinter 引进的一类新型的细胞神经网络[5]，现在已经被广泛应用到数据压缩、图像处理、机器人、联想记忆、优化设计等诸多领域。

笔者考虑如下具有定常时延并联限制细胞神经网络模型：

$$\frac{\mathrm{d}x_{ij}(t)}{\mathrm{d}t}=-a_{ij}x_{ij}(t)-\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}c_{kl}f(x_{kl}(t-\tau))x_{ij}(t)+L_{ij}(t),1\leqslant i,j\leqslant n,\quad(1)$$

其中 c_{ij} 代表 (i,j) 处的细胞，c_{ij} 的 r 邻域 $N_r(i,j)$ 定义为：

$$N_r(i,j)=\{c_{kl}:\max(|k-i|,|l-j|)\leqslant r,1\leqslant k,l\leqslant n\},$$

x_{ij} 表示第 (i,j) 个细胞神经元在 t 时刻的状态，$L_{ij}(t)$ 为 c_{ij} 的外部输入，是以 ω 为周期的有界连续函数，即 $L_{ij}(t+\omega)=L_{ij}(t)$，设 $L_{ij}=\max\limits_{t\geqslant t_0}|L_{ij}(t)|$，$a_{ij}>0$，表示细胞的死亡率，$c_{kl}\geqslant 0$，表示细胞 c_{kl} 在 $t-\tau$ 时刻的连接权，$f(x_{kl})$ 为正连续函数，代表细胞 c_{kl} 的输出。

对系统（1），文献[6]已经研究了其概周期解的存在性和吸引性，文献[7]已经研究了其平衡点的存在性和指数稳定性，但到目前为止未见研究者研究过其周期解和稳定性。本文的目的是在文献[6]、文献[7]的基础上，利用压缩映射原理和构造 *Lyapunov* 泛函的方法，给出判定系统（1）周期解的存在唯一性及指数稳定性的条件。本文结果改进了文献[6]中的结果，对同类细胞神经网络的设计和应用具有重要的指导意义。

1　系统周期解的存在性与稳定性

引理　对于系统（1），设 $x_{ij}(t)$ 是以 $x_{ij}(t)=\phi_{ij}(t)$，$\forall t\in[-\tau,0]$ 为初始条件的解，若 $f(x)$ 满足

收稿日期：2010－06－22
基金项目：国家自然科学基金项目（10871181，10802043）；浙江理工大学科研基金（0813820-Y）；浙江师范大学校级青年基金资助项目（KYJ06Y09107）
作者简介：王玲娜（1978－），女，河北沧州人，讲师，硕士，主要从事微分方程与动力系统的研究。

$$(H_1)a_{ij} > M_f \sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)} c_{kl}\ ,$$

则 $x_{ij}(t)$是有界的，且$|x_{ij}(t)|\leqslant k=\max\limits_{ij}\left\{|\phi_{ij}(0)|+\dfrac{L_{ij}}{a_{ij}}\right\}$，其中 $M_f=\sup\limits_{x\in R}|f(x)|$。

证明　由文献[6]中的引理 2 结论可得若条件(H_1)成立，则有

$$|x_{ij}(t)|<q_{ij}+\frac{p_{ij}q_{ij}}{a_{ij}-p_{ij}},\quad \forall t\geqslant t_0,$$

其中

$$q_{ij}=\sup_{t\geqslant 0}\left\{e^{-a_{ij}(t-t_0)}|x_{ij}(t_0)|+\int_{t_0}^{t}e^{-a_{ij}(t-s)}|L_{ij}(s)|ds\right\},$$

$$p_{ij}=M_f\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}c_{kl}$$

计算可得

$$q_{ij}\leqslant\sup_{t\geqslant 0}\left\{|x_{ij}(t_0)|+L_{ij}\int_{t_0}^{t}e^{-a_{ij}(t-s)}ds\right\}=\sup_{t\geqslant 0}\left\{|x_{ij}(t_0)|+\frac{L_{ij}}{a_{ij}}(1-e^{-a_{ij}(t-t_0)})\right\}$$

$$=|x_{ij}(t_0)|+\frac{L_{ij}}{a_{ij}}$$

所以

$$|x_{ij}(t)|<q_{ij}+\frac{p_{ij}q_{ij}}{a_{ij}-p_{ij}}=\frac{a_{ij}q_{ij}}{a_{ij}-p_{ij}}\leqslant\frac{a_{ij}q_{ij}}{a_{ij}}=q_{ij}\leqslant|x_{ij}(t_0)|+\frac{L_{ij}}{a_{ij}}\leqslant\max_{ij}\left\{|\phi_{ij}(t_0)|+\frac{L_{ij}}{a_{ij}}\right\},$$

不妨设 $t_0=0$，则$|x_{ij}(t)|\leqslant k=\max\limits_{ij}\left\{|\phi_{ij}(0)|+\dfrac{L_{ij}}{a_{ij}}\right\}$，证毕。

定理　若条件

$$(H_2)|f(x)-f(y)|\leqslant\mu|x-y|,\quad\forall x,y\in R;$$

$$(H_3)a_{ij}>M_f\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}c_{kl}+k\mu\sum_{ij}\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}c_{kl},\quad\forall 1\leqslant i,j\leqslant n,$$

成立，则系统(1)有唯一一个以 ω 为周期的周期解，并且 $t\rightarrow+\infty$时，系统(1)的其它解都指数收敛于该周期解。

证明　记 $C=C([-\tau,0],R^{n\times n})$为从$[-\tau,0]$映射到 $R^{n\times n}$的连续函数所构成的 Banach 空间，且具有一致收敛拓扑，对任意 $\phi\in C$，定义$\|\phi\|=\sup\limits_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}|\phi(\theta)|$，这里$|\phi(\theta)|=\sum\limits_{ij}|\phi_{ij}(\theta)|$ 。

对$\forall\phi,\psi\in C$，

$$x(t,\phi)=(x_{11}(t,\phi),x_{12}(t,\phi),\cdots,x_{1n}(t,\phi),x_{21}(t,\phi),\cdots,x_{2n}(t,\phi),\cdots,x_{nn}(t,\phi))^T$$

$$x(t,\psi)=(x_{11}(t,\psi),x_{12}(t,\psi),\cdots,x_{1n}(t,\psi),x_{21}(t,\psi),\cdots,x_{2n}(t,\psi),\cdots,x_{nn}(t,\psi))^T$$

分别表示式(1)通过$(0,\phi)$和$(0,\psi)$的解。

记 $x_t(\phi)=x(t+\theta,\phi)$，$\theta\in[-\tau,0]$，$t\geqslant 0$，则$\forall t\geqslant 0$ 有 $x_t(\phi)\in C$。

于是由式(1)可得

$$[x_{ij}(t,\phi)-x_{ij}(t,\psi)]'=-a_{ij}\Big[x_{ij}(t,\phi)-x_{ij}(t,\psi)\Big]-\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}c_{kl}\Big[f(x_{kl}(t-\tau,\phi))x_{ij}(t,\phi)-f(x_{kl}(t-\tau,\psi))x_{ij}(t,\psi)\Big]$$

定义函数

$$G(u)=u-a_{ij}+M_f\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}c_{kl}+k\mu e^{u\tau}\sum_{ij}\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}c_{kl}$$

则

$$G(0)=-a_{ij}+M_f\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}c_{kl}+k\mu\sum_{ij}\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}c_{kl}$$

由条件(H_3)可得 $G(0)<0$，易得 $\lim\limits_{u\rightarrow+\infty}G(u)=+\infty$。因为 $G(u)$是 R 上的连续函数，所以由中值定理，存

在 $\bar{u}>0$,使得

$$G(\bar{u})=\bar{u}-a_{ij}+M_f\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}c_{kl}+k\mu e^{\bar{u}\tau}\sum_{ij}\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}c_{kl}<0$$

现考虑下面的 Lyapunov 泛函:

$$v(t)=v_1(t)+v_2(t),$$
$$v_1(t)=\sum_{ij}|x_{ij}(t,\phi)-x_{ij}(t,\psi)|e^{\bar{u}t},$$
$$v_2(t)=k\sum_{ij}\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}c_{kl}\int_{t-\tau}^{t}|f(x_{kl}(s,\phi))-f(x_{kl}(s,\psi))|e^{\bar{u}(s+\tau)}ds$$

通过计算 $v_1(t)$ 的导数,易得

$$v'_1(t)=\sum_{ij}\mathrm{sgn}(x_{ij}(t,\phi)-x_{ij}(t,\psi))\{[x_{ij}(t,\phi)-x_{ij}(t,\psi)]'e^{\bar{u}t}+[x_{ij}(t,\phi)-x_{ij}(t,\psi)]\bar{u}e^{\bar{u}t}\}\leqslant$$
$$e^{\bar{u}t}\sum_{ij}\Big\{(\bar{u}-a_{ij})|x_{ij}(t,\phi)-x_{ij}(t,\psi)|+\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}c_{kl}|f(x_{kl}(t-\tau,\phi))x_{ij}(t,\phi)-$$
$$f(x_{kl}(t-\tau,\psi))x_{ij}(t,\psi)|\Big\}\leqslant e^{\bar{u}t}\sum_{ij}\Big\{(\bar{u}-a_{ij})|x_{ij}(t,\phi)-x_{ij}(t,\psi)|+\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}c_{kl}$$
$$|f(x_{kl}(t-\tau,\phi))[x_{ij}(t,\phi)-x_{ij}(t,\psi)]|+|[f(x_{kl}(t-\tau,\phi))-f(x_{kl}(t-\tau,\psi))]x_{ij}(t,\psi)|\Big\}$$

由条件(H_3)易得条件(H_1)必成立,由引理和条件(H_2)可得上式

$$\leqslant e^{\bar{u}t}\sum_{ij}\Big(\bar{u}-a_{ij}+M_f\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}c_{kl}\Big)|x_{ij}(t,\phi)-x_{ij}(t,\psi)|+k\mu e^{\bar{u}t}\sum_{ij}\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}c_{kl}|x_{kl}(t-\tau,\phi)-$$
$$x_{kl}(t-\tau,\psi)|$$

通过计算 $v_2(t)$ 的导数,易得

$$v'_2(t)=k\sum_{ij}\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}c_{kl}\{|f(x_{kl}(t,\phi))-f(x_{kl}(t,\psi))|e^{\bar{u}(t+\tau)}-|f(x_{kl}(t-\tau,\phi))-$$
$$f(x_{kl}(t-\tau,\psi))|e^{\bar{u}t}\}\leqslant k\mu e^{\bar{u}t}\sum_{ij}\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}c_{kl}\{|x_{kl}(t,\phi)-x_{kl}(t,\psi)|e^{\bar{u}\tau}-$$
$$|x_{kl}(t-\tau,\phi)-x_{kl}(t-\tau,\psi)|\}$$

所以

$$v'(t)=v'_1(t)+v'_2(t)\leqslant e^{\bar{u}t}\sum_{ij}\Big(\bar{u}-a_{ij}+M_f\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}c_{kl}\Big)|x_{ij}(t,\phi)-x_{ij}(t,\psi)|+$$
$$k\mu e^{\bar{u}(t+\tau)}\sum_{ij}\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}c_{kl}|x_{kl}(t,\phi)-x_{kl}(t,\psi)|\leqslant e^{\bar{u}t}\sum_{ij}\Big(\bar{u}-a_{ij}+M_f\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}c_{kl}\Big)$$
$$|x_{ij}(t,\phi)-x_{ij}(t,\psi)|+k\mu e^{\bar{u}(t+\tau)}\sum_{ij}\Big(\sum_{ij}\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}c_{kl}\Big)|x_{ij}(t,\phi)-x_{ij}(t,\phi)|=$$
$$e^{\bar{u}t}\sum_{ij}\Big(\bar{u}-a_{ij}+M_f\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}c_{kl}+k\mu e^{\bar{u}\tau}\sum_{ij}\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}c_{kl}\Big)|x_{ij}(t,\phi)-x_{ij}(t,\psi)|=$$
$$e^{\bar{u}t}\sum_{ij}G(\bar{u})|x_{ij}(t,\phi)-x_{ij}(t,\psi)|\leqslant 0$$

因为

$$v(0)=\sum_{ij}|\phi_{ij}(0)-\psi_{ij}(0)|+k\sum_{ij}\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}c_{kl}\int_{-\tau}^{0}|f(\phi_{kl}(s))-f(\psi_{kl}(s))|e^{\bar{u}(s+\tau)}ds\leqslant$$
$$\Big(1+\frac{k\mu}{\bar{u}}e^{\bar{u}\tau}\sum_{ij}\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}c_{kl}\Big)\|\phi-\psi\|$$

易得

$$v(0)\geqslant v(t)\geqslant v_1(t)=\sum_{ij}|x_{ij}(t,\phi)-x_{ij}(t,\psi)|e^{\bar{u}t},$$

即

$$\sum_{ij}|x_{ij}(t,\phi)-x_{ij}(t,\psi)|\leqslant\Big(1+\frac{k\mu}{\bar{u}}e^{\bar{u}\tau}\sum_{ij}\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}c_{kl}\Big)e^{-\bar{u}t}\|\phi-\psi\|,$$

令 $r=1+\frac{k\mu}{\bar{u}}e^{\bar{u}\tau}\sum_{ij}\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}c_{kl}$,显然 $r\geqslant 1$。

由上式可得

$$\|x_t(\phi)-x_t(\psi)\|\leqslant r e^{-\bar{u}(t-\tau)}\|\phi-\psi\|, \tag{2}$$

选取正整数 m 使其满足不等式

$$r e^{-\bar{u}(m\omega-\tau)}\leqslant\frac{1}{2} \tag{3}$$

现定义一个 Poincare 映射 $P:C\to C, P\phi=x_\omega(\phi)$,则由式(2)和式(3)可得

$$\|P^m\phi-P^m\psi\|\leqslant\frac{1}{2}\|\phi-\psi\|$$

这表明 P^m 是一个压缩映射,由压缩映射原理可得:存在唯一一个不动点 $\phi^*\in C$ 满足 $P^m\phi^*=\phi^*$。注意到 $P^m(P\phi^*)=P(P^m\phi^*)=P\phi^*$,这表明 $P\phi^*$ 也是 P^m 的一个不动点,由不动点的唯一性得 $P\phi^*=\phi^*$,即 $x_\omega(\phi^*)=\phi^*$。

设 $x(t,\phi^*)$是系统(1)通过$(0,\phi^*)$的解,注意到

$$x_{t+\omega}(\phi^*)=x_t(x_\omega(\phi^*))=x_t(\phi^*),\ \forall t\geqslant 0,$$

所以 $x(t+\omega,\phi^*)=x(t,\phi^*)$, $\forall t\geqslant 0$。这表明 $x(t,\phi^*)$是系统(1)的以 ω 为周期的周期解,并且由式(2)可得:当 $t\to\infty$时,系统(1)其他的所有解都指数收敛于这个周期解,证毕。

2　一个相关的例子

考虑下面的时延细胞神经网络系统

$$\frac{dx_{ij}(t)}{dt}=-a_{ij}x_{ij}(t)-\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}c_{kl}f(x_{kl}(t-\tau))x_{ij}(t)+L_{ij}(t), \tag{4}$$

其中 $i,j=1,2,3$。

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0.5 & 2 & 0.5\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad C=(c_{ij})=\begin{pmatrix}0.1 & 0.1 & 0.2\\ 0.2 & 0.1 & 0.1\\ 0.1 & 0.1 & 0.1\end{pmatrix},$$

$$L(t)=(L_{ij}(t))=\begin{pmatrix}0.1\sin t & 0.1\cos t & 0.2\sin t\\ 0.2\cos t & 0.3\sin t & 0.3\sin t\\ 0.2\cos t & 0.3\sin t & 0.2\cos t\end{pmatrix}$$

设

$$r=1, f(x)=\frac{1}{20}(\|x+1\|-\|x-1\|), \phi_{ij}(t)=(0.1\sin t)_{ij}$$

显然

$$M_f=0.1,\quad \mu=0.1,\quad k=\max_{ij}\left\{|\phi_{ij}(0)|+\frac{L_{ij}}{a_{ij}}\right\}=0.6,$$

$$\sum_{c_{kl}\in N_r(1,1)}c_{kl}=0.5,\quad \sum_{c_{kl}\in N_r(1,2)}c_{kl}=0.8,\quad \sum_{c_{kl}\in N_r(1,3)}c_{kl}=0.5,\quad \sum_{c_{kl}\in N_r(2,1)}c_{kl}=0.7,$$

$$\sum_{c_{kl}\in N_r(2,2)}c_{kl}=1.1,\quad \sum_{c_{kl}\in N_r(2,3)}c_{kl}=0.7,\quad \sum_{c_{kl}\in N_r(3,1)}c_{kl}=0.5,\quad \sum_{c_{kl}\in N_r(3,2)}c_{kl}=0.7,$$

$$\sum_{c_{kl}\in N_r(3,3)}c_{kl}=0.4,\quad \sum_{ij}\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}c_{kl}=5.9,\quad \min_{ij}(a_{ij})=0.5,$$

$$\max_{ij}\left\{M_f\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}c_{kl}+k\mu\sum_{ij}\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}c_{kl}\right\}=0.1\times1.1+0.6\times0.1\times5.9=0.464$$

所以

$$a_{ij}>M_f\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}c_{kl}+k\mu\sum_{ij}\sum_{c_{kl}\in N_r(i,j)}c_{kl},\quad \forall 1\leqslant i,j\leqslant n$$

由定理得系统(4)存在唯一一个以 ω 为周期的周期解，并且 $t\to+\infty$ 时，系统(4)的其它解都指数收敛于该周期解。

参考文献：

[1] Cao J，Song Q. Stability in Cohen-Grossberg type BAM neural networks with time-varying delays[J]. Nonlinearity，2006，19(7)：1601-1617.

[2] Gilli M. Stability of cellular neural networks and delayed neutral networks with nonpositive templates and nonmonototic output functions[J]. IEEE Trans Circuits Syst：I，1994，41：518-528.

[3] Cao J，Wang J. Global exponential stability and periodicity of recurrent neural networks with time delays[J]. IEEE Trans Circuits Syst：I，2005，52(5)：920-931.

[4] Cao J，Feng G，Wang Y. Multistability and multiperiodicity of delayed Cohen-Grossberg neural networks with a general class of activation functions[J]. Physica D，2008，237(13)：1734-1749.

[5] Bouzerdoum A，Pinter R B. Shunting inhibitory cellular neural networks：derivation and stability analysis[J]. IEEE Trans Circuits Syst：I Fundamental Theory and Appl.，2008，40(33)：215-221.

[6] Chen A，Cao J. Almost periodic solution of shunting inhibitory CNNs with delays[J]. Physics Letters A，2002，298：161-170.

[7] Wang L，Lin Y. Global exponential stability for shunting inhibitory CNNs with delays[J]. Applied Mathematics and Computation，2009，214：297-303.

Periodic Solution of a Type of Shunting Inhibitory CNNs with Delays

WANG Ling-na[1]，*ZHANG Li-jun*[2]

(1. College of Mathematics，Physics and Information Engineering，Zhejiang Normal University，Jinhua 321004，China；2. School of Sciences，Zhejiang Sci-Tech University，Hangzhou 310018，China)

Abstract：The periodic solution of shunting inhibitory CNNs is studied. By applying the principle of compressed mapping and contributing Lyapunov function，some sufficient conditions ensuring existence，uniqueness and exponential stability of the periodic solution are obtained. Moreover an example is given to illustrate the feasibility of the conditions in our results. These conditions can be applied to design periodic stable shunting inhibitory CNNs，and easily checked in practice by simple algebraic methods. These play an important role in the design and applications of the type of CNNs.

Key words：shunting inhibitory CNNs；periodic solution；exponential stability；principle of compressed mapping；Lyapunov function

(责任编辑：马春晓)