

# 纺织材料厚度设计反问题

徐定华,程建新

(浙江理工大学理学院,杭州 310018)

**摘 要:**提出了基于热湿传递稳态模型的纺织材料厚度设计反问题,并根据正则化思想将反问题的求解归结为函数极小化问题。利用常微分方程组的正演算法与函数极小化问题的一维搜索,构造了反问题正则化解的一类迭代算法,并证明了算法的收敛性。数值模拟试验验证了算法的有效性和反问题提法的合理性。

**关键词:**纺织材料;热湿传递;反问题;厚度设计;正则化方法;数值解

**中图分类号:** TS101.1; O175.14 **文献标识码:** A

## 0 纺织材料厚度设计反问题的提出

纺织材料设计是一类数学物理反问题。通过反问题的理论与方法研究纺织材料设计,能科学地预测并指导纺织材料和衣着装备设计实验,对先进纺织材料的发展及保障人类在恶劣环境下的舒适、健康和劳动能力有着理论意义和实用价值。

平行圆柱孔织物的热湿传递稳态模型可描述为耦合常微分方程组的混合问题<sup>[1]</sup>:

$$\left\{\begin{aligned} &k_1 \frac{\varepsilon(x) \cdot r(x)}{\tau(x)} \cdot \frac{p_v}{T^{3/2}} \cdot \frac{dp_v}{dx} + m_v = 0, & 0 < x < L \\ &\frac{dm_v}{dx} + \Gamma(x) = 0, \\ &\kappa \frac{d^2 T}{dx^2} + \lambda \Gamma(x) = 0, \end{aligned}\right. \quad (1)$$

$$\left\{\begin{aligned} &\Gamma(x) = -k_2 \frac{\varepsilon(x) \cdot r(x)}{\tau(x)} (p_{sat}(T) - p_v(x)) \frac{1}{\sqrt{T}}; \\ &\begin{cases} T(0) = T_L, \\ T(L) = T_R, \\ m_v(0) = m_{v,0}, \\ p_v(0) = p_{v,0} \end{cases} \end{aligned}\right. \quad (2)$$

其中  $T(x)$  为温度(K),  $p_v(x)$  为水蒸汽压力(Pa),  $m_v(x)$  为水蒸汽质量通量( $\text{kg}/\text{m}^2 \cdot \text{s}$ ),  $\Gamma(x)$  为水蒸汽凝结率( $\text{kg}/\text{m}^3 \cdot \text{s}$ ), 饱和水蒸汽压力经验公式可表示为<sup>[2]</sup>

$$p_{sat}(T) = 100 \times \exp\left(18.956 - \frac{4030}{(T - 273.15) + 235}\right);$$

$\varepsilon(x)$  为纤维的孔隙率(%),  $r(x)$  为纤维的孔半径(m),  $\tau(x)$  为纤维孔的曲折系数;  $\kappa$  是织物的热传导系数( $\text{W}/\text{m} \cdot \text{K}$ );  $\lambda$  是水蒸汽的吸收凝结热( $\text{J}/\text{kg}$ );  $k_1$  和  $k_2$  均为与分子质量和气体常数有关的常数, 令  $k_3 = \frac{\kappa}{\lambda}$ 。

$T(0)$ 、 $T(L)$ 分别为织物内、外侧温度; $m_{v,0}$ 为织物内侧水蒸汽质量通量; $p_{v,0}$ 为织物内侧水蒸汽压力。

上述定解问题式(1)~式(2)是耦合常微分方程组的混合问题,称为正问题(DP: direct problem)。

下面考虑纺织材料厚度设计反问题(IP: inverse problem):在环境温度—湿度组合 $(T, RH) \in [T_{\min}, T_{\max}] \times [H_{\min}, H_{\max}]$ 下,已知单层织物的材料结构与类型(即导热系数 $\kappa$ ),根据服装的热湿舒适性要求,试决定该织物的厚度 $L$ 。

纺织材料的结构往往可由纺织材料纤维的孔半径、孔隙率和孔的曲折系数来描述。

关于服装热湿舒适性,内衣内侧至皮肤表面间服装微气候区的最舒适条件为<sup>[2]</sup>:温度 $(32 \pm 1)^\circ\text{C}$ ,相对湿度 $50\% \pm 10\%$ ,气流速度 $(0.25 \pm 0.15)\text{m/s}$ 。

$T_{\min}$ 、 $T_{\max}$ 分别为某地某时间段的最低日平均温度、最高日平均温度; $H_{\min}$ 、 $H_{\max}$ 分别为某地某时间段的最低日平均相对湿度、最高平均相对湿度。

于是,反问题(IP)可叙述为:已知织物的舒适指标和织物外侧的温度—湿度组合,由

$$\begin{cases} T(0) = T_L, \\ T(L) = T_R, \\ m_v(0) = m_{v,0}, \\ p_v(L) = p_{v,R}. \end{cases} \quad (3)$$

并通过模型(1)决定织物的厚度 $L$ ,其中 $p_{v,R}$ 与环境相对湿度有关。

在数学上研究该问题的适定性条件和数值求解方法,具有重要的研究意义。近几年来,范金土,李毅等人已经对纺织材料动态热湿传递的正问题数学模型及其数值解法做了深入研究,如有限差分法、有限体积法、控制体一时域递归展开算法<sup>[3-5]</sup>,并进行了有效的数值计算与实验研究。但是,至今未见纺织材料热湿传递的反问题提法。因此,笔者提出了基于热湿传递稳态模型的纺织材料厚度设计反问题,并依据正则化算法和常微分方程组的正演算法、函数极小化问题的一维搜索,构造了反问题正则化解的一类迭代算法。选用杭州两种环境温湿度组合进行反问题求解和数值模拟。理论分析与数值模拟表明反问题提法的正确性和算法的有效性。

## 1 反问题的数值算法

下面构造数值算法求解纺织材料厚度设计反问题。将常微分方程组的正演算法与函数极小化问题的一维搜索法相结合,构造反问题解的迭代算法。

### 1.1 反问题(IP)的正则化解

将环境温度和湿度的组合离散为 $(T_i, RH_j)$  ( $i=1, \dots, k; j=1, \dots, m$ )。 $RH_{i,j,0}(x)$ 是相应的、通过求解正问题(DP)计算出来的织物内侧面相对湿度。设 $RH_0^*$ 是织物在舒适状态下的相对湿度经验值。

考虑最小二乘问题

$$\min \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m (RH_{i,j,0}(x) - RH_0^*)^2,$$

由于以上最小二乘问题的解可能不唯一或者不稳定,为消除解的不适定性,利用正则化思想改进最小二乘法。

定义函数

$$J(x) = \lambda^2 \cdot x^2 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m (RH_{i,j,0}(x) - RH_0^*)^2.$$

该函数不同于最小二乘问题,它添加了一个关于 $x$ 的惩罚项, $\lambda^2$ 为正则化参数。

设 $M=[0, X]$ 是反问题的某允许集合, $X$ 为某一正常数。若 $x_{\text{reg}}$ 满足

$$J(x_{\text{reg}}) = \min_{x \in M} J(x),$$

则称 $x_{\text{reg}}$ 为反问题(IP)的广义解,常称为正则化解。

### 1.2 正则化解的迭代算法

将常微分方程组的正演算法与函数极小化问题的一维搜索结合,构造如下迭代算法:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \Delta_n d_n \\ x_1 \text{ 给定}, n=1, 2, \dots \end{cases}$$

使得  $J(x_{n+1}) < J(x_n)$ , 其中  $x_n$  满足

$$\begin{cases} k_1 \frac{\varepsilon(x) \cdot r(x)}{\tau(x)} \cdot \frac{p_v}{T^{3/2}} \cdot \frac{dp_v}{dx} + m_v = 0 & 0 < x < x_n, n=1, 2, \dots \\ \frac{dm_v}{dx} - k_2 \frac{\varepsilon(x) \cdot r(x)}{\tau(x)} \cdot (p_{sat} - p_v) \frac{1}{\sqrt{T}} = 0 \\ k_3 \frac{d^2 T}{dx^2} - k_2 \frac{\varepsilon(x) \cdot r(x)}{\tau(x)} \cdot (p_{sat} - p_v) \frac{1}{\sqrt{T}} = 0 \\ T(0) = T_L, \\ T(x_n) = T_R, \\ m_v(0) = m_{v,0}, \\ p_v(x_n) = p_{v,R}. \end{cases} \quad (4)$$

$\Delta_n$  为搜索步长,  $d_n$  为搜索方向, 均可由下段中给出的一维搜索算法决定。

### 1.3 一维搜索问题的 0.618 法

1.1 中的最优化问题属于单变量最优化问题,  $RH_{i,j,0}(x)$  是通过上述常微分方程组数值解计算得到的, 要计算出  $RH_{i,j,0}(x)$  的导数非常困难, 因此必须采用不使用导数的直接搜索算法求解。本文采用一维搜索中的黄金分割法<sup>[8]</sup> (0.618 法) 求解上述最优化问题。0.618 法的基本思想是通过取试探点使包含极小点的区间(不确定区间)不断缩短, 当区间长度趋于零时, 区间上各点的函数值均接近极小值, 因此任意一点都可作为极小值的满足一定精度要求的近似。其计算步骤如下:

Step 1 置初始区间  $[a_1, b_1]$  及精度要求  $\varepsilon > 0$ , 计算试探点  $\lambda_1$  和  $\mu_1$ , 计算函数值  $J(\lambda_1)$  和  $J(\mu_1)$ :

$$\lambda_1 = a_1 + 0.382(b_1 - a_1), \mu_1 = a_1 + 0.618(b_1 - a_1)。$$

令  $k=1$ 。

Step 2 若  $b_k - a_k < \varepsilon$ , 则停止计算, 取  $x^* = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$ 。否则, 当  $J(\lambda_k) > J(\mu_k)$  时, 转 Step 3; 当  $J(\lambda_k) \leq J(\mu_k)$  时, 转 Step 4。

Step 3 置  $a_{k+1} = \lambda_k, b_{k+1} = b_k, \lambda_{k+1} = \mu_k$ ,

$$\mu_{k+1} = a_{k+1} + 0.618(b_{k+1} - a_{k+1})$$

计算函数值  $J(\mu_{k+1})$ , 转 Step 5。

Step 4 置  $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = \mu_k, \mu_{k+1} = \lambda_k$ ,

$$\lambda_{k+1} = a_{k+1} + 0.618(b_{k+1} - a_{k+1})$$

计算函数值  $J(\lambda_{k+1})$ , 转 Step 5。

Step 5 置  $k := k+1$ , 返回 Step 2。

## 2 正问题的数值计算

将正问题(DP)解耦得

$$\begin{cases} \sqrt{T} T'' = \frac{k_2}{k_3} A(x) \left[ p_{sat}(T(x)) - \sqrt{p_v^2(x_n) + 2 \int_x^{x_n} \frac{1}{k_1 A(s)} T^{3/2}(s) [k_3 T'(s) + C_1] ds} \right] \\ T(0) = T_L, T(x_n) = T_R \end{cases}$$

和

$$p_v(x) = \sqrt{p_v^2(x_n) + 2 \int_x^{x_n} \frac{1}{k_1 A(s)} T^{3/2}(s) [k_3 T'(s) + C_1] ds},$$

其中  $C_1 = m_v(0) - k_3 T'(0)$ 。

用有限差分法离散上述问题,得到以下差分方程:

$$\sqrt{T_i} \frac{T_i - 2T_{i-1} + T_{i-2}}{h^2} = \frac{k_2}{k_3} A(x_i) \left[ p_{sat}(T_i) - \sqrt{p_v^2(x_n) + 2 \sum_{j=i}^{N-1} \frac{1}{k_1 A(x_{j+1})} T_{j+1}^{3/2} \left[ k_3 \frac{T_{j+1} - T_j}{h} + C_1^* \right] h} \right],$$
$$i = 2, \dots, N-1$$

当  $i = N$  时,

$$\sqrt{T_N} \frac{T_N - 2T_{N-1} + T_{N-2}}{h^2} = \frac{k_2}{k_3} A(x_N) [p_{sat}(T_N) - p_v(x_n)]$$
$$p_{v,i} = \sqrt{p_{v,R}^2 + 2 \sum_{j=i}^{N-1} \frac{1}{k_1 A(x_{j+1})} T_{j+1}^{3/2} \left[ k_3 \frac{T_{j+1} - T_j}{h} + C_1^* \right] h}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

其中  $h = \frac{x_n}{N}, C_1^* = m_{v,0} - k_3 \frac{T_1 - T_0}{h}$ 。

已知  $T_0, T_N$ , 通过插值得到  $T_1, T_{N-1}$ , 这样通过以上差分方程可以计算  $T_{N-2}, \dots, T_2$ , 由此得到

$$p_{v,0} = \sqrt{p_{v,R}^2 + 2 \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{k_1 A(x_{j+1})} T_{j+1}^{3/2} \left[ k_3 \frac{T_{j+1} - T_j}{h} + C_1^* \right] \frac{x_n}{N}}$$
$$RH_{i,j,0}(x_n) = \frac{p_{v,0}}{p_{sat}(T_0)} = \frac{\sqrt{p_{v,R}^2 + 2 \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{k_1 A(x_{j+1})} T_{j+1}^{3/2} \left[ k_3 \frac{T_{j+1} - T_j}{h} + C_1^* \right] \frac{x_n}{N}}}{100 \exp \left( 18.956 - \frac{4030}{(T_0 - 273.15) + 235} \right)}$$

求解上述正问题得到微气候区(即人体皮肤与织物间的空气层)的  $p_{v,0}$  和  $RH_{i,j,0}$ 。一般地,它们不一定属于舒适状态下的指标值区间中。

3 算法分析

**定理** 假设正则化函数  $J(x)$  的极小值点唯一,即存在唯一的  $x_{reg} \in [0, X]$ , 使得  $J(x_{reg}) = \min_{x \in M} J(x)$ 。那么由黄金分割法(0.618 法)产生的迭代序列  $\{x_k\}$  收敛到函数的极小值点  $x_{reg}$ 。

**证明** 假设算法在第  $k$  步迭代出现  $J(\lambda_k) \leq J(\mu_k)$ , 经迭代得到的包含极小值点的区间为  $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, \mu_k] \subseteq [a_k, b_k]$ ; 若出现  $J(\lambda_k) > J(\mu_k)$ , 则经迭代得到的包含极小值点的区间为  $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [\lambda_k, b_k] \subseteq [a_k, b_k]$ , 这样下去, 就出现

$$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \dots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \dots$$

且  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ 。由区间套定理可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_{reg}$ 。定理证毕。

4 反问题的数值实现

在此,开展数值试验进行纺织品厚度设计,以检验上述计算方法的有效性。我们假定初始水蒸汽质量通量为  $m_v(0) = 3.3084 \times 10^{-5} \text{ kg/m}^2 \cdot \text{s}$ ; 织物内侧的温度为  $32^\circ\text{C}$  以保证微气候区的温度在舒适指标区间中,即  $T(0) = 305.16 \text{ K}$ 。另外,在模型中,  $k_1 = 0.00006, k_2 = 0.00007$ 。

4.1 材料结构与类型

羊毛、涤纶和聚丙烯纤维加工而成的纺织品材料的结构参数与类型参数见表 1。

除了以上参数之外,水蒸汽的蒸发热或凝结热取决于织物内部的潮湿程度,与材料类型无关,选择 3 种材料在潮湿区域的凝结热  $\lambda = 2260 \times 10^3 \text{ J/kg}$ 。

由于导热系数在温度和湿度的组合 ( $T \in [-10^\circ\text{C}, 10^\circ\text{C}], RH \in [30\%, 90\%]$ ) 下的微小变化,假定它是一个常数。

表 1 材料的结构参数与类型参数

物理量	符号	单位	羊毛	涤纶	聚丙烯纤维
纤维半径	$r$	m	$1.0 \times 10^{-5}$	$1.0 \times 10^{-5}$	$1.0 \times 10^{-5}$
孔隙率	$\epsilon$		0.915	0.88	0.87
孔的曲折系数	$\tau$		1.2	1.2	1.2
导热系数	$\kappa$	W/(m·K)	0.052	0.084	0.071

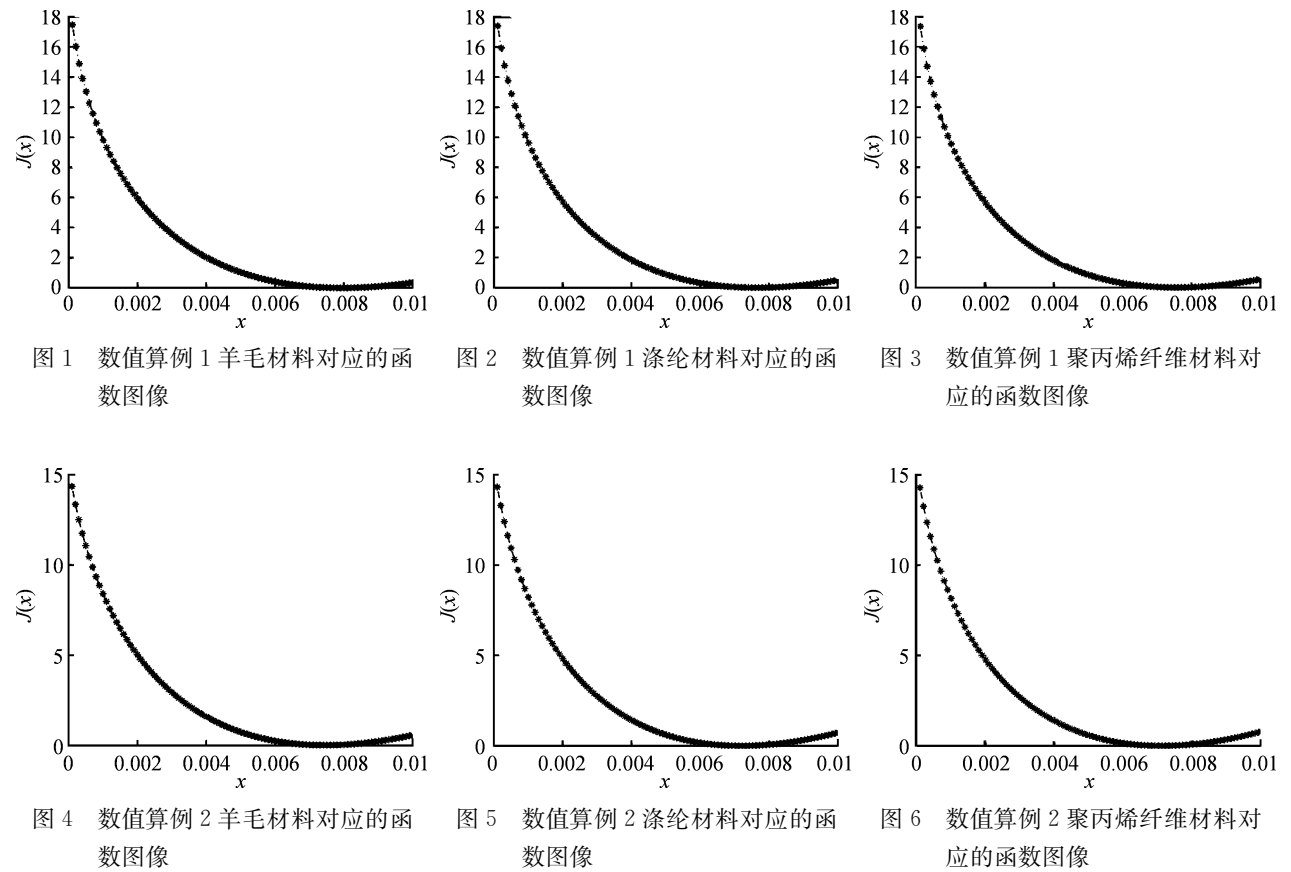
4.2 环境温度—湿度组合

选择杭州两种不同的低温环境条件做数值模拟,首先,将环境温湿度的组合区间 $[T_{\min},T_{\max}]$ 和 $[H_{\min},H_{\max}]$ 作等距剖分,将区间 $[T_{\min},T_{\max}]$ 和 $[H_{\min},H_{\max}]$ 分别 $k$ 等分和 $m$ 等分。模拟时,取 $k=10,m=10$ 。

- 数值算例 1
- 环境条件 1: $T_{\min}=-10^{\circ}\text{C},T_{\max}=0^{\circ}\text{C},H_{\min}=40\%,H_{\max}=90\%$ 。
- 数值算例 2
- 环境条件 2: $T_{\min}=0^{\circ}\text{C},T_{\max}=10^{\circ}\text{C},H_{\min}=30\%,H_{\max}=85\%$ 。

4.3 函数  $J(x)$  的极值点

通过  $J(x)$  的图像来研究不同材料和环境条件下的函数  $J(x)$  的性质。  
在数值算例 1 中以上 3 种不同材料所对应的函数  $J(x)$  的图像见图 1~图 3。  
在数值算例 2 中以上 3 种不同材料所对应的函数  $J(x)$  的图像见图 4~图 6。



从上面 6 个图可观察到,对于两种不同环境条件下的 3 种不同材料,函数  $J(x)$  的极值点唯一。这说明了纺织材料设计反问题的正则化解是唯一的。

4.4 纺织材料厚度的决定

利用第一节的算法,可分别计算出环境条件 1 和环境条件 2 下的羊毛、涤纶和聚丙烯纤维材料的厚度反演结果。分别见表 2~表 3。

表 2 算例 1 的数值结果				表 3 算例 2 的数值结果			
初始值/m	材料厚度/cm			初始值/m	材料厚度/cm		
	羊毛	涤纶	聚丙烯纤维		羊毛	涤纶	聚丙烯纤维
$a_1=0.000\ 2$				$a_1=0.000\ 2$			
$b_1=0.01$	0.795 1	0.764 5	0.755 7	$b_1=0.01$	0.745 5	0.717 0	0.709 0

5 注记与展望

根据以上算法的收敛性、数值模拟结果可得到如下结论:

- a)该厚度设计反问题的提法是合理的,能够有效地解决纺织材料设计问题,并为纺织材料设计实验提供理论支持与科学解释。
  - b)对于在函数极小化问题中采用的黄金分割法,其初始区间内应包含极小值点,故在选取初值之前必须先知道函数的性质,因为黄金分割法只适用于单峰函数。另外,在理论上证明了算法的收敛性,同时数值模拟试验也验证了算法的有效性和反问题提法的合理性。
  - c)需进一步研究反问题的条件适定性和算法的收敛率等问题,为设计新的数值算法奠定理论基础。
- 本文研究了单层织物材料的厚度设计问题,对于多层织物材料的厚度设计问题将在另文给出研究结果。对于热湿传递动态模型,同样可以研究基于纺织材料舒适性的厚度设计问题,结果也将在另文中给出。

参考文献:

[1] Xu D H, Cheng J X, Zhou X H. A model of heat and moisture transfer through the parallel pore textiles[C]//Li Y, Qiu Y P, Luo X N, et al. Proceeding of TBIS 2010 International Symposium, Shanghai: 1151-1156.

[2] 黄建华. 服装舒适性[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[3] Fan J T, Luo Z X, Li Y. Heat and moisture transfer with sorption and condensation in porous clothing assemblies and numerical simulation[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2000, 43: 2989-3000.

[4] 李凤志, 李 毅, 曹业玲. 求解织物热湿耦合方程的控制体: 时域递归展开算法[J]. 南京航空航天大学学报, 2009, 41 (3): 319-323.

[5] Wu H J, Fan J T. Study of heat and moisture transfer within multi-layer clothing assemblies consisting of different types of battings[J]. International Journal of Thermal Sciences, 2008, 47(5): 641-647.

[6] 王彦飞. 反演问题的计算方法及其应用[M]. 北京: 高等教育出版社, 2007.

[7] Hooke R, Jeeves T A. “Direct search” solution of numerical and statistical problems[J]. J Assoc Comput, 1961, 8: 212-229.

[8] 陈宝林. 最优化理论与算法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.

[9] Torczon V. On the convergence of pattern search algorithms[J]. SIAMJ Optim, 1997, 7(1): 1-25.

[10] 蔡志杰, 陈德强. 非线性优化的直接搜索算法及收敛性证明[J]. 复旦学报: 自然科学版, 2006, 45(3): 396-403.

An Inverse Problem of Thickness Design for Textile Material

XU Ding-hua, CHENG Jian-xin

(School of Sciences, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

**Abstract:** Based on the model of steady-state heat and moisture transfer through textiles, the authors propose an inverse problem of thickness design for textile material. According to the idea of regularization method, the inverse problem can be formulated by a function minimization problem. Combining the finite difference algorithm for ordinary differential equations with search method of one-dimensional minimization problem, the authors derive an iteration algorithm of regularized solution for the inverse problem. Convergence of the algorithm is proved theoretically. Numerical simulation is also achieved in order to verify the validity of methods.

**Key words:** textiles; heat and moisture transfer; inverse problem; thickness design; regularization method; numerical solution

(责任编辑: 马春晓)