浙江理工大学学报，2022，47(2)：256-261
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
DOI:10.3969/j.issn.1673-3851(n).2022.02.016

三类含 r-Stirling 数的无穷级数

马欠欠，王伟平
（浙江理工大学理学院，杭州 310018）

摘　要：含 Stirling 数、调和数等特殊组合序列的无穷级数在组合学、数论、算法分析等领域具有重要的应用。利用第一类 r-Stirling 数的生成函数、特殊函数积分以及广义多重 zeta 值建立三类含 r-Stirling 数的含参数无穷级数的表达式，并由此得到很多含第一类 Stirling 数、调和数及超调和数的级数的值。结果表明：文献中很多相关级数的结论都是这三个一般表达式的特例。在此基础上，进一步利用 r-Stirling 数的递推关系建立一个广义多重 zeta 值与经典多重 zeta 值的关系式，并给出一些特例。

关键词：生成函数；r-Stirling 数；调和数；多重 zeta 值；无穷级数
中图分类号：O157.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-3851 (2022) 03-0256-06

Three types of Infinite series involving r-Stirling numbers

MA Qianqian, WANG Weiping
(School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: Infinite series involving special combinatorial sequences, such as the Stirling numbers and harmonic numbers, have important applications in combinatorics, number theory, algorithm analysis and some other fields. Using the generating function of the r-Stirling numbers of the first kind, integrals of special functions and generalized multiple zeta values, we establish expressions of three types of parametric infinite series involving the r-Stirling numbers, and on this basis, we obtain the evaluations of some series involving the Stirling numbers of the first kind, harmonic numbers and hyperharmonic numbers. The results show that many series in the literature are particular cases of these three general expressions. Moreover, using the recurrence relation of the r-Stirling numbers, we further establish a relation between the generalized multiple zeta values and the classical multiple zeta values, and provid some particular cases.

Key words: generating functions; r-Stirling numbers; harmonic numbers; multiple zeta values; infinite series

0　引　言

Stirling 数、调和数是组合学与数论中重要的序列，含 Stirling 数、调和数及其他相关组合序列的无穷级数不仅在算法分析、特殊函数表示中经常出现，在代数几何、纽结理论、量子场论等领域中也有广泛的应用。

超调和数 $h_n^{(r)}$ 的定义为：

$$h_n^{(0)}=\frac{1}{n},h_n^{(r+1)}=\sum_{i=1}^{n}h_i^{(r)},r\in\mathbb{N}_0:=\{0,1,2,3,\cdots\}。$$

特别地，$h_n^{(1)}=H_n$，为经典的调和数；当 $r<0$ 或 $n\leqslant 0$ 时，定义 $h_n^{(r)}=0$。超调和数可用二项式系数与经典调和数表示：

收稿日期：2021—06—29　　网络出版日期：2021—10—11
作者简介：马欠欠（1992—　），女，河南周口人，硕士研究生，主要从事组合数学方面的研究。
通信作者：王伟平，E-mail：wpingwang@zstu.edu.cn

$$h_n^{(r)}=\binom{n+r-1}{r-1}(H_{n+r-1}-H_{r-1}),$$

其生成函数为：

$$\sum_{n=0}^{\infty}h_n^{(r)}t^n=-\frac{\ln(1-t)}{(1-t)^r}\tag{1}$$

参见 Benjamin 等[1]、Conway 等[2]以及 Mezö 等[3]的研究。Xu[4]进一步引入了广义超调和数 $h_n^{(r)}(k)$，$h_n^{(r)}(k)$ 可以表示为：

$$h_n^{(r)}(k)=\sum_{n\geqslant n_1\geqslant\cdots\geqslant n_{r-1}\geqslant n_r>\cdots>n_{r+k-1}\geqslant 1}\frac{1}{n_r n_{r+1}\cdots n_{r+k-1}},r\in\mathbb{N}:=\{1,2,3,\cdots\}\tag{2}$$

特别地，当 $k=1$ 时，$h_n^{(r)}(1)=h_n^{(r)}$；当 $n<k$ 时，定义 $h_n^{(r)}(k)=0$。

Broder[5]在经典的第一类 Stirling 数 $\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}$ 的基础上引入了第一类 r-Stirling 数 $\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_r$，其指数生成函数为：

$$\sum_{n=k}^{\infty}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_r\frac{t^n}{n!}=\frac{1}{(1-t)^r}\frac{(-\ln(1-t))^k}{k!}\tag{3}$$

并且满足如下关系：$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_0=\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_1=\begin{bmatrix}n+1\\k+1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix}_r=\langle r\rangle_n$，$\begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix}_r=n!\ h_n^{(r)}$ 和

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_r=(n+r-1)\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}_r+\begin{bmatrix}n-1\\k-1\end{bmatrix}_r,$$

其中 $\langle x\rangle_n$ 为升阶乘多项式，定义为 $\langle x\rangle_0=1$，$\langle x\rangle_n=x(x+1)\cdots(x+n-1)$，$n\in\mathbb{N}$。

设 $s_i\in\mathbb{N}$ 且 $s_1>1$，对于任意多重指标 $\boldsymbol{s}=(s_1,s_2,\cdots,s_k)$，定义多重 zeta 值 $\zeta(\boldsymbol{s})$ 与多重 zeta 星值 $\zeta^*(\boldsymbol{s})$ 为：

$$\zeta(\boldsymbol{s})=\zeta(s_1,s_2,\cdots,s_k)=\sum_{n_1>n_2>\cdots>n_k\geqslant 1}\frac{1}{n_1^{s_1}n_2^{s_2}\cdots n_k^{s_k}},$$

$$\zeta^*(\boldsymbol{s})=\zeta^*(s_1,s_2,\cdots,s_k)=\sum_{n_1\geqslant n_2\geqslant\cdots\geqslant n_k\geqslant 1}\frac{1}{n_1^{s_1}n_2^{s_2}\cdots n_k^{s_k}},$$

这里称 $s_1+s_2+\cdots+s_k$ 为该多重 zeta(星)值的权。为方便起见，若一个子串在指标中重复出现 i 次，则记为 $\{\cdots\}_i$，例如，$\zeta^*(4,2,\{1\}_3)=\zeta^*(4,2,1,1,1)$。多重 zeta(星)值满足很多漂亮的恒等式，例如，如下和式及对偶关系成立：

$$\sum_{s_1+\cdots+s_k=n}\zeta(s_1,s_2,\cdots,s_k)=\zeta(n),$$

$$\zeta(m_1+2,\{1\}_{n_1},\cdots,m_p+2,\{1\}_{n_p})=\zeta(n_p+2,\{1\}_{m_p},\cdots,n_1+2,\{1\}_{m_1}),$$

参见 Borwein 等[6]的研究。多重 zeta(星)值的部分和称为多重调和(星)和，分别记为 $\zeta_n(\boldsymbol{s})$ 及 $\zeta_n^*(\boldsymbol{s})$。2018 年，Xu[7]定义了如下的广义多重调和和：

$$\zeta_n(s_1,\cdots,s_m;s_{m+1},\cdots,s_{m+k})=\sum_{n\geqslant n_1\geqslant\cdots\geqslant n_{m-1}\geqslant n_m>n_{m+1}>\cdots>n_{m+k}\geqslant 1}\frac{1}{n_1^{s_1}\cdots n_{m+k}^{s_{m+k}}}\tag{4}$$

其中 $s_i\in\mathbb{N}_0$。显然，

$$\zeta_n(\{0\}_{r-1},1;\{1\}_{k-1})=h_n^{(r)}(k),$$

$$\zeta_n(\varnothing;s_1,\cdots,s_k)=\zeta_n(s_1,\cdots,s_k),$$

$$\zeta_n(s_1,\cdots,s_m;\varnothing)=\zeta_n^*(s_1,\cdots,s_m),$$

其中 $s_i\in\mathbb{N}_0$。当 $s_1>1$ 时，可由广义多重调和和进一步定义广义多重 zeta 值：

$$\zeta(s_1,\cdots,s_m;s_{m+1},\cdots,s_{m+k})=\lim_{n\to\infty}\zeta_n(s_1,\cdots,s_m;s_{m+1},\cdots,s_{m+k})$$

第一类 Stirling 数与多重调和和之间满足密切关系：

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}=(n-1)!\ \zeta_{n-1}(\{1\}_{k-1})\tag{5}$$

由此可以建立如下无穷级数表达式：

$$\sum_{n=k}^{\infty}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{1}{n!n^m}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta_{n-1}(\{1\}_{k-1})}{n^{m+1}}=\zeta(m+1,\{1\}_{k-1})\tag{6}$$

参见 Adamchik[8]及 Xu 等[9]的研究。最近，Xu[10]、Wang 等[11]通过特殊函数积分与生成函数方法，利用多重 zeta 值建立了更多有关第一类 Stirling 数的级数表达式。

本文主要研究含第一类 r-Stirling 数的级数。首先，通过特殊函数积分、生成函数、广义多重 zeta 值建立三个含第一类 r-Stirling 数的无穷级数的表达式；之后，通过参数特殊化得到一些更具体的含经典的第一类 Stirling 数、调和数、超调和数的级数的表达式，并建立一类广义多重 zeta 值与经典的多重 zeta 值之间的关系式。

1　两个含 r-Stirling 数的无穷级数

定理 1　当 $k,r\in\mathbb{N}_0$ 时，有

$$\sum_{n=k}^{\infty}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_r\frac{1}{(n+r+1)!}=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{h_n^{(r)}(k)}{(n+1)(n+2)\cdots(n+r+1)}=\frac{1}{r!}\tag{7}$$

证明　首先，利用积分

$$\frac{1}{r!}\int_0^1 t^n(1-t)^r\mathrm{d}t=\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+r+1)},\int_0^1(-\ln(1-t))^k\mathrm{d}t=k!,$$

并结合 r-Stirling 数的生成函数(3)，可以得到：

$$\sum_{n=k}^{\infty}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_r\frac{1}{(n+r+1)!}=\frac{1}{r!}\sum_{n=k}^{\infty}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_r\frac{1}{n!}\int_0^1 t^n(1-t)^r\mathrm{d}t=\frac{1}{r!k!}\int_0^1(-\ln(1-t))^k\mathrm{d}t=\frac{1}{r!},$$

即式(7)左端第一个级数。再次利用 r-Stirling 数的生成函数(3)，可以得到：

$$\sum_{n=k}^{\infty}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{r+1}\frac{t^n}{n!}=\frac{(-\ln(1-t))^k}{k!(1-t)^{r+1}}=\sum_{i=k}^{\infty}\begin{bmatrix}i\\k\end{bmatrix}_r\frac{t^i}{i!}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}t^j=\sum_{n=k}^{\infty}\sum_{i=k}^{n}\begin{bmatrix}i\\k\end{bmatrix}_r\frac{t^n}{i!},$$

比较上式左右两边 t^n 的系数，可得：

$$\frac{1}{n!}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{r+1}=\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i!}\begin{bmatrix}i\\k\end{bmatrix}_r\tag{8}$$

对式(8)进行反复迭代并应用式(5)得：

$$\frac{1}{n!}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_r=\sum_{i_1=k}^{n}\sum_{i_2=k}^{i_1}\cdots\sum_{i_r=k}^{i_{r-1}}\frac{1}{i_r!}\begin{bmatrix}i_r\\k\end{bmatrix}=\sum_{i_1=k}^{n}\sum_{i_2=k}^{i_1}\cdots\sum_{i_r=k}^{i_{r-1}}\frac{\zeta_{i_r-1}(\{1\}_{k-1})}{i_r}=$$

$$\sum_{n\geqslant i_1\geqslant\cdots\geqslant i_{r-1}\geqslant i_r>i_{r+1}>\cdots>i_{r+k-1}\geqslant1}\frac{1}{i_ri_{r+1}\cdots i_{r+k-1}}=\zeta_n(\{0\}_{r-1},1;\{1\}_{k-1})。$$

可知，当 $k,r\in\mathbb{N}$ 时，有

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_r=n!\zeta_n(\{0\}_{r-1},1;\{1\}_{k-1})=n!h_n^{(r)}(k)\tag{9}$$

从而可得式(7)中第二个级数，由此完成证明。

例 1　在定理 1 中令 $r=1$，可以得到：

$$\sum_{n=k}^{\infty}\begin{bmatrix}n+1\\k+1\end{bmatrix}\frac{1}{(n+2)!}=1\tag{10}$$

利用第一类 Stirling 数与调和数的关系：

$$\begin{bmatrix}n+1\\2\end{bmatrix}=n!H_n,\begin{bmatrix}n+1\\3\end{bmatrix}=\frac{n!}{2}(H_n^2-H_n^{(2)}),$$

$$\begin{bmatrix}n+1\\4\end{bmatrix}=\frac{n!}{6}(H_n^3-3H_nH_n^{(2)}+2H_n^{(3)}),$$

并结合式(10)可进一步得到：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{(n+1)(n+2)}=1,\sum_{n=2}^{\infty}\frac{H_n^2-H_n^{(2)}}{(n+1)(n+2)}=2,$$
$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{H_n^3-3H_nH_n^{(2)}+2H_n^{(3)}}{(n+1)(n+2)}=6。$$

此外，当 $k=1$ 时，由 $\begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix}_r=n!h_n^{(r)}$ 可得：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_n^{(r)}}{(n+1)(n+2)\cdots(n+r+1)}=\frac{1}{r!} \tag{11}$$

为 Dil 与 Boyadzhiev[12]文中的命题 5。

定理 2　当 $k\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{N}_0$ 时，有

$$\sum_{n=k}^{\infty}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_r\frac{1}{n(n+r)!}=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{h_n^{(r)}(k)}{n(n+1)\cdots(n+r)}=\frac{\zeta(k+1)}{r!} \tag{12}$$

证明　同定理 1 的证明方法相似，利用积分

$$\int_0^1\frac{\ln^k(1-t)}{t}\mathrm{d}t=(-1)^k k!\zeta(k+1)$$

以及 r-Stirling 数的生成函数(3)，可以得到：

$$\sum_{n=k}^{\infty}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_r\frac{1}{n(n+r)!}=\frac{1}{r!}\sum_{n=k}^{\infty}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_r\frac{1}{n!}\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^r\mathrm{d}t=\frac{1}{r!k!}\int_0^1\frac{(-\ln(1-t))^k}{t}\mathrm{d}t,$$

再结合式(9)即可得到结果。

例 2　在定理 2 中分别令 $r=0$ 和 $r=1$，可以得到：

$$\sum_{n=k}^{\infty}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{1}{n\cdot n!}=\zeta(k+1) \tag{13}$$

$$\sum_{n=k}^{\infty}\begin{bmatrix}n+1\\k+1\end{bmatrix}\frac{1}{n(n+1)!}=\zeta(k+1) \tag{14}$$

在式(13)中令 $k=2,3,4$ 可进一步得到：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{(n+1)^2}=\zeta(3),\sum_{n=2}^{\infty}\frac{H_n^2-H_n^{(2)}}{(n+1)^2}=\frac{\pi^4}{45},\sum_{n=3}^{\infty}\frac{H_n^3-3H_nH_n^{(2)}+2H_n^{(3)}}{(n+1)^2}=6\zeta(5)。$$

在式(14)中令 $k=1,2,3$ 可进一步得到：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n(n+1)}=\frac{\pi^2}{6},\sum_{n=2}^{\infty}\frac{H_n^2-H_n^{(2)}}{n(n+1)}=2\zeta(3),\sum_{n=3}^{\infty}\frac{H_n^3-3H_nH_n^{(2)}+2H_n^{(3)}}{n(n+1)}=\frac{\pi^4}{15}。$$

此外，当 $k=1$ 时，可以得到：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_n^{(r)}}{n(n+1)\cdots(n+r)}=\frac{\pi^2}{6r!} \tag{15}$$

式(13)出现在 Adamchik[8]、Choi 等[13]、Shen[14]以及 Wang 等[11]的研究中，式(15)为文献[12]中的命题 6。

Beta 函数 $B(x,y)$ 的定义为：

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t,$$

其中 $\Re(x)>0, \Re(y)>0$。根据关系

$$B(r+1,n+1)=\frac{\Gamma(r+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(r+n+2)}=\frac{r!\ n!}{(r+n+1)!}=\frac{r!}{(n+1)(n+2)\cdots(n+r+1)},$$

可以将定理 1 和定理 2 改写为：

$$\sum_{n=k}^{\infty}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_r\frac{1}{n!}B(r+1,n+1)=\sum_{n=k}^{\infty}h_n^{(r)}(k)B(r+1,n+1)=1,$$

$$\sum_{n=k}^{\infty}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_r\frac{1}{n!}B(r+1,n)=\sum_{n=k}^{\infty}h_n^{(r)}(k)B(r+1,n)=\zeta(k+1)。$$

2 含 r-Stirling 数的无穷级数与广义多重 zeta 值

定理 3 当 $k,r\in\mathbb{N},m\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$时,有

$$\sigma(r,k,m)=\sum_{n=k}^{\infty}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_r\frac{1}{n!n^m}=\zeta(m,\{0\}_{r-1},1;\{1\}_{k-1})\tag{16}$$

证明 将式(9)代入到$\sigma(r,k,m)$中,可以得到:

$$\sigma(r,k,m)=\sum_{n=k}^{\infty}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_r\frac{1}{n!\ n^m}=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\zeta_n(\{0\}_{r-1},1;\{1\}_{k-1})}{n^m}=\zeta(m,\{0\}_{r-1},1;\{1\}_{k-1}),$$

由此完成定理证明。

例 3 当 $k=1,m\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$时,由 $\begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix}_r=n!h_n^{(r)}$ 可知

$$\sigma(r,1,m)=\sum_{n=1}^{\infty}\begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix}_r\frac{1}{n!n^m}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_n^{(r)}}{n^m}=\zeta(m,\{0\}_{r-1},1;\varnothing)\tag{17}$$

此时该 r-Stirling 数的无穷级数已经退化为超调和数的线性 Euler 和。Dil 等[12]用 zeta 值、经典的线性 Euler 和及第一类 Stirling 数等给出了$\sigma(r,1,m)$的表达式:

$$\sigma(r,1,m)=\sum_{k=1}^{r}\begin{bmatrix}r\\k\end{bmatrix}\frac{1}{(r-1)!}\{S_{1,m-k+1}-H_{r-1}\zeta(m-k+1)+\sum_{j=1}^{r-1}\mu(m-k+1,j)\},$$

其中:

$$S_{1,m}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^m},\mu(m,j)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^m(n+j)}。$$

式(17)利用广义多重 zeta 值给出了超调和数的线性 Euler 和的更简洁的表达式。

由定理 3 可以建立推论 1。

推论 1 当 $k\in\mathbb{N},m\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$时,广义多重 zeta 值与多重 zeta 值之间满足关系:

$$\zeta(m,1;\{1\}_{k-1})=\zeta(m+1,\{1\}_{k-1})+\zeta(m,\{1\}_k)\tag{18}$$

证明 当 $r=1$ 时,一方面,由定理 3 可得:

$$\sigma(1,k,m)=\sum_{n=k}^{\infty}\begin{bmatrix}n+1\\k+1\end{bmatrix}\frac{1}{n!n^m}=\zeta(m,1;\{1\}_{k-1})\tag{19}$$

另一方面,由第一类 Stirling 数的递推关系及式(6)可得:

$$\sigma(1,k,m)=\sum_{n=k}^{\infty}\begin{bmatrix}n+1\\k+1\end{bmatrix}\frac{1}{n!n^m}=\sum_{n=k}^{\infty}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\frac{1}{n!n^m}+\sum_{n=k}^{\infty}\begin{bmatrix}n\\k+1\end{bmatrix}\frac{1}{n!n^{m-1}}=\zeta(m+1,\{1\}_{k-1})+\zeta(m,\{1\}_k),$$

两式相等,即可得到结果。

Wang 等[11]建立了式(19)左端含第一类 Stirling 数的级数的积分表达式。根据 Wang 等[11]的工作可知,在式(19)中进一步令 $k=1,2,3$,可得到关于经典 Euler 和的 Euler 定理、Borwein-Borwein-Girgensohn 定理、Flajolet-Salvy 定理,也可参见 Flajolet 与 Salvy[15]。

例 4 根据文献[10]中等式(2.1)和等式(2.27)可以得到 $\zeta(m+1,\{1\}_k)$的递推关系:

$$\zeta(m+1,\{1\}_k)=\binom{m+k}{m}\frac{\zeta(m+k+1)}{k+1}-\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{m}\binom{m+k-i-j-1}{k-j}\zeta(m+k-i-j)\zeta(i+1,\{1\}_j),$$

其中 $m\in\mathbb{N}\backslash\{1\},k\in\mathbb{N}_0$。由此再结合推论 1 就可以计算广义多重 zeta 值 $\zeta(m,1;\{1\}_{k-1})$,例如:

$$\zeta(3,1;1)=-\frac{\pi^2}{3}\zeta(3)+4\zeta(5),$$

$$\zeta(3,1;1,1)=\frac{\pi^6}{432}-\frac{3}{2}\zeta^2(3),$$

$$\zeta(3,1;1,1,1)=-\frac{\pi^4}{40}\zeta(3)-\frac{\pi^2}{2}\zeta(5)+8\zeta(7)。$$

此外，在式(18)中令 $k=1, m\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$，可得如下二重 zeta 星值与 zeta 值、二重 zeta 值之间的关系式：

$$\zeta^{*}(m,1)=\zeta(m+1)+\zeta(m,1)。$$

3 结　论

本文利用生成函数、特殊函数积分以及广义多重 zeta 值建立了 3 个一般的含 r-Stirling 数的无穷级数的表达式，可以发现文献[8,12]中已有的一些含第一类 Stirling 数、超调和数的无穷级数及 Euler 和的结果都是本文所得表达式的特例。后续可以在此基础上进一步研究更多的含 r-Stirling 数与超调和数的无穷级数。

参考文献：

[1] Benjamin A T, Gaebler D, Gaebler R. A combinatorial approach to hyperharmonic numbers[J]. Integers, 2003, 3:1-9.

[2] Conway J H, Guy R K. The Book of Numbers[M]. New York, NY: Springer-Verlag New York, 1996:258.

[3] Mezö I, Dil A. Hyperharmonic series involving Hurwitz zeta function[J]. Journal of Number Theory, 2010, 130(2):360-369.

[4] Xu C. Euler sums of generalized hyperharmonic numbers[J]. Korean Mathematical Society, 2018, 55(5): 1207-1220.

[5] Broder A Z. The r-Stirling numbers[J]. Discrete Mathematics, 1984, 49(3):241-259.

[6] Borwein J M, Bradley D M, Broadhurst D J. Evaluations of k-fold Euler/Zagier sums: a compendium of results for arbitrary k[J]. Electronic Journal of Combinatorics, 1997, 4(2):R5.

[7] Xu C. Computation and theory of Euler sums of generalized hyperharmonic numbers[J]. Comptes Rendus Mathematique, 2018, 356(3):243-252.

[8] Adamchik V. On Stirling numbers and Euler sums[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1997, 79(1): 119-130.

[9] Xu C, Yan Y H, Shi Z J. Euler sums and integrals of polylogarithm functions[J]. Journal of Number Theory, 2016, 165: 84-108.

[10] Xu C. Multiple zeta values and Euler sums[J]. Journal of Number Theory, 2017, 177:443-478.

[11] Wang W P, Lyu Y H. Euler sums and Stirling sums[J]. Journal of Number Theory, 2018, 185:160-193.

[12] Dil A, Boyadzhiev K N. Euler sums of hyperharmonic numbers[J]. Journal of Number Theory, 2015, 147:490-498.

[13] Choi J, Srivastava H M. Explicit evaluation of Euler and related sums[J]. The Ramanujan Journal, 2005, 10(1):51-70.

[14] Shen L C. Remarks on some integrals and series involving the Stirling numbers and $\zeta(n)$[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1995, 347(4):1391-1399.

[15] Flajolet P, Salvy B. Euler sums and contour integral representations[J]. Experimental Mathematics, 1998, 7(1):15-35.

（责任编辑：康　锋）