



石墨烯增强功能梯度多孔板条的弯曲响应

顾佳佳, 沈璐璐, 刘兴喜, 杨 博

(浙江理工大学建筑工程学院, 杭州 310018)

摘 要: 为了研究石墨烯增强功能梯度多孔板条的弯曲响应, 基于三维弹性理论, 利用修正后的 Halpin-Tsai 微观力学模型建立了材料的孔隙率和杨氏模量之间的关系, 并获得了石墨烯增强多孔复合材料的有效材料性能。采用推广后的 Mian 和 Spencer 板理论, 得到了均布荷载作用下石墨烯增强功能梯度复合材料多孔板条弯曲问题的解析解。通过数值算例验证了该板理论的有效性, 并讨论了石墨烯纳米片 (Graphene platelets, GPL) 的几何尺寸和含量、孔隙分布模式、孔隙率及边界条件等因素对复合材料板条弹性响应的影响。结果表明: GPL 几何尺寸对板的弯曲响应影响不明显; 当 GPL 均匀分布时, GPL 含量对板的正应力影响可以忽略不计; 孔隙率和孔隙分布模式对板的弯曲响应有显著地影响, 当孔隙和石墨烯呈非均匀对称分布时, 可以有效地提高结构的刚度。获得的解析解答可为石墨烯增强功能梯度多孔板条的优化设计提供理论指导, 同时可以作为基准解用于评价该问题的各种数值解答的有效性。

关键词: 石墨烯纳米片; 功能梯度多孔板条; 弯曲响应; 解析解

中图分类号: O343.1

文献标志码: A

文章编号: 1673-3851 (2021) 07-0551-08

The bending behavior of functionally graded graphene platelet-reinforced composite porous strips

GU Jiajia, SHEN Lulu, LIU Xingxi, YANG Bo

(School of Civil Engineering and Architecture, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: To study the bending behavior of functionally graded graphene platelet (GPL)-reinforced composite porous strips subjected to uniform loads, based on the theory of three-dimensional elasticity, we adopted the modified Halpin-Tsai micro-mechanical model to establish the relationship between the porosity and Young's modulus of material and obtain the effective properties of the GPL-reinforced composite porous material. Finally, the analytical solution of the bending of functionally graded GPL-reinforced composite porous strips under uniform loads was derived by using the generalized Mian and Spencer method. The effectiveness of this method was verified through a numerical example, and the effects of GPL's geometric size, content, pore distribution mode, porosity and boundary conditions, etc. on the elastic response of composite porous strips were investigated. The results indicated that the geometric size of GPL had no obvious effect on the bending response of strips. When GPL was uniformly distributed, the effect of the content of GPL on the normal stress of strips can be ignored. The porosity and pore distribution mode had a significant effect on the bending response of strips. When the pores and graphene were distributed non-uniformly but symmetrically, the stiffness of the structure can be

收稿日期: 2020-12-02 网络出版日期: 2021-02-04

基金项目: 国家自然科学基金项目 (11872336); 浙江省自然科学基金项目 (LY18A020009); 机械结构强度与振动国家重点实验室开放课题项目 (SV2020-KF-13)

作者简介: 顾佳佳 (1995—), 女, 浙江诸暨人, 硕士研究生, 主要从事复合材料力学与结构方面的研究。

通信作者: 杨 博, E-mail: youngbo@zstu.edu.cn

effectively enhanced. The analytical solution obtained in this paper can provide a theoretical guidance for the optimal design of GPL-reinforced functionally graded porous strips, and taken as a benchmark solution to evaluate the effectiveness of various numerical solutions to this problem.

Key words: graphene platelet (GPL); functionally graded composite porous strips; bending; analytical solution

0 引 言

功能梯度材料(Functionally graded materials, FGM)是由两种或多种材料复合而成的一种新型非均匀复合材料,其材料成分和空间组分可以被人为设计^[1],从而消除明显的材料界面,以达到优化材料热学和力学性能,因而这种材料备受学术界和工业界的关注。为了更好地满足材料所需的结构性能,将多孔轻质结构和功能梯度复合材料结合已成为 FGM 的最新发展趋势之一^[2]。目前对 FGM 多孔结构的研究主要从制备工艺、材料性能以及力学行为等三方面入手。例如, Hassani 等^[3]成功制备了具有不同孔径和密度的泡沫铝,并对其力学性能进行了测试,结果表明梯度泡沫铝比均匀泡沫铝具有更高的能量吸收能力。孙昊栋等^[4]基于经典梁理论,研究了孔隙分布模式、孔隙率系数、热膨胀系数及边界条件对功能梯度多孔梁非线性力学行为的影响,数值结果表明材料的梯度多孔性对梁的热屈曲行为有着非常复杂的影响。王佳优等^[5]采用遗传算法,对多孔金属相变温控导热增强的梯度优化模型进行求解,证实了梯度设计方法能够大幅提高多孔金属介质导热的相变温控性能。Chen 等^[2]基于 Timoshenko 梁理论,分析了 4 种边界条件下功能梯度多孔梁的屈曲和弯曲问题,并比较了不同孔隙率分布模式对功能梯度多孔结构性能的影响。

孔隙的存在会不可避免地削弱结构的强度和刚度,从而导致结构的承载能力降低^[6],为此人们使用各种碳质纳米颗粒来增强多孔结构。石墨烯及其衍生物是复合材料的优良增强纳米填料。与传统的碳纤维材料相比,石墨烯纳米片(Graphene platelets, GPL)具有优越的热学、电学和力学性能。根据已有研究^[7],将少量石墨烯纳米片加入到多孔功能梯度材料中,可以显著提高功能梯度复合材料的强度和刚度而不增加其重量,这使得复合材料具有轻质高强的优良性能。为了展开对石墨烯增强复合材料力学性能的研究, Kitipornchai 等^[8]基于 Timoshenko 梁理论,采用 Ritz 法获得了多孔石墨烯复合材料梁的固有频率和临界屈曲载荷,并在两种孔隙分布模式下,比较了不同金属基质和孔隙率系数对

纳米复合梁自由振动和弹性屈曲的影响。Yang 等^[9]采用一阶剪切变形理论和 Chebyshev-Ritz 法,得到了不同孔隙分布下对应 GPL 分散模式的固有频率。Li 等^[10]基于一阶和三阶剪切变形理论,对石墨烯增强功能梯度多孔板的屈曲、自由振动和线弹性弯曲行为进行了等几何分析。Sahmani 等^[11]基于非局部应变梯度弹性理论,研究了石墨烯增强功能梯度多孔梁在均布载荷和轴向压缩载荷下的非线性弯曲。

然而,目前针对孔隙存在对石墨烯增强功能梯度复合材料板力学性能影响的解析研究仍不充分。本文基于弹性理论,利用推广后的 Mian 和 Spencer 板理论^[12]对石墨烯增强功能梯度多孔板条的弯曲性能进行了解析研究。在板表面受均布荷载作用的情况下,考虑了 4 种孔隙分布模式。通过数值算例分析,讨论了 GPL 几何尺寸和含量、孔隙分布模式、孔隙率及边界条件等因素对 GPL 增强功能梯度多孔板条弯曲性能的影响。本研究获得的解析解答可为石墨烯增强功能梯度多孔板条的优化设计提供理论指导,同时可以作为基准解用于评价该问题的各种数值解答的有效性。

1 问题描述

为了研究孔隙对 GPL 增强复合材料板条弯曲响应的影响,本文考虑了 4 种孔隙分布模式下的有效材料参数,沿板厚度方向孔隙分布示意图如图 1 所示。其中在非均匀分布模式,即抛物线分布 I、抛物线分布 II 和线性分布中,孔隙尺寸和质量密度沿板厚度方向呈梯度连续变化,杨氏模量(质量密度)的最大值 E_{\max} 和最小值 E_{\min} 分别对应最小孔隙率和最大孔隙率。

GPL 增强功能梯度多孔材料的有效杨氏模量 $E(z)$ 、质量密度 $\rho(z)$ 和泊松比 $\nu(z)$ 可表示为:

$$\begin{aligned} \begin{cases} E(z) = E^* [1 - e_0 \lambda(z)], \\ \rho(z) = \rho^* [1 - e_m \lambda(z)] \end{cases} \quad (1) \\ \nu(z) = 0.342 \nu^* \left[\frac{\rho(z)}{\rho^*} \right]^2 + (0.526 \nu^* - 0.221) \\ \frac{\rho(z)}{\rho^*} + 0.132 \nu^* + 0.221, \end{aligned}$$

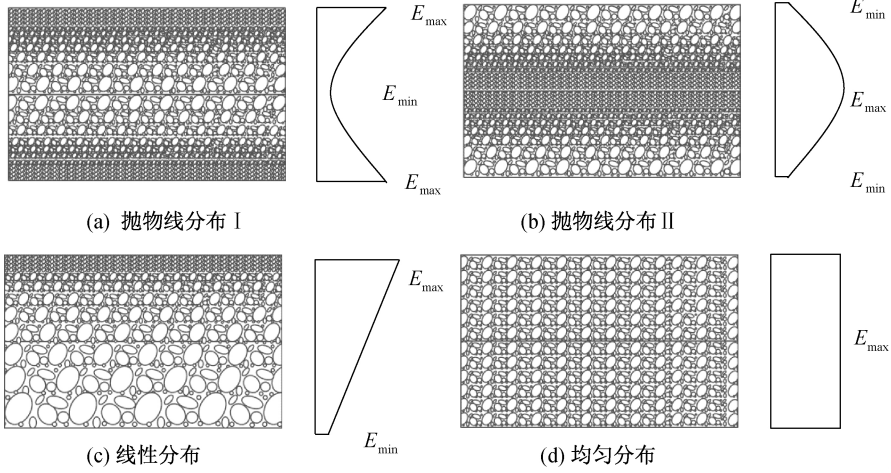


图 1 沿板厚度方向孔隙分布示意

其中: E^* 、 ρ^* 及 v^* 分别为无孔隙状态下 GPL 增强功能梯度材料的有效杨氏模量、质量密度和泊松比; $e_0 = 1 - E_{\min}/E_{\max}$ ($0 < e_0 < 1$) 为孔隙率系数; e_m ($0 < e_m < 1$) 为质量密度系数^[6]。

对于不同的孔隙分布模式, 函数 $\lambda(z)$ 可表示为:

$$\lambda(z) = \begin{cases} \cos(z\pi/h), \\ 1 - \cos(z\pi/h), \\ \cos(z\pi/2h + \pi/4), \\ \lambda_0 \end{cases} \quad (2)$$

式(2)中: 第一个分式表示抛物线分布 I 模式, 第二个分式表示抛物线分布 II 模式, 第三个分式表示线性分布, 第四个分式表示线性分布^[10]。将式(2)分别代入式(1)可得:

a) 抛物线分布 I,

$$E(z) = E^* [1 - e_0 (\cos(z\pi/h))], \\ \rho(z) = \rho^* [1 - e_m \cos(z\pi/h)].$$

b) 抛物线分布 II,

$$E(z) = E^* [1 - e_0 (1 - \cos(z\pi/h))], \\ \rho(z) = \rho^* [1 - e_m (1 - \cos(z\pi/h))].$$

c) 线性分布,

$$E(z) = E^* [1 - e_0 \cos(z\pi/2h + \pi/4)], \\ \rho(z) = \rho^* [1 - e_m \cos(z\pi/2h + \pi/4)].$$

d) 均匀分布,

$$E(z) = E^* [1 - e_0 \lambda_0], \rho(z) = \rho^* [1 - e_m \lambda_0].$$

利用高斯随机场可获得如下力学性能关系^[13]:

$$\frac{E(z)}{E^*} = \left(\frac{\rho(z)/\rho^* + 0.121}{1.121} \right)^{2.3} \quad (3)$$

将式(1)代入式(3)可得:

$$e_m = \frac{1.121 [1 - \sqrt[2.3]{1 - e_0 \lambda(z)}]}{\lambda(z)}.$$

假设不同孔隙分布形式材料的总质量相等, 则

式(3)中均匀分布模式的孔隙率 λ_0 可表示为:

$$\lambda_0 = \frac{1}{e_0} - \frac{1}{e_0} \left[\frac{\left(\frac{1}{h\rho^*} \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz + 0.121 \right)}{1.121} \right]^{2.3}.$$

根据修正后的 Halpin-Tsai 微观力学模型, 在无孔隙状态下, GPL 增强复合材料的有效杨氏模量 E^* 可由下式计算^[11,14]:

$$E^* = \left(\frac{3}{8} \times \frac{1 + \xi_{L,GPL} \eta_{L,GPL} V_{GPL}}{1 - \eta_{L,GPL} V_{GPL}} + \frac{5}{8} \frac{1 + \xi_{W,GPL} \eta_{W,GPL} V_{GPL}}{1 - \eta_{W,GPL} V_{GPL}} \right) E_M,$$

其中: $\xi_{L,GPL} = \frac{2L}{t}$, $\xi_{W,GPL} = \frac{2W}{t}$, $\eta_{L,GPL} =$

$\frac{E_{GPL}/E_M - 1}{E_{GPL}/E_M + \xi_{L,GPL}}$, $\eta_{W,GPL} = \frac{E_{GPL}/E_M - 1}{E_{GPL}/E_M + \xi_{W,GPL}}$; L 、 W 、 t 分别为 GPL 的平均长度、平均宽度和平均厚度; E_{GPL} 和 E_M 分别为 GPL 和基体的杨氏模量。

根据混合律^[14], 在无孔隙状态下, GPL 增强复合材料的质量密度 ρ^* 和等效泊松比 v^* 可表示为:

$\rho^* = \rho_{GPL} V_{GPL} + \rho_M V_M$, $v^* = v_{GPL} V_{GPL} + v_M V_M$, 其中: ρ_{GPL} 、 ρ_M 、 v_{GPL} 和 v_M 分别为 GPL 和基体的密度和泊松比。

GPL 的体积含量 V_{GPL} 和基体的体积含量 V_M 具有如下关系:

$$V_{GPL} + V_M = 1.$$

GPL 的体积含量 V_{GPL} 可由下式计算:

$$V_{GPL} = \begin{cases} S_{i1} [1 - \cos(z\pi/h)], \\ S_{i2} \cos(z\pi/h), \\ S_{i3} [1 - \cos(z\pi/2h + \pi/4)], \\ S_{i4}. \end{cases}$$

假设 GPL 重量含量沿板条厚度方向连续变化,考虑如图 2 所示的 4 种石墨烯分布模式^[11],即 GPL A、GPL B、GPL C、GPL D,并将其分别应用于 4 种孔隙分布模式中。为了便于比较,本文假设不同孔隙分布材料中的 GPL 总重量含量 W_{GPL} 相等,则其峰值 $S_{i1} \neq S_{i2} \neq S_3 \neq S_{i4}$ 且 S_{ij} ($i=1, 2, 3, 4$ 分别对应抛物线分布 I、抛物线分布 II、线性分布和均匀分布模式; $j=1, 2, 3, 4$, 分别对应 GPL A、GPL B、GPL C、GPL D)可由下式计算:

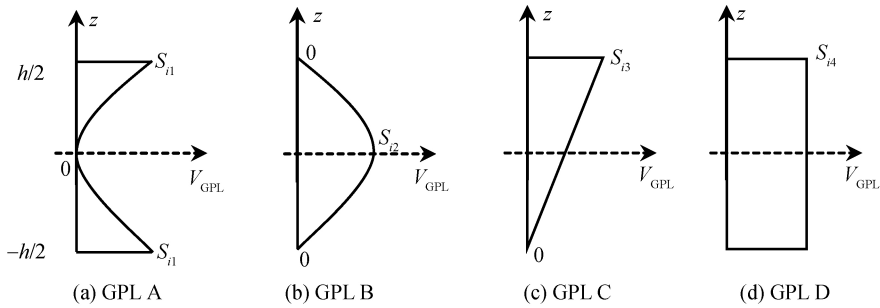


图 2 石墨烯分布模式

2 理论方程

在直角坐标系下,考虑一个均布荷载作用下等厚度的功能梯度多孔板条模型,FGM 多孔板条示意图如图 3 所示,其中: $x \in [0, l]$ 在板条的几何中面, $z \in [-h/2, h/2]$ 垂直于几何中面。

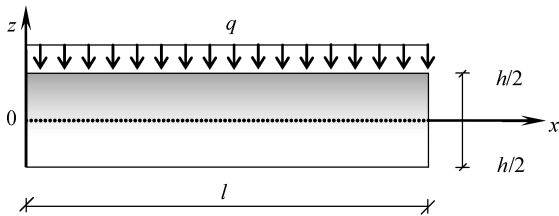


图 3 FGM 多孔板条示意

忽略体积力,基于弹性理论的平衡方程为

$$\begin{cases} \sigma_{xx,x} + \sigma_{xz,z} = 0, \\ \sigma_{xz,x} + \sigma_{zz,z} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

其中: σ_{xx} 、 σ_{xz} 和 σ_{zz} 分别为 x 和 z 方向上的应力分量;下标“,”表示对后面的变量求偏导。

各向同性材料的本构方程为:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = c_{11}u_{,x} + c_{13}w_{,z}, \\ \sigma_{zz} = c_{13}u_{,x} + c_{11}w_{,z}, \\ \sigma_{xz} = c_{55}(u_{,z} + w_{,x}) \end{cases} \tag{5}$$

其中: u 、 w 分别为 x 和 z 方向上的位移分量; c_{ij} 为材料的弹性常数,为板条厚度方向坐标 z 的函数,即 $c_{ij}=c_{ij}(z)$ 。基于前文对材料特性参数的描述和

$$\frac{W_{\text{GPL}}\rho_m}{W_{\text{GPL}}\rho_m + \rho_{\text{GPL}} - W_{\text{GPL}}\rho_{\text{GPL}}} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\rho(z)}{\rho^*} dz = \begin{cases} S_{i1} \int_{-h/2}^{h/2} \left[1 - \cos\left(\frac{z\pi}{h}\right) \right] \frac{\rho(z)}{\rho^*} dz, \\ S_{i2} \int_{-h/2}^{h/2} \cos\left(\frac{z\pi}{h}\right) \frac{\rho(z)}{\rho^*} dz, \\ S_{i3} \int_{-h/2}^{h/2} \left[1 - \cos\left(\frac{z\pi}{2h} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \frac{\rho(z)}{\rho^*} dz, \\ S_{i4} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\rho(z)}{\rho^*} dz, \end{cases}$$

其中: $\rho(z)$ 随孔隙分布模式的不同而变化。

计算,材料的弹性常数 c_{ij} 可利用 GPL 增强功能梯度多孔材料的有效杨氏模量 $E(z)$ 和泊松比 $\nu(z)$ 计算,

$$\begin{aligned} c_{13} &= \frac{E(z)\nu(z)}{[1+\nu(z)][1-2\nu(z)]}, \\ c_{11} &= \frac{E(z)[1-\nu(z)]}{[1+\nu(z)][1-2\nu(z)]}, \\ c_{55} &= \frac{E(z)}{2[1+\nu(z)]}^\circ \end{aligned}$$

根据推广后的 Mian 和 Spencer 板理论^[15],取如下形式的位移场表达式:

$$\begin{cases} u(x,z) = \bar{u}(x) + F\bar{u}_{,xx} + A\bar{w}_{,x} + B\bar{w}_{,xxx}, \\ w(x,z) = \bar{w}(x) + G\bar{u}_{,x} + C\bar{w}_{,xx} + D \end{cases} \tag{6}$$

其中: $A(z)$ 、 $B(z)$ 、 $C(z)$ 、 $D(z)$ 、 $F(z)$ 、 $G(z)$ 均为待定函数。

将式(6)代入式(5)可得:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = (c_{11} + c_{13}G')\bar{u}_{,x} + (c_{11}A + c_{13}C')\bar{w}_{,xx} + c_{11}F\bar{u}_{,xxx} + c_{11}B\bar{w}_{,xxxx} + c_{13}D', \\ \sigma_{zz} = (c_{13} + c_{11}G')\bar{u}_{,x} + (c_{13}A + c_{11}C')\bar{w}_{,xx} + c_{13}F\bar{u}_{,xxx} + c_{13}B\bar{w}_{,xxxx} + c_{11}D', \\ \sigma_{xz} = c_{55}[(A' + 1)\bar{w}_{,x} + (F' + G)\bar{u}_{,xx} + (B' + C)\bar{w}_{,xxx}] \end{cases} \tag{7}$$

其中:上标“'”表示对变量 z 求导数。

将式(7)代入式(4),并令

$$\begin{aligned} [c_{55}(A'+1)]' &= 0, c_{11}A + c_{13}C' + \\ [c_{55}(B'+C)]' &= c_{55}\kappa_2, (c_{13} + c_{33}G')' = 0, \\ c_{13}G' + [c_{55}(F'+G)]' &= c_{55}\kappa_1, c_{55}(A'+1) + \\ (c_{13}A + c_{33}C')' &= 0, \bar{u}_{,xxx} = \kappa_3, \\ \bar{w}_{,xxxx} &= \kappa_4 \end{aligned} \tag{8}$$

经简化可得:

$$\kappa_1 \bar{u}_{,xx} + \kappa_2 \bar{w}_{,xxx} = 0 \tag{9}$$

由式(8)–(9)可得:

$$\begin{cases} \bar{w}(x) = \frac{1}{24}\kappa_4 x^4 + \frac{1}{6}c_1 x^3 + \frac{1}{2}c_2 x^2 + c_3 x + c_4 \\ \bar{u}(x) = \frac{1}{6}\kappa_3 x^3 - \frac{1}{2}\frac{\kappa_2}{\kappa_1}c_1 x^2 + c_5 x + c_6 \end{cases} \tag{10}$$

其中: $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$ 为任意常数; $C_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ 为积分常数,可由板条在 $x=0, l$ 处的板柱面边界条件确定。

假设在板条的上表面 $z = h/2$ 处: $\sigma_{zz} = -q, \sigma_{xz} = 0$; 下表面 $z = -h/2$ 处: $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = 0$, 并令 \bar{u} 和 \bar{w} 为其中面位移分量, 即 $\bar{u}(x) = u(x, 0), \bar{w}(x) = w(x, 0)$ 。然后将式(7)中应力分量 σ_{zz} 和 σ_{xz} 的表达式代入前述边界条件, 这样函数 $A(z), B(z), C(z), D(z), F(z), G(z)$ 以及常数 $\kappa_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 的最终表达式便可以完全确定^[15]。

3 板柱面边界条件

积分应力表达式(7), 可得板条的轴力 N_x 、弯矩 M_x 和剪力 Q_x 的表达式^[15]:

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} dz = N_1 \bar{u}_{,x} + N_3 \bar{w}_{,xx} + \\ &\quad N_5 \bar{u}_{,xxx} + N_7 \bar{w}_{,xxxx} + N_0, \\ M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz = M_1 \bar{u}_{,x} + M_3 \bar{w}_{,xx} + \\ &\quad M_5 \bar{u}_{,xxx} + M_7 \bar{w}_{,xxxx} + M_0, \\ Q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz = Q_1 \bar{u}_{,x} + Q_2 \bar{w}_{,xxx}, \end{aligned}$$

其中: $N_0 = \int_{-h/2}^{h/2} c_{13} D' dz, N_1 = \int_{-h/2}^{h/2} (c_{11} + c_{13} G') dz,$
 $N_3 = \int_{-h/2}^{h/2} (c_{11} A + c_{13} C') dz, N_5 = \int_{-h/2}^{h/2} c_{11} F dz, N_7 =$
 $\int_{-h/2}^{h/2} c_{11} B dz, M_0 = \int_{-h/2}^{h/2} c_{13} D' z dz, M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} z (c_{11} +$
 $c_{13} G') dz, M_3 = \int_{-h/2}^{h/2} z (c_{11} A + c_{13} C') dz, M_5 =$
 $\int_{-h/2}^{h/2} c_{11} z F dz, Q_1 = \int_{-h/2}^{h/2} c_{55} (F' + G) dz, Q_2 =$
 $\int_{-h/2}^{h/2} c_{55} (B' + C) dz, M_7 = \int_{-h/2}^{h/2} c_{11} z B dz。$

在板条 $x=0, l$ 处考虑简支边界 **S**、固支边界 **C** 或自由边界 **F**, 即

$$\mathbf{S} = (\bar{u} = 0, \quad \bar{w} = 0, \quad M_x = 0) \tag{11}$$

$$\mathbf{C} = (\bar{u} = 0, \quad \bar{w} = 0, \quad \bar{w}_{,x} = 0) \tag{12}$$

$$\mathbf{F} = (N_x = 0, \quad M_x = 0, \quad Q_x = 0) \tag{13}$$

利用边界条件式(11)–(13)可以确定板中面式(10)中的积分常数 $C_i (i = 1, 2, \dots, 6)$, 然后代入式(5)和(6)即可获得增强功能梯度多孔板条在任意位置处的位移和应力解答。

4 数值算例

4.1 结果验证

为了验证本文方法的正确性, 考虑一个受均布荷载 $q = 1 \times 10^4$ N/m 作用的功能梯度多孔板条。相关参数为: $E = 200$ GPa, $\nu = 1/3, e_0 = 0.5, h = 0.1$ m。文献[2]给出了该问题的平面应力解和 ANSYS 解。为了便于比较, 需要将本文的平面应变解转换成平面应力解。表 1 给出了三种不同长厚比时板条的无量纲位移 l/h 。从表 1 中可以发现, 本文解与文献解基本一致, 验证了本文解答的正确性。

表 1 无量纲位移 w/h 比较

l/h	本文解	ANSYS 解 ^[2]	文献[2]解
10	0.00098	0.00099	0.00100
20	0.01555	0.01572	0.01582
50	0.60568	0.61182	0.61646

4.2 GPL 增强功能梯度多孔板条受均布荷载作用

考虑 GPL 的几何尺寸和含量、孔隙分布模式、孔隙率系数及边界条件等因素对 GPL 增强 FGM 多孔板条弯曲响应的影响, 选择金属泡沫铜作为复合材料的基体, 相关材料参数^[11–13]如表 2 所示。无特别说明, 计算时取 $q = 1 \times 10^4$ N/m, $h = 0.1$ m, $l/h = 10, e_0 = 0.5, W_{\text{GPL}} = 1\%$, 边界条件取固支边界, 引入无量纲位移 $w^* = w/h$ 和无量纲应力 $\sigma_x^* = \sigma_x/q$ 。

表 2 GPL 几何尺寸和金属泡沫铜的有效材料参数

$L/\mu\text{m}$	$W/\mu\text{m}$	t/nm	$\rho_{\text{GPL}}/(\text{kg}\cdot\text{m}^3)$	$E_{\text{GPL}}/\text{TPa}$
2.5	1.5	1.5	1.06×10^3	1.01
ν_{GPL}	$W_{\text{GPL}}/\%$	ν_{m}	$\rho_{\text{M}}/(\text{kg}\cdot\text{m}^3)$	E_{M}/GPa
0.186	1	0.34	8.96×10^3	130

为了研究 GPL 几何尺寸和孔隙率对多孔板条弯曲响应的影响, 本文给出了孔隙率变化的情况下不同 GPL 厚长比 t/L 和两种 GPL 宽长比 W/L (假定 GPL 平均长度 L 为常数) 时的无量纲位移和无量纲正应力。不失一般性, 本文只考虑抛物线分布 I 和 GPL A

情形。孔隙率变化情况下不同 GPL 厚长比多孔板条的弯曲响应如图 4 所示。从图 4 中可以看出:随着厚长比 t/L 的增大,两种 GPL 宽长比 W/L 下的无量纲位移和应力变化均不显著;在厚长比 $t/L < 0.5 \times$

10^{-3} 时,无量纲位移随着宽长比 W/L 的增大而减小,无量纲应力则与之相反。当孔隙率系数 $e_0 = 0$ 时,即为无孔功能梯度复合材料板,随着孔隙率增大,无量纲位移绝对值和无量纲正应力均在增大。

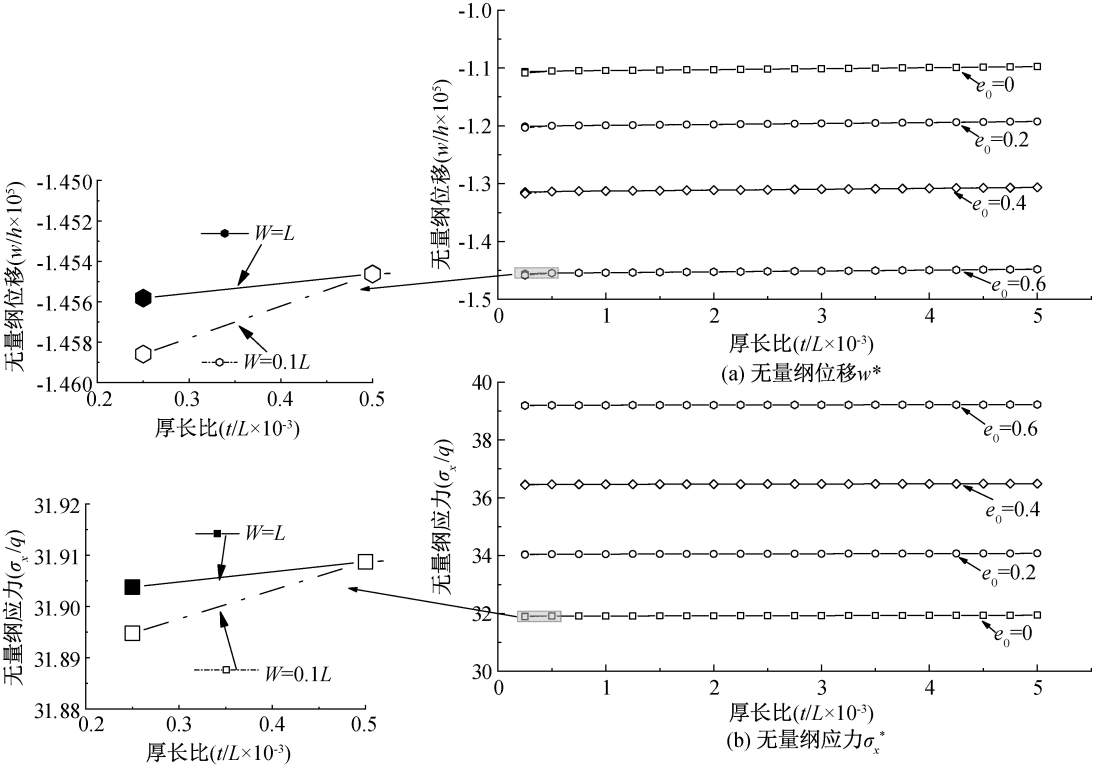


图 4 孔隙率变化情况下不同 GPL 厚长比多孔板条的弯曲响应

图 5 给出了不同孔隙分布模式下 GPL 含量对无量纲位移和无量纲正应力的影响。本文仅考虑 GPL D 形式。从图 5 中可以发现,无量纲位移绝对值随着 GPL 含量的增加而减小,且抛物线分布 I 时

的无量纲位移绝对值最小。4 种孔隙分布模式的无量纲应力均为正,且无量纲正应力随 GPL 含量的增加变化均不显著。

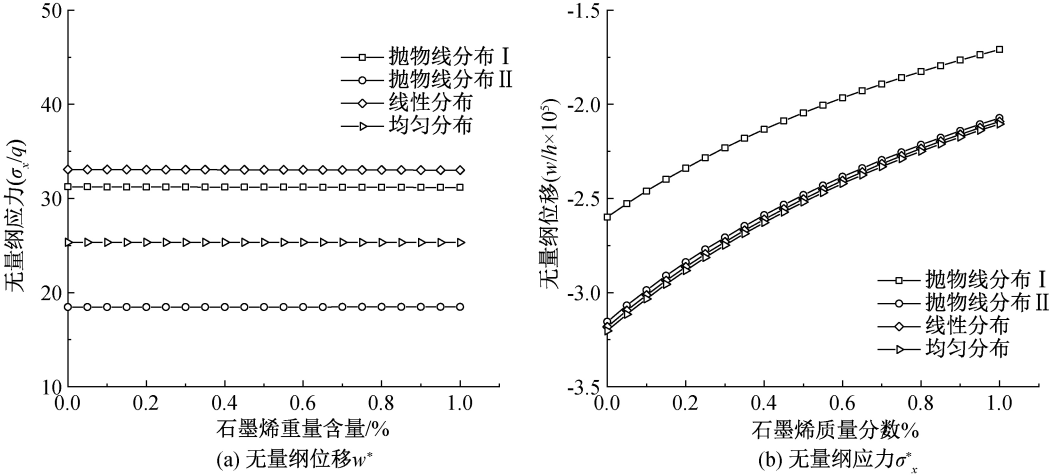


图 5 不同 GPL 质量分数下多孔板条的弯曲响应

图 6 给出了 $x=l/2$ 处,简支 GPL 增强功能梯度多孔板条沿厚度方向的无量纲位移和无量纲应力。从图 6 中可以发现,4 种孔隙分布模式下的无量纲位

移沿板厚度方向均呈非线性变化,其中抛物线分布 I 时的无量纲位移绝对值最小,均匀分布时无量纲位移绝对值最大。对于无量纲正应力,4 种分布形式的无

量纲正应力沿板厚度方向变化显著,其中抛物线分布Ⅱ时的无量纲正应力绝对值在板中面位置处最小,随

后沿板上下表面先增大后减小,其他 3 种分布形式的最大压应力和最大拉应力分别出现在板的上下表面。

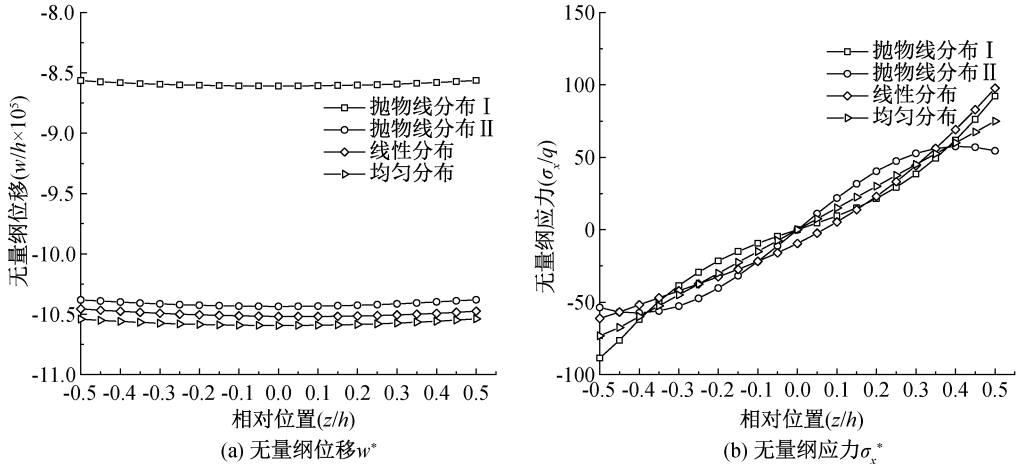


图 6 不同孔隙分布模式下多孔板条无量纲沿厚度方向分布的弯曲响应

为了考虑边界条件的影响,图 7 给出了 $z=h/2$ 处孔隙率均匀分布时板条沿 x 方向的无量纲位移和无量纲正应力。结果表明,**C-F** 板条无量纲位移沿 x 方向全部为负,且无量纲位移在自由边处达到最大;**S-S** 板条、**C-C** 板条和 **C-S** 板条的无量纲位移绝对值沿 x 方向均表现为两端小中间大的特

征。对于无量纲正应力,4 种边界条件下的板条沿 x 方向均呈现抛物线分布特征,其中 **S-S** 板条和 **C-C** 板条的最大压应力和最大拉应力分别出现在板条两端和板中面;由于固支端提供了较大约束,故 **C-F** 板条和 **C-S** 板条的固支端处产生最大的正应力。

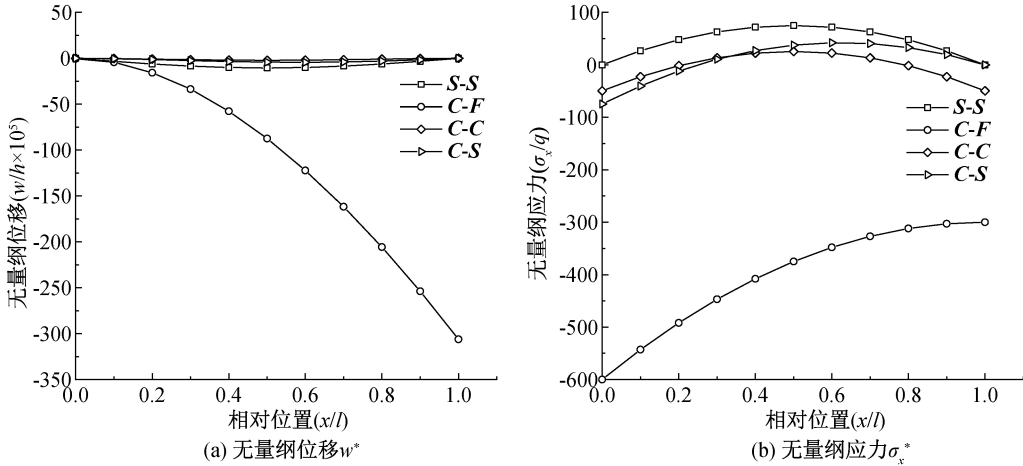


图 7 不同边界条件下多孔板条沿 x 方向分布的弯曲响应

本文计算了所有孔隙分布和 GPL 分布下的结果,这些结果与上述几种板条的无量纲位移和无量纲正应力结果相似,因此以上分析讨论对于其他分布情形的板条也同样适用。

5 结 论

本文基于弹性理论,利用推广后的 Mian 和 Spencer 板理论和修正后的 Halpin-Tsai 微观力学模型,研究了 GPL 增强功能梯度多孔板条在均布荷载作用下的弯曲问题,并通过数值算例研究了 GPL 几何尺寸和含量、孔隙分布模式、孔隙率及边界条件

对板条弯曲响应的影响。所得主要结论如下:
a)GPL 几何尺寸对板条的无量纲位移和无量纲正应力影响均不显著;孔隙率系数对板条无量纲位移和正应力的影响较大,且无量纲位移和正应力均随着孔隙率的增大而增大。
b)当 GPL 分布模式一定时,孔隙呈抛物线分布Ⅰ时的无量纲位移最小,这表明将孔隙集中在板中平面附近可以提供更优异的结构刚度;当 GPL 均匀分布时,GPL 含量对板条无量纲正应力的影响可以忽略不计。
c)孔隙分布模式对沿板厚度方向上的无量纲正

应力影响显著,这是由于材料内部孔隙梯度变化导致材料常数也呈梯度变化引起的。

本文获得的解析解完全满足弹性理论中的平衡方程及板上下表面的边界条件,只在板柱面边界处采用圣维南原理对应力条件进行了放松,在柱面边界大约一个板厚范围内,解析解答会存在一定误差;远离该区域后本研究获得的解析解便具有足够高的精度。

参考文献:

[1] Naebe M, Shirvanimoghaddam K. Functionally graded materials: A review of fabrication and properties [J]. *Applied Materials Today*, 2016, 5: 223-245.

[2] Chen D, Yang J, Kitipornchai S. Elastic buckling and static bending of shear deformable functionally graded porous beam[J]. *Composite Structures*, 2015, 133: 54-61.

[3] Hassani A, Habibolahzadeh A, Bafti H. Production of graded aluminum foams via powder space holder technique[J]. *Materials & Design*, 2012, 40: 510-515.

[4] 孙昊栋, 马连生. 热载荷作用下梯度多孔材料梁的非线性力学行为[C]//中国力学大会(CCTAM 2019). 杭州: 中国力学学会, 2019: 90-98.

[5] 王佳优, 马广朋, 康帅帅, 等. 相变温控导热增强的多孔金属梯度优化设计[J]. *计算力学学报*, 2019, 36(3): 338-344.

[6] Chen D, Yang J, Kitipornchai S. Nonlinear vibration and postbuckling of functionally graded graphene reinforced porous nanocomposite beams[J]. *Composites Science and Technology*, 2017, 142: 235-245.

[7] Rafiee M A, Rafiee J, Wang Z, et al. Enhanced mechanical properties of nanocomposites at low graphene content[J].

ACS Nano, 2009, 3(12): 3884-3890.

[8] Kitipornchai S, Chen D, Yang J. Free vibration and elastic buckling of functionally graded porous beams reinforced by graphene platelets [J]. *Materials & Design*, 2017, 116: 656-665.

[9] Yang J, Chen D, Kitipornchai S. Buckling and free vibration analyses of functionally graded graphene reinforced porous nanocomposite plates based on Chebyshev-Ritz method [J]. *Composite Structures*, 2018, 193: 281-294.

[10] Li K Y, Wu D, Chen X J, et al. Isogeometric analysis of functionally graded porous plates reinforced by graphene platelets [J]. *Composite Structures*, 2018, 204: 114-130.

[11] Sahmani S, Aghdam M M, Rabczuk T. Nonlinear bending of functionally graded porous micro/nano-beams reinforced with graphene platelets based upon nonlocal strain gradient theory [J]. *Composite Structures*, 2018, 186:68-78.

[12] Yang B, Kitipornchai S, Yang Y F, et al. 3D thermo-mechanical bending solution of functionally graded graphene reinforced circular and annular plates [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2017, 49: 69-86.

[13] Roberts A P, Garboczi E J. Elastic moduli of model random three-dimensional closed-cell cellular solids[J]. *Acta Materialia*, 2001, 49(2): 189-197.

[14] Yang B, Yang J, Kitipornchai S. Thermoelastic analysis of functionally graded graphene reinforced rectangular plates based on 3D elasticity [J]. *Meccanica*, 2017, 52(10): 2275-2292.

[15] 杨博, 丁皓江, 陈伟球. 功能梯度板柱面弯曲的弹性力学解[J]. *应用数学和力学*, 2008, 29(8):905-910.

(责任编辑:康 锋)