



求解低温下纺织材料热湿传递模型的有限体积法

朱佳佳, 徐映红

(浙江理工大学理学院, 杭州 310018)

摘要: 针对一类已有的纺织材料热湿传递模型, 提出了求解该模型的有限体积法, 证明了解的存在唯一性、稳定性及收敛性。首先, 给出了低温条件下单层纺织材料热湿传递数学模型, 该模型为一个线性偏微分方程组, 其边界条件为第三类边界条件。然后, 构造了该模型求解的有限体积格式, 在证明其数值解的存在唯一性的基础上, 利用 Gronwall 不等式从理论上证明了该数值解的稳定性及在 L_2 范数下的一阶收敛性。最后, 以涤纶织物为例进行了数值实验, 发现计算结果与理论分析一致, 有限体积法相比有限差分法计算收敛速度快。

关键词: 热湿传递模型; 有限体积法; 数值模拟; Gronwall 不等式; 收敛性; 稳定性

中图分类号: TS101; O242.1

文献标志码: A

文章编号: 1673-3851 (2021) 07-0489-08

Finite volume method for solving heat and moisture transfer model of textile materials at a low temperature

ZHU Jiajia, XU Yinghong

(School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: For a class of heat and moisture transfer models of textile materials, a finite volume method for solving the model is proposed to prove the existence uniqueness, stability and convergence of the solution. Firstly, a mathematical model of heat and moisture transfer in single-layer textile materials under low-temperature conditions is given, and the model is a linear system of partial differential equations whose boundary conditions are third boundary conditions. Then, a finite volume scheme is constructed for the model. Besides, the stability and the first-order convergence under the L_2 norm of the numerical solution were proven theoretically by using the Gronwall inequality. Finally, numerical experiments were conducted by taking polyester for example. The computational results agreed with the theoretical analysis, and the finite volume method converged faster than the finite difference method.

Key words: the heat and moisture transfer model; finite volume method; numerical simulation; Gronwall inequality; convergence; stability

0 引言

纺织材料作为服装、功能纺织品生产的原料, 在社会生产生活过程中占据了重要的地位。随着科技的发展和社会需求的变化, 人们可能会接触到一些

极端环境, 例如: 火场救援、极地考察等, 这就对纺织材料提出了不同的舒适性和功能性要求。舒适性包括压力舒适性和热湿舒适性等, 其中热湿舒适性与织物内部的热湿传递现象密切相关。

目前, 关于织物内部的热湿传递问题, 近几年的

研究工作主要集中在关于热湿舒适性的实验研究和关于热湿传递过程的模型研究两个方面。在实验研究方面,现有研究主要通过探究不同参数对织物内部传热传质过程的影响,设计适合用于热湿舒适性的评价方法,来优化织物的创新设计。例如:唐世君等^[1]研制了一种织物热湿传递性能测定仪,提出一个相对散热速率指标,用于区分和评价织物在显汗条件下的动态传热传湿性能;张辉等^[2]测试分析了织物结构与测试指标保温率、导热系数和克罗值之间的相互关系,结果表明,在含水率相同的情况下,不同纤维材料的织物保温率不同;于瑶等^[3]则提出一个从纤维原料到纱线最后到服装的整体研究系统,建立了服装热湿舒适性的预测模型。可知织物内部的热湿传递现象关系到服装的热湿舒适性。在模型研究方面,现有研究针对织物内部的热湿传递过程建立数学模型,来描述织物内部水气的扩散、吸附及热传递等物理现象。Fan 等^[4-5]研究了织物内传导热、辐射热、水气的吸附及冷凝等相变过程,建立了动态的热湿传递耦合模型。Korycki^[6]忽略对流传热及辐射传热,建立了一类动态热湿传递模型,并通过灵敏度分析对织物进行了厚度优化;吕婉莹等^[7]结合第三类边界条件,将此模型推广至三层纺织材料,并利用遗传算法得到了厚度及孔隙率的最优分布。Xu 等^[8]完善了在变初始条件和变边界条件下多孔织物考虑水气吸附和凝结的热湿传递耦合模型,并设计了一种高精度的隐式差分格式。有限差分法是热湿传递模型求解的常用方法。Fan 等^[4-5]、吕婉莹等^[7]及 Xu 等^[8]均利用有限差分法进行模型求解,数值实验表明上述模型可以较好地模拟实际情况。

有限体积法是 20 世纪六七十年代发展起来的一种主要用于求解流体流动和传热问题的数值算法。Du 等^[9-10]利用有限体积法求解一类考虑热传导和热辐射的稳态模型,并通过拟牛顿法得到了孔隙率的最优分布。Ye^[11]针对修正的热湿传递全动态和准稳态模型,提出了一种求解非线性对流-扩散-反应方程组的分裂半隐式有限体积法。对于带涂层的纺织材料,Fontana^[12]建立了一种模拟织物内部热量和水汽分布的数学模型,并用有限体积法对该模型进行模拟,结果显示模拟结果与实际情况相吻合。

纺织材料正问题求解是通过各种有效算法求解热湿传递模型,从而得到织物内部热湿分布的过程。反问题则是根据人体的舒适性和功能性要求,最优

决定纺织材料的一个或多个结构参数和物理参数。反问题研究对开发有一定热湿舒适性和功能性的服装有重要意义。选取适当的高精度数值算法有利于纺织材料反问题的研究。关于 Korycki^[6]提出的单层热湿传递模型,Korycki^[6]没有进行正问题求解,吕婉莹等^[7]没有证明其正问题数值解的收敛性及稳定性,因此本文利用有限体积法对基于 Korycki^[6]提出的单层纺织材料热湿传递模型进行求解,并对数值解的稳定性及收敛性进行讨论。本文针对结合第三类边界条件的单层模型,首先建立了有限体积离散格式;然后在证明其数值解的存在唯一性的基础上,利用 Gronwall 不等式对数值解的收敛性、稳定性进行分析;最后进行 Matlab 数值模拟,并将数值结果与有限差分法^[7]进行收敛性比较分析,以验证有限体积法的有效性。

1 单层纺织材料的有限体积格式

1.1 单层纺织材料的热湿传递模型

单层纺织材料的“人体皮肤-织物-外界环境”系统的原理^[7]如图 1 所示,其中: w_0 为靠近皮肤的水汽浓度,kg/m³; T_0 为靠近皮肤的织物温度,℃; w_e 为环境中的水汽浓度,kg/m³; T_e 为环境温度,℃; L 为织物层总厚度,m; x 为到皮肤层的距离,m。由于人体皮肤和外界环境之间存在温度差及水汽浓度差,因此织物内部存在热传导现象及水汽冷凝、蒸发、扩散现象。

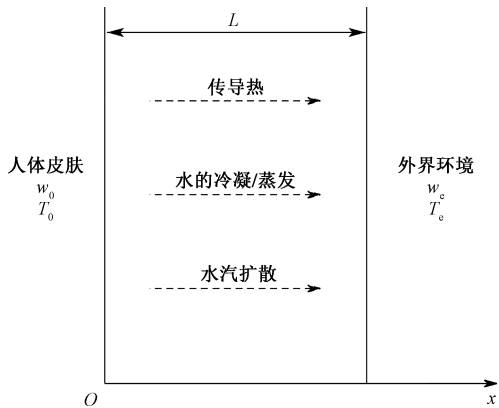


图 1 单层纺织材料的“人体皮肤-织物-外界环境”系统原理

- 为了简化模型,Korycki^[6]给出如下假设:
- a) 多孔织物内部纤维是各向同性的;
 - b) 忽略织物热湿传递过程中的辐射热;
 - c) 在传热传湿过程中,织物结构基本保持不变,孔隙率和曲折率不变,忽略由含水量变化所引起的织物体积的变化;
 - d) 系统中的水分通过冷凝和蒸发在环境和织

物之间输送;

e) 织物的表面温度与附近空气的温度相同;

f) 织物表面的饱和水汽压与附近空气的饱和水汽压相同;

g) 热湿传递模型中, 不考虑外界的风速以及整个系统的对流热;

h) 各面料层紧密相连, 忽略微气候区与面料层之间的空气层。

基于上述假设, Korycki^[6] 根据能量守恒定律、质量守恒定律给出了以下关于单层纺织材料的热湿传递模型, 其中: 关于水汽浓度 w_f 的方程为:

$$\left(1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{\eta}\right) \frac{\partial w_f}{\partial t} = \frac{h_a \varepsilon}{\zeta \eta} \frac{\partial^2 w_f}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in Q \equiv (0, L) \times (0, T_t) \quad (1)$$

其初边值条件为:

$$\lambda_w \varepsilon \frac{\partial w_f}{\partial x} \bigg|_{x=0} = h_w (w_f(0, t) - w_0), \quad t \in (0, T_t) \quad (2)$$

$$\lambda_w \varepsilon \frac{\partial w_f}{\partial x} \bigg|_{x=L} = h_w (w_e - w_f(L, t)), \quad t \in (0, T_t) \quad (3)$$

$$w_f(x, 0) = w_1(x), \quad x \in (0, L) \quad (4)$$

关于温度 T 的方程为:

$$c \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda_w \frac{\partial w_f}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in Q \quad (5)$$

其初边值条件为:

$$\lambda \varepsilon \frac{\partial T}{\partial x} \bigg|_{x=0} = -k(T_0 - T(0, t)), \quad t \in (0, T_t) \quad (6)$$

$$\lambda \varepsilon \frac{\partial T}{\partial x} \bigg|_{x=L} = -k(T(L, t) - T_e), \quad t \in (0, T_t) \quad (7)$$

$$T(x, 0) = T_1(x), \quad x \in (0, L) \quad (8)$$

其中: T_t 为热湿传递的总时间, s; $\varepsilon, \eta, \zeta, c, \lambda, \lambda_w, k, h_w$ 分别为纺织材料的孔隙率、吸收系数、曲折系数、体积热容 ($J/(m^3 \cdot K)$)、导热系数 (W/mK)、吸收水汽热量 (J/kg) 及热对流系数 ($W/(m^2 \cdot K)$)、水汽的质量对流系数 (m/s) 等参数; h_a 为水蒸气在空气中的扩散系数 (m/s)。

纺织材料热湿传递模型的正问题求解, 即通过式 (1) — (8), 得到织物层温度和蒸汽浓度的分布情况。

1.2 热湿传递模型的有限体积格式

本文针对水汽浓度和温度建立了式 (1) — (8) 的有限体积格式。

将求解区域 $[0, L] \times [0, T_t]$ 做剖分。取正整数 M, N 。将 $[0, L]$ 做 M 等分, 将 $[0, T_t]$ 做 N 等分。令 $x_j = j \Delta x, j = 0, 1, 2, \dots, M$, 其中空间步长 $\Delta x = \frac{L}{M}, t_n = n \Delta t, n = 0, 1, 2, \dots, N$, 时间步长 $\Delta t = \frac{T_t}{N}$ 。记 $\Omega_h = \{x_j | 0 \leq j \leq M\}, \Omega_\tau = \{t_n | 0 \leq n \leq N\}, \Omega_{ht} = \Omega_h \times \Omega_\tau$ 。

对于定义在 Ω_{ht} 上的网格函数 v_j^n , 引入如下符号:

$$\begin{aligned} \delta_x v_{j-\frac{1}{2}}^n &= \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{\Delta x}, \\ \delta_x^2 v_j^n &= \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}, \\ \delta_t v_j^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t}. \end{aligned}$$

设 v_1, v_2 为 Ω_h 上的网格函数, 引入内积、范数:

$$(v_1, v_2) = \Delta x \left(\frac{1}{2} v_{1,0} v_{2,0} + \sum_{j=1}^{M-1} v_{1,j} v_{2,j} + \frac{1}{2} v_{1,M} v_{2,M} \right),$$

$$\|v_1\|_\infty = \max_{0 \leq j \leq M} |v_{1,j}|,$$

$$\|v_1\| = \Delta x \left(\frac{1}{2} v_{1,0}^2 + \sum_{j=1}^{M-1} v_{1,j}^2 + \frac{1}{2} v_{1,M}^2 \right),$$

$$|v_1|_1 = \sqrt{\Delta x \sum_{j=1}^{M-1} (\delta_x v_{1,j-\frac{1}{2}})^2}.$$

令空间单元 $I_j = [x_{j-1}, x_j], j = 1, 2, \dots, M$, 中点为 $x_{j-\frac{1}{2}}, I_j^* = [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}], j = 1, 2, \dots, M-1, I_0^* = [x_0, x_{\frac{1}{2}}], I_M^* = [x_{M-\frac{1}{2}}, x_M]$, 称 I_j^* 为节点 x_j 对应的控制体积。

$$\text{令 } a_1 = \frac{h_a \varepsilon}{[(1-\varepsilon)\eta + \varepsilon]\zeta}, a_2 = \frac{2h_w h_a}{[(1-\varepsilon)\eta + \varepsilon]\lambda_w \zeta}.$$

将方程 (1) 两边关于 x 在控制体积 $I_j^*, j = 0, 1, 2, \dots, M$ 上分别进行积分, 并利用初边值条件 (2) — (4), 得到:

$$\begin{cases} \int_{x_0}^{x_{\frac{1}{2}}} \frac{\partial w_f}{\partial t} dx = a_1 \frac{\partial w_f}{\partial x} \bigg|_{x=x_{\frac{1}{2}}} - \frac{a_2}{2} (w_f(0, t) - w_0); \\ \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial w_f}{\partial t} dx = a_1 \left[\frac{\partial w_f}{\partial x} \bigg|_{x=x_{j+\frac{1}{2}}} - \frac{\partial w_f}{\partial x} \bigg|_{x=x_{j-\frac{1}{2}}} \right], \\ 1 \leq j \leq M-1; \\ \int_{x_{M-\frac{1}{2}}}^{x_M} \frac{\partial w_f}{\partial t} dx = \frac{a_2}{2} (w_e - w_f(L, t)) - a_1 \frac{\partial w_f}{\partial x} \bigg|_{x=x_{M-\frac{1}{2}}} \end{cases} \quad (9)$$

此即水汽浓度 w_f 的积分守恒形式。

首先考虑空间方向上的离散, 水汽浓度 w_f 在

$x_{j-\frac{1}{2}}, j=1, 2, \dots, M$ 处使用 Taylor 公式, 得:

$$\left. \frac{\partial w_f}{\partial x} \right|_{x=x_{j-\frac{1}{2}}} = \frac{w_f(x_j, t) - w_f(x_{j-1}, t)}{\Delta x} - \frac{\partial^3 w_f}{\partial x^3} \bigg|_{x=\xi_j} \frac{(\Delta x)^2}{24}, x_{j-1} \leq \xi_j \leq x_j.$$

在每个控制体积 $I_j^*, j=1, 2, \dots, M-1$ 中对积分项使用中矩形公式, 有:

$$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial w_f}{\partial t} dx = \frac{\partial w_f}{\partial t} \bigg|_{x=x_j} \Delta x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w_f}{\partial t} \right) \bigg|_{x=\xi_{M+j}} \frac{(\Delta x)^3}{24}, x_{j-1} \leq \xi_{M+j} \leq x_{j+1},$$

特别地, 在边界上分别使用左矩形公式和右矩形公式, 得:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_{\frac{1}{2}}} \frac{\partial w_f}{\partial t} dx &= \frac{\partial w_f}{\partial t} \bigg|_{x=x_0} \frac{\Delta x}{2} + \frac{\partial^2 w_f}{\partial x \partial t} \bigg|_{x=\xi_{2M}} \frac{(\Delta x)^2}{8}, \\ x_0 &< \xi_{2M} < x_1, \\ \int_{x_{M-\frac{1}{2}}}^{x_M} \frac{\partial w_f}{\partial t} dx &= \frac{\partial w_f}{\partial t} \bigg|_{x=x_M} \frac{\Delta x}{2} - \frac{\partial^2 w_f}{\partial x \partial t} \bigg|_{x=\xi_{2M+1}} \frac{(\Delta x)^2}{8}, \\ x_{M-1} &< \xi_{2M+1} < x_M. \end{aligned}$$

于是式(9)变为:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial w_f}{\partial t} \right|_{x=x_0} &= 2a_1 \frac{w_f(x_1, t) - w_f(x_0, t)}{(\Delta x)^2} - \\ &a_2 \frac{w_f(0, t) - w_0}{\Delta x} + \dot{r}_{1,0}^n, \\ \left. \frac{\partial w_f}{\partial t} \right|_{x=x_j} &= \\ a_1 \frac{w_f(x_{j+1}, t) - 2w_f(x_j, t) + w_f(x_{j-1}, t)}{(\Delta x)^2} &+ \dot{r}_{1,j}^n, \\ 1 \leq j \leq M-1, \\ \left. \frac{\partial w_f}{\partial t} \right|_{x=x_M} &= a_2 \frac{w_e - w_f(L, t)}{\Delta x} - \\ 2a_1 \frac{w_f(x_M, t) - w_f(x_{M-1}, t)}{(\Delta x)^2} &+ \dot{r}_{1,M}^n, \end{aligned}$$

其中: $\dot{r}_{1,j}^n, j=0, 1, 2, \dots, M$ 为空间离散过程中产生的截断误差。

其次, 时间方向上考虑向后 Euler 格式, 在 t_{n+1} 时刻利用向后差商公式进行离散, 即:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial w_f}{\partial t} \right|_{t=t_{n+1}} &= \frac{w_f(x, t_{n+1}) - w_f(x, t_n)}{\Delta t} + \frac{\partial^2 w_f}{\partial t^2} \bigg|_{t=\omega_n} \frac{\Delta t}{2}, \\ t_n \leq \omega_n \leq t_{n+1}, n=1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

则有:

$$\begin{aligned} \frac{w_f(x_0, t_{n+1}) - w_f(x_0, t_n)}{\Delta t} &= \\ 2a_1 \frac{w_f(x_1, t) - w_f(x_0, t)}{(\Delta x)^2} - \\ a_2 \frac{w_f(0, t) - w_0}{\Delta x} &+ r_{1,0}^n, \\ \frac{w_f(x_j, t_{n+1}) - w_f(x_j, t_n)}{\Delta t} &= \\ a_1 \frac{w_f(x_{j+1}, t) - 2w_f(x_j, t) + w_f(x_{j-1}, t)}{(\Delta x)^2} &+ \\ r_{1,j}^n, 1 \leq j \leq M-1, \\ \frac{w_f(x_M, t_{n+1}) - w_f(x_M, t_n)}{\Delta t} &= \\ a_2 \frac{w_e - w_f(L, t)}{\Delta x} - \\ 2a_1 \frac{w_f(x_M, t) - w_f(x_{M-1}, t)}{(\Delta x)^2} &+ r_{1,M}^n, \end{aligned}$$

其中: $r_{1,j}^n, j=0, 1, 2, \dots, M$ 为全离散后产生的截断误差。

由上可知, 对于 $\mathbf{R}_1^n(r_{1,0}^n, r_{1,1}^n, \dots, r_{1,M}^n)$ 存在正常数 c_1 使得

$$\|\mathbf{R}_1^n\|_\infty \leq c_1(\Delta x + \Delta t), 0 \leq n \leq N \quad (10)$$

令 $w_j^n = w_f(x_j, t_n), u_j^n = T(x_j, t_n)$ 为 Ω_{hr} 上的网格函数, 略去小量项 \mathbf{R}_1 后可得式(1)~(4)的有限体积格式:

$$\begin{aligned} \delta_t w_0^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{2a_1}{\Delta x} \delta_x w_{\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{a_2}{\Delta x} w_0^{n+1} + \frac{a_2 w_0}{\Delta x}, \\ 0 \leq n \leq N-1 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \delta_t w_j^{n+\frac{1}{2}} &= a_1 \delta_x^2 w_j^{n+1}, 1 \leq j \leq M-1, \\ 0 \leq n \leq N-1 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \delta_t w_M^{n+\frac{1}{2}} &= -\frac{2a_1}{\Delta x} \delta_x w_{M-\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{a_2}{\Delta x} w_M^{n+1} + \frac{a_2 w_e}{\Delta x}, \\ 0 \leq n \leq N-1 \end{aligned} \quad (13)$$

$$w_j^0 = w_1(x_j), 1 \leq j \leq M \quad (14)$$

类似地, 令 $b_1 = \frac{\lambda_w}{c}, b_2 = \frac{\lambda}{c}, b_3 = \frac{2k}{c\epsilon}$, 略去小量

项 \mathbf{R}_2 后可得式(5)~(8)的有限体积格式:

$$\begin{aligned} \delta_t u_0^{n+\frac{1}{2}} - b_1 \delta_t w_0^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{2b_2}{\Delta x} \delta_x u_{\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{b_3}{\Delta x} u_0^{n+1} + \frac{b_3 T_0}{\Delta x}, \\ 0 \leq n \leq N-1 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\delta_t u_j^{n+\frac{1}{2}} - b_1 \delta_t w_j^{n+\frac{1}{2}} = b_2 \delta_x^2 u_j^{n+1}, 1 \leq j \leq M-1,$$

$$0 \leq n \leq N-1 \tag{16}$$

$$\delta_t u_M^{n+\frac{1}{2}} - b_1 \delta_t w_M^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{2b_2}{\Delta x} \delta_x u_{M-\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{b_3}{\Delta x} u_M^{n+1} + \frac{b_3 T_e}{\Delta x}, 0 \leq n \leq N-1 \tag{17}$$

$$u_j^0 = T_1(x_j), 1 \leq j \leq M \tag{18}$$

其中 \mathbf{R}_2 为对应的局部截断误差。同样地,存在正常数 c_2 使得

$$\|\mathbf{R}_2\|_\infty \leq c_2(\Delta x + \Delta t), 0 \leq n \leq N \tag{19}$$

称式(11)—(14)、式(15)—(18)分别为水汽浓度及温度的有限体积格式。

2 数值解的稳定性及收敛性分析

下文证明数值解的存在唯一性、收敛性,及初始值扰动下的稳定性。

2.1 解的存在唯一性

定理 1 水汽浓度 w_i 的有限体积格式(11)—(14)的解存在且唯一。

证明 记 t_n 时刻的水汽浓度

$$\mathbf{W}^n = (w_0^n, w_1^n, w_2^n, \cdots, w_M^n)^T。$$

由式(4)可得初始时刻 t_0 的水汽浓度 \mathbf{W}^0 。

假设 \mathbf{W}^n 已知,则 t_{n+1} 时刻的水汽浓度 \mathbf{W}^{n+1} 可通过有限体积格式(11)—(14)得到。有限体积格式(11)—(14)可表示为矩阵形式 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{W}^{n+1} = \mathbf{W}^n + \mathbf{U}_1$,即:

$$\begin{bmatrix} 1+2s_1+s_2 & -2s_1 & & & \\ -s_1 & 1+2s_1 & -s_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -s_1 & 1+2s_1 & -s_1 \\ & & & -2s_1 & 1+2s_1+s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0^{n+1} \\ w_1^{n+1} \\ \vdots \\ w_{M-1}^{n+1} \\ w_M^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_0^n + \frac{a_2 w_0 \Delta t}{\Delta x} \\ w_1^n \\ \vdots \\ w_{M-1}^n \\ w_M^n + \frac{a_2 w_e \Delta t}{\Delta x} \end{bmatrix},$$

$$\text{其中: } s_1 = \frac{a_1 \Delta t}{(\Delta x)^2} > 0, s_2 = \frac{a_2 \Delta t}{\Delta x} > 0。$$

由于系数矩阵 \mathbf{A} 为严格对角占优矩阵,故有限体积格式(11)—(14)是唯一可解的。

定理 2 温度 T 的有限体积格式(15)—(18)的解存在且唯一。

证明 记

$$\mathbf{T}^n = (u_0^n, u_1^n, u_2^n, \cdots, u_M^n)^T。$$

由式(8)可得初始时刻 t_0 的水汽浓度 \mathbf{T}^0 。

假设 t_n 时刻的水汽浓度 \mathbf{T}^n 已知,则 t_{n+1} 时刻的水汽浓度 \mathbf{T}^{n+1} 可通过有限体积格式(15)—(18)得到。有限体积格式(15)—(18)的矩阵形式为 $\mathbf{B} \cdot \mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{T}^n + \mathbf{U}_2$, 即:

$$\begin{bmatrix} 1+2s_3+s_4 & -2s_3 & & & \\ -s_3 & 1+2s_3 & -s_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -s_3 & 1+2s_3 & -s_3 \\ & & & -2s_3 & 1+2s_3+s_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0^{n+1} \\ u_1^{n+1} \\ \vdots \\ u_{M-1}^{n+1} \\ u_M^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0^n + b_1 \Delta t \delta_t w_0^{n+\frac{1}{2}} + \frac{b_3 T_0 \Delta t}{\Delta x} \\ u_1^n + b_1 \Delta t \delta_t w_1^{n+\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ u_{M-1}^n + b_1 \Delta t \delta_t w_{M-1}^{n+\frac{1}{2}} \\ u_M^n + b_1 \Delta t \delta_t w_M^{n+\frac{1}{2}} + \frac{b_3 T_e \Delta t}{\Delta x} \end{bmatrix},$$

$$\text{其中: } s_3 = \frac{b_2 \Delta t}{(\Delta x)^2} > 0, s_4 = \frac{b_3 \Delta t}{\Delta x} > 0。$$

由于系数矩阵 \mathbf{B} 为严格对角占优矩阵,故有限体积格式(15)—(18)是唯一可解的。

接下来证明解的收敛性。这部分给出如下两个引理。

引理 1^[16] 设 v_1, v_2 为 Ω_h 上的网格函数,则有

$$-\Delta x \sum_{j=1}^{M-1} (\delta_x^2 v_{1,j}) v_{2,j} = \Delta x \sum_{j=1}^M (\delta_x v_{1,j-\frac{1}{2}}) (\delta_x v_{2,j-\frac{1}{2}}) + (\delta_x v_{1,\frac{1}{2}}) v_{2,0} - (\delta_x v_{1,M-\frac{1}{2}}) v_{2,M}。$$

引理 2 (Gronwall 不等式^[16]) 设 $\{F^k\}_{k=0}^\infty$ 是一个非负序列, c 和 g 是两个非负常数,且满足

$$F^{k+1} \leq (1+c\tau)F^k + \tau g, k=0,1,2,\cdots,$$

则有

$$F^k \leq e^{ck\tau} \left(F^0 + \frac{g}{c} \right), k=0,1,2,\cdots。$$

2.2 解的收敛性

定理 3 设 $w_i(x, t)$ 为定解问题(1)—(4)的解, $\{w_j^n \mid 0 \leq j \leq M, 0 \leq n \leq N\}$ 为有限体积格式(11)—(14)的解,记

$p_{1,j}^n = w_i(x_j, t_n) - w_j^n, 0 \leq j \leq M, 0 \leq n \leq N$, 则对于 $\mathbf{E}_1^n = (p_{1,0}^n, p_{1,1}^n, \cdots, p_{1,M}^n)$, 存在常数 c_3 使得

$$\|\mathbf{E}_1^n\| \leq c_3(\Delta x + \Delta t), n=0,1,2,\cdots,N,$$

其中: $c_3 = \sqrt{2} e^{\frac{N}{2}} c_1$ 。

证明 将式(1)–(4)与式(11)–(14)相减,得到误差方程:

$$\delta_i p_{1,0}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{2a_1}{\Delta x} \delta_x p_{1,\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{a_2}{\Delta x} p_{1,0}^{n+1} + r_{1,0}^n, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (20)$$

$$\delta_i p_{1,j}^{n+\frac{1}{2}} = a_1 \delta_x^2 p_{1,j}^{n+1} + r_{1,j}^n, 1 \leq j \leq M-1, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (21)$$

$$\delta_i p_{1,M}^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{2a_1}{\Delta x} \delta_x p_{1,M-\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{a_2}{\Delta x} p_{1,M}^{n+1} + r_{1,M}^n, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (22)$$

$$p_{1,j}^0 = 0, 1 \leq j \leq M \quad (23)$$

结合式(20)–(23),对 $\delta_i \mathbf{E}_1^{n+\frac{1}{2}}$ 和 \mathbf{E}_1^{n+1} 求内积可得

$$\begin{aligned} (\delta_i \mathbf{E}_1^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{E}_1^{n+1}) &= a_1 \Delta x \sum_{j=1}^{M-1} (\delta_x^2 p_{1,j}^{n+1}) p_{1,j}^{n+1} + \\ &a_1 (\delta_x p_{1,\frac{1}{2}}^{n+1}) p_{1,0}^{n+1} - a_1 (\delta_x p_{1,M-\frac{1}{2}}^{n+1}) p_{1,M}^{n+1} \\ &- \frac{1}{2} a_2 [(p_{1,0}^{n+1})^2 + (p_{1,M}^{n+1})^2] + (\mathbf{R}_1^n, \mathbf{E}_1^{n+1}) = \\ &- a_1 \|\mathbf{E}_1^{n+1}\|_1^2 - \frac{1}{2} a_2 [(p_{1,0}^{n+1})^2 + (p_{1,M}^{n+1})^2] + \\ &(\mathbf{R}_1^n, \mathbf{E}_1^{n+1}) \leq (\mathbf{R}_1^n, \mathbf{E}_1^{n+1}), \end{aligned}$$

又知

$$(\delta_i \mathbf{E}_1^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{E}_1^{n+1}) = \frac{1}{\Delta t} [\|\mathbf{E}_1^{n+1}\|^2 - (\mathbf{E}_1^n, \mathbf{E}_1^{n+1})],$$

于是

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}_1^{n+1}\|^2 &\leq \Delta t (\mathbf{R}_1^n, \mathbf{E}_1^{n+1}) + (\mathbf{E}_1^n, \mathbf{E}_1^{n+1}) \leq \\ &\frac{1}{2} \|\mathbf{E}_1^{n+1}\|^2 + \|\mathbf{E}_1^n\|^2 + (\Delta t)^2 \|\mathbf{R}_1^n\|^2. \end{aligned}$$

整理并由式(10)可得

$$\|\mathbf{E}_1^{n+1}\|^2 \leq 2 \|\mathbf{E}_1^n\|^2 + 2c_1^2 (\Delta t)^2 (\Delta x + \Delta t)^2.$$

根据引理2,注意到 $\|\mathbf{E}_1^0\| = 0$ 且时间步长 $\Delta t < 1$, 得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}_1^n\|^2 &\leq 2e^n c_1^2 (\Delta t)^2 (\Delta x + \Delta t)^2 \leq \\ &2e^N c_1^2 (\Delta x + \Delta t)^2, \end{aligned}$$

即有

$$\|\mathbf{E}_1^n\| \leq c_3 (\Delta x + \Delta t),$$

其中: $c_3 = \sqrt{2} e^{N/2} c_1$ 。

定理4 设 $T(x, t)$ 为定解问题(5)–(8)的解, $\{T_j^n | 0 \leq j \leq M, 0 \leq n \leq N\}$ 为有限体积格式(15)–(18)的解, 记

$p_{2,j}^n = T(x_j, t_n) - u_j^n, 0 \leq j \leq M, 0 \leq n \leq N$, 则对于 $\mathbf{E}_2^n = (p_{2,0}^n, p_{2,1}^n, \dots, p_{2,M}^n)$, 存在常数 c_4 使得

$$\|\mathbf{E}_2^n\| \leq c_4 (\Delta x + \Delta t), n = 0, 1, 2, \dots, N,$$

$$\text{其中: } c_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{3N/2} \sqrt{c_2^2 + 2c_3^2 t_2^2}.$$

定理4的证明过程与定理3类似。

2.3 解的稳定性

假设初始值 w_1 有误差值 φ_1 , 令 $\Phi_1 = (\varphi_1(x_0), \varphi_1(x_1), \dots, \varphi_1(x_M))$, 初始值扰动后, 对应的有限体积格式(11)–(14)中的 w 用 \tilde{w} 代替, 可得

$$\delta_i \tilde{w}_0^{n+\frac{1}{2}} = \frac{2a_1}{\Delta x} \delta_x \tilde{w}_{\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{a_2}{\Delta x} \tilde{w}_0^{n+1} + \frac{a_2 w_0}{\Delta x}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (24)$$

$$\delta_i \tilde{w}_j^{n+\frac{1}{2}} = a_1 \delta_x^2 \tilde{w}_j^{n+1}, 1 \leq j \leq M-1, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (25)$$

$$\delta_i \tilde{w}_M^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{2a_1}{\Delta x} \delta_x \tilde{w}_{M-\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{a_2}{\Delta x} \tilde{w}_M^{n+1} + \frac{a_2 w_e}{\Delta x}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (26)$$

$$\tilde{w}_j^0 = w_1(x_j) + \varphi_1(x_j), 1 \leq j \leq M \quad (27)$$

定理5 设 $\{w_j^n | 0 \leq j \leq M, 0 \leq n \leq N\}$ 为有限体积格式(11)–(14)的解, 记

$$\theta_{1,j}^n = \tilde{w}_j^n - W_j^n, 0 \leq j \leq M, 0 \leq n \leq N,$$

则对于 $\Theta_1^n = (\theta_{1,0}^n, \theta_{1,1}^n, \dots, \theta_{1,M}^n)$, 有

$$\|\Theta_1^n\| \leq \|\Phi_1\|, n = 0, 1, 2, \dots, N.$$

证明 将式(11)–(14)与式(24)–(27)相减, 可得摄动方程

$$\delta_i \theta_0^{n+\frac{1}{2}} = \frac{2a_1}{\Delta x} \delta_x \theta_{\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{a_2}{\Delta x} \theta_0^{n+1}, 0 \leq n \leq N-1 \quad (28)$$

$$\delta_i \theta_j^{n+\frac{1}{2}} = a_1 \delta_x^2 \theta_j^{n+1}, 1 \leq j \leq M-1, 0 \leq n \leq N-1 \quad (29)$$

$$\delta_i \theta_M^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{2a_1}{\Delta x} \delta_x \theta_{M-\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{a_2}{\Delta x} \theta_M^{n+1}, 0 \leq n \leq N-1 \quad (30)$$

$$\theta_j^0 = \varphi_1(x_j), 1 \leq j \leq M \quad (31)$$

结合式(28)–(31), 对 $\delta_i \Theta_1^{n+\frac{1}{2}}$ 和 Θ_1^{n+1} 求内积可得

$$\begin{aligned} (\delta_i \Theta_1^{n+\frac{1}{2}}, \Theta_1^{n+1}) &= -a_1 \|\Theta_1^{n+1}\|_1^2 - \\ &\frac{1}{2} a_2 [(\theta_{1,0}^{n+1})^2 + (\theta_{1,M}^{n+1})^2] \leq 0, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \|\Theta_1^{n+1}\|^2 &\leq (\Theta_1^n, \Theta_1^{n+1}) \leq \\ &\frac{1}{2} \|\Theta_1^{n+1}\|^2 + \frac{1}{2} \|\Theta_1^n\|^2. \end{aligned}$$

整理可得

$$\|\boldsymbol{\Theta}_1^{n+1}\|^2 \leq \|\boldsymbol{\Theta}_1^n\|^2 \leq \|\boldsymbol{\Phi}_1\|^2,$$

即有

$$\|\boldsymbol{\Theta}_1^{n+1}\| \leq \|\boldsymbol{\Phi}_1\|.$$

假设初始值 T_1 有误差值 φ_2 , 令 $\boldsymbol{\Phi}_2=(\varphi_2(x_0), \varphi_2(x_1), \cdots, \varphi_2(x_M))$, 初始值扰动后, 对应的有限体积格式(15)—(18) 中的 u 用 \tilde{u} 代替。

定理 6 设 $\{u_j^n \mid 0 \leq j \leq M, 0 \leq n \leq N\}$ 为有限体积格式(15)—(18)的解, 记

$$\theta_{2,j}^n = \tilde{u}_j^n - u_j^n, 0 \leq j \leq M, 0 \leq n \leq N,$$

则对于 $\boldsymbol{\Theta}_2^n=(\theta_{2,0}^n, \theta_{2,1}^n, \cdots, \theta_{2,M}^n)$ 有存在常数 c_5 使得

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\Theta}_2^n\|^2 &\leq c_5(\|\boldsymbol{\Phi}_1\|^2 + \|\boldsymbol{\Phi}_2\|^2), \\ n &= 0, 1, 2, \cdots, N. \end{aligned}$$

其中 $c_5 = \max\{e^N, 8b_2^2e^N\}$ 。

定理 6 的证明过程与定理 5 类似。

从定理 3—定理 6 可以证明, 有限体积格式数值解稳定且 L_2 意义下一阶收敛。

3 数值模拟与结果分析

下面对单层纺织材料热湿传递问题进行数值模拟。4 种不同纺织材料的材料物理参数见表 1^[6]。假定水蒸气在空气中的扩散系数为 $h_a=2.49 \times 10^{-5}$ m/s, 织物总厚度为 $L=0.007$ m, 总时间为 $T_t=360$ s, 环境温度为 $T_e=1$ $^{\circ}\text{C}$, 皮肤温度为 $T_0(t)=(35.84+\exp(0.0002t))$ $^{\circ}\text{C}$, 环境水汽浓度为 $w_e(t)=(0.05+0.25t-0.001t^2)$ kg/m, 初始织物水汽浓度为 $w_1(x)=0.05$ kg/m。

表 1 4 种纺织材料的材料物理参数

纺织材料	导热系数/ (W·m ⁻¹ ·K ⁻¹)	吸收水汽热量/ (J·kg ⁻¹)	体积热容/ (J·m ⁻³ ·K ⁻¹)	孔隙率	质量对流系数/ (m·s ⁻¹)	热对流系数/ (W·m ⁻² ·K ⁻¹)	曲折系数	吸收系数
棉	0.541	3.5529×10 ⁶	1.863×10 ⁶	0.950	0.170	105.0	1.50	0.4
包棉	0.580	3.1000×10 ⁶	1.910×10 ⁶	0.950	0.170	105.0	1.50	0.4
涤纶	0.500	2.5220×10 ⁶	1.531×10 ⁶	0.980	0.010	120.0	1.95	0.2
羊毛	0.385	4.1245×10 ⁶	1.609×10 ⁶	0.925	0.137	99.4	1.20	0.4

注:数据来源于文献[6]。

下面以涤纶为例进行数值模拟。

单层纺织材料中热湿分布情况如图 2 所示。可以看出, 低温条件下随着时间位置的变化, 织物层的

水汽浓度及温度也发生相应的变化。离人体皮肤越远的位置, 对应的水汽浓度及温度越低。这一分布贴合实际。

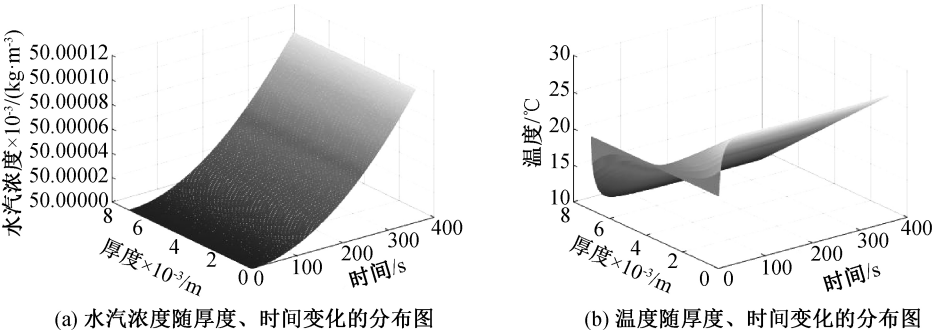


图 2 单层涤纶织物层热湿分布的有限体积数值解

下面对于有限体积法及有限差分法^[7]进行收敛性分析。定义 L_2 范数 E_2 和收敛阶 O_{rd} :

$$\begin{cases} E_2(\Delta x, \Delta t) = \|\boldsymbol{T}^n(\Delta x, \Delta t) - \boldsymbol{T}^n\left(\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta t}{2}\right)\|; \\ O_{rd} = \log_2 \frac{E_2(2\Delta x, 2\Delta t)}{E_2(\Delta x, \Delta t)}. \end{cases}$$

表 2 取不同步长时水汽浓度数值解在 L_2 范数下的误差及相应的收敛阶

空间步长 Δx /m	时间步长 Δt /s	有限体积法		有限差分法 ^[7]	
		$E_2(\Delta x, \Delta t)$	O_{rd}	$E_2(\Delta x, \Delta t)$	O_{rd}
$L/50$	$T_t/100$				
$L/100$	$T_t/200$	4.3070×10^{-11}		1.3819×10^{-10}	
$L/200$	$T_t/400$	2.1504×10^{-11}	1.0021	6.8251×10^{-11}	1.0177
$L/400$	$T_t/800$	1.0541×10^{-11}	1.0286	3.3902×10^{-11}	1.0095

表 3 取不同步长时温度数值解在 L_2 范数下的误差及相应的收敛阶

空间步长 $\Delta x/\text{m}$	时间步长 $\Delta t/\text{s}$	有限体积法		有限差分法 ^[7]	
		$E_2(\Delta x, \Delta t)$	O_{rd}	$E_2(\Delta x, \Delta t)$	O_{rd}
$L/50$	$T_i/100$				
$L/100$	$T_i/200$	1.8228×10^{-5}		2.1367×10^{-5}	
$L/200$	$T_i/400$	8.7684×10^{-6}	1.0558	1.0605×10^{-5}	1.0106
$L/400$	$T_i/800$	4.2978×10^{-6}	1.0287	5.2801×10^{-6}	1.0061

4 结 语

本文针对低温条件下单层纺织材料热湿传递过程,构造了一种用于求解热湿传递模型的有限体格式,并证明了有限体格式在空间和时间方向上均为一阶收敛。数值结果表明,有限体积法的收敛速度在一定程度上优于有限差分法。下一步研究工作是提高有限体积法的收敛阶,并将有限体格式推广至双层及以上纺织材料的正问题求解和参数决定反问题研究中。

参考文献:

[1] 唐世君,周璐瑛,张腾. 显汗条件下织物热湿传递性能的评价方法[J]. 纺织学报, 2000, 21(3): 11-12.

[2] 张辉,徐军,张建春,等. 织物静态热湿舒适性测试分析[J]. 纺织学报, 2004, 25(4):56-58.

[3] 于瑶,钱晓明. 针织服装热湿舒适性预测模型[J]. 纺织学报, 2011, 32(12): 108-113.

[4] Fan J T, Luo Z X, Li Y. Heat and moisture with sorption and condensation in porous clothing assemblies and numerical simulation[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2001, 44(5): 1079.

[5] Fan J T, Cheng X Y, Wen X H, et al. An improved model of heat and moisture transfer with phase change and mobile condensates in fibrous insulation and comparison with experimental results[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2004, 47(10/11): 2343-2352.

[6] Korycki R. Method of thickness optimization of textile structures during coupled heat and mass transport[J]. Fibres and Textiles in Eastern Europe, 2009, 72(1):33-38.

[7] 吕婉莹,徐映红.防火服热湿传递数学建模及人体皮肤

烧伤预测[J].浙江理工大学学报(自然科学版),2020,43(3):380-388.

[8] Xu D H, Ge M B, Zhang H L. Numerical solution of a dynamic model of heat and moisture transfer in porous fabric under low temperature[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2013, 61:149-157.

[9] Du N, Fan J T, Wu H J. Optimum porosity of fibrous porous materials for thermal insulation[J]. Fibers and Polymers, 2008, 9(1): 27-33.

[10] Du N, Fan J T, Wu H J, et al. Optimal porosity distribution of fibrous insulation [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2009, 52(19/20): 4350-4357.

[11] Ye C. Mathematical Modelling and Numerical Simulation of Heat and Moisture Transfer in Textile Assemblies[D]. Hong Kong: City University of Hong Kong, 2010: 26-32.

[12] Fontana É, Donca R, Mancusi E, et al. Mathematical modeling and numerical simulation of heat and moisture transfer in a porous textile medium[J]. The Journal of the Textile Institute, 2016, 107(5):672-682.

[13] 孙志忠. 非线性发展方程的有限差分方法[M]. 北京: 科学出版社, 2018: 2-15.

[14] 孙志忠. 偏微分方程数值解法[M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 2012: 5-27.

[15] 李人宪. 有限体积法基础[M]. 北京: 国防工业出版社, 2005:118-131.

[16] 王风娟,王同科. 一维抛物型方程第三边值问题的紧有限体格式[J]. 数值计算与计算机应用, 2013, 34(1): 59-74.

[17] Angermann L, Wang S. A super-convergent unsymmetric finite volume method for convection-diffusion equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2019, 358:179-189.

(责任编辑:康 锋)