

# 有赎回权的住房反向抵押贷款定价方法的研究

林 枫, 张美玲

(浙江理工大学数学科学系, 杭州 310018)

**摘 要:** 针对期权法的不足,修正了有赎回权的住房反向抵押贷款的定价方式,得到了改进的期权定价模型。又考虑到人的寿命对贷款期限的影响,进而利用精算原理对改进的期权定价模型进行了优化,得到了更精确合理的期权—精算定价模型及定价公式,并通过实例分析验证了方法的可行性与合理性。

**关键词:** 住房反向抵押贷款; 赎回权; 期权法; 期权—精算法

**中图分类号:** F224.9      **文献标志码:** A

## 0 引 言

我国人口老龄化问题日益严峻,但我国的社会养老体系依然不够健全。同时我国多年计划生育政策的效果正在凸显,大量“四二一”家庭和“空巢”家庭的涌现,以及老年抚养比的上升无疑给传统的家庭养老方式带来沉重的压力,使得养儿防老越来越不现实。因此,发展多种养老模式变得刻不容缓,“以房养老”(或称住房反向抵押贷款)便是其中之一。现阶段有两种住房反向抵押贷款:无赎回权的住房反向抵押贷款与有赎回权的住房反向抵押贷款。有赎回权的住房反向抵押贷款是指当贷款期限结束时,还款人(借款人或借款人的继承人)面临两种选择:一是由还款人将住房反向抵押贷款的本息总额还清,从而把住房的抵押权收回;二是住房由贷款机构收回,继而拍卖出售,出售额归贷款机构所有<sup>[1]</sup>。如果出售额小于贷款本息余额,根据无追索权条款,贷款机构无权向借款人或其继承人追讨不足部分。由于在有赎回的住房反向抵押贷款中,借款人拥有优先选择权,因此它与无赎回权的住房反向抵押贷款有着不同的定价方法。

纵观国内外相关文献,无赎回权的住房反向抵押贷款的定价方法主要有支付因子法和保险精算

法,而普遍认可的定价方法是精算法<sup>[2]</sup>,因为精算法比支付因子法有较强的激励性<sup>[3]</sup>。而目前,有赎回权的住房反向抵押贷款的定量研究相当少,且定价方法只有期权法一种<sup>[4]</sup>。研究发现,这种期权定价方法存在着两个不足之处:第一,它是通过调整利率来反映期权费对定价的影响,这种操作貌似可行,但缺乏调整依据,更重要的是缺乏实务中的定量调整方法;第二,它没有考虑到人的死亡概率对贷款期限和定价的影响,定价模型缺乏精确性与合理性。这些定价弊端不利于借贷双方的利益均衡化,在一定程度上阻碍了以房养老模式产品的推行。

笔者将针对期权法的两个不足,结合精算相关原理对有赎回权的住房反向抵押贷款的定价方法进行一些探讨,逐步改进期权法,最终建立有赎回权的住房反向抵押贷款期权—精算定价模型。

## 1 改进的期权定价模型

有赎回权的住房反向抵押贷款产品不仅是一种贷款产品,它更具有期权性质,借款人通过有赎回权的住房反向抵押贷款获得了一个隐含的欧式看跌期权。由B-S欧式看涨期权定价模型和看涨期权与看跌期权之间的平价关系得出B-S欧式看跌期权的定价模型<sup>[5]</sup>。

B-S 期权定价模型的基本假设:

1) 金融资产收益率服从对数正态分布。从动态角度看,标的资产价格遵循  $\mu, \sigma$  为常数的几何布朗运动;

2) 无风险利率为常数,且对所有到期日相同;

3) 市场无摩擦,即不存在税收和交易成本;

4) 金融资产在期权有效期内无红利及其他所得;

5) 不存在无风险套利机会;

6) 市场运作连续。

记  $X$  为期权的执行价格; $\lambda$  为贷款比率; $H_0$  为被抵押住房在合约开始时的初始评估价值; $r$  为住房反向抵押贷款的年利率; $A$  为无赎回情形下借款人每年年初可获得的等额年金给付额。因为期权执行价格就是贷款期限结束时的贷款本息总额,则在  $T$  年每年年初等额支付方式下,期权的执行价格为:

$$X = A\ddot{a}_{T|} (1+r)^T = (1+r)^T \sum_{t=0}^{T-1} \frac{A}{(1+r)^t} \quad (1)$$

其中,  $\ddot{a}_{T|}$  表示  $T$  期的标准期初年金的现值,  $T$  为期权合约有效期,即贷款期限或年金支付期限。这里,  $T$  为常数,且  $T \leq \ddot{e}_x$  ( $\ddot{e}_x$  表示某一年龄某种性别的借款人群体的平均寿命,可根据经验生命表查得)。当  $T < \ddot{e}_x$  时,可理解为年金支付期限为定期;当  $T = \ddot{e}_x$  时,可理解为年金支付期限为终身。

又记  $P$  为住房反向抵押贷款看跌期权的价格,即期权费; $\delta$  为连续复利形式的无风险利率; $\sigma$  为房价变动波动率,即以连续复利形式表示的房价变动率的标准差,则期初  $t = 0$  时刻的期权费为:

$$P = Xe^{-\delta T} [\Phi(-d_2)] - H_0 [\Phi(-d_1)] \quad (2)$$

$$\text{其中, } d_1 = \frac{\ln(H_0/X) + (\delta + \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}}; d_2 =$$

$d_1 - \sigma \sqrt{T}; \Phi(x)$  为标准正态分布函数。

再记  $\bar{A}$  为有赎回情形下借款人每年年初可获得的等额年金给付额,则以  $T$  年每年年初等额支付的方式,借款人每年年初等额领取的资金额为:

$$\bar{A} = \frac{\lambda H_0 - P}{\ddot{a}_{T|}} = \frac{\lambda H_0 - P}{\sum_{t=0}^{T-1} \frac{1}{(1+r)^t}} \quad (3)$$

这一改进的期权定价模型有效地避免了传统期权定价法中借贷款利率间的无关联性和产品针对性,使定价模型更有理论依据和可操作性。

## 2 期权—精算定价模型

由于借款人的存活寿命不确定,期权合约的有效期  $T$  也是不确定的。下文将引入整值剩余寿命随

机变量  $K(x)$ ,把合约有效期转变为随机变量  $K(x)$  的函数,即  $T = \begin{cases} K(x) + 1, & K(x) < n \\ n, & K(x) \geq n \end{cases}$ ,其中  $n$  为最长合约期限。考虑人的生存及死亡概率,利用无赎回权情形下的精算定价模型结合精算原理对期权定价法做进一步的改进。具体模型的改进思路及步骤如下。

1) 对应无赎回权的住房反向抵押贷款产品定价

假设借款人整数年龄为  $x$  岁(简记  $(x)$ ),住房价格存在年均变化率  $g$ ,则在合约开始后的第  $k$  年,即借款人在  $x+k$  岁时该住房的价值为  $\lambda H_0(1+g)^k$ 。如果借款人在  $x+k$  岁死亡,那么贷款人愿意支付给借款人的货币总值  $LS_{(k)}$  应等于该住房在第  $k$  年的房产价值在合约开始时的现值,即  $LS_{(k)} = \lambda H_0 \frac{(1+g)^k}{(1+r)^k}$ 。于是可得无赎回权的住房反向抵押贷款产品一次性的趸领额为:

$$LS = E(LS_{(K)}) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda H_0 \frac{(1+g)^k}{(1+r)^k} \cdot {}_k|q_x + \sum_{k=n}^{\infty} \lambda H_0 \frac{(1+g)^n}{(1+r)^n} \cdot {}_k|q_x, \quad (4)$$

其中,  $LS$  是贷款机构愿意支付给借款人的货币总值在合约开始时的现值;  ${}_k|q_x$  为  $x$  岁的借款人在  $x+k$  岁到在  $x+k+1$  岁之间死亡的概率,  ${}_k p_x$  为  $x$  岁的借款人能存活到  $x+k$  岁的概率。

而每年年初等额以生存年金形式领取的资金额为:

$$B = \frac{LS}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \lambda H_0 \frac{(1+g)^k}{(1+r)^k} \cdot {}_k|q_x + \sum_{k=n}^{\infty} \lambda H_0 \frac{(1+g)^n}{(1+r)^n} \cdot {}_k|q_x}{\sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^{-k} \cdot {}_k p_x}, \quad (5)$$

其中,  $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$  表示在  $x$  岁签发保单、每年年初付款 1 单位,以年金受领人生存为前提最多给付  $n$  年的定期生存年金的精算现值。

2) 有赎回权的期权费定价

基于以期权法推导的有赎回权的住房反向抵押贷款的定价模型,当满足 B-S 期权定价模型的基本假设和利率与房价波动独立的条件时,一次性给付方式下的执行价格为:

$$X = E[LS \cdot (1+r)^T] = LS \left( \sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^{k+1} {}_k|q_x + \sum_{k=n}^{\infty} (1+r)^n {}_k|q_x \right) \quad (6)$$

则期初  $t = 0$  时刻的期权费为:

$$P = E\{Xe^{-\delta T}[\Phi(-d_2)] - H_0[\Phi(-d_1)]\} = X\Phi(-d_2) \left( \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\delta(k+1)} \cdot {}_k q_x + \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\delta k} \cdot {}_k q_x \right) - H_0[\Phi(-d_1)] \quad (7)$$

其中,

$$d_1 = E \left[ \frac{\ln(H_0/X) + (\delta + \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}} \right] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\ln(H_0/X) + (\delta + \sigma^2/2) \cdot (k+1)}{\sigma \sqrt{k+1}} \cdot {}_k q_x + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\ln(H_0/X) + (\delta + \sigma^2/2)n}{\sigma \sqrt{n}} \cdot {}_k q_x$$

$$d_2 = E(d_1 - \sigma \sqrt{T}) =$$

$$d_1 - \sigma \left( \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{k+1} \cdot {}_k q_x + \sum_{k=n}^{\infty} \sqrt{n} \cdot {}_k q_x \right)$$

3) 有赎回权的住房反向抵押贷款产品定价

利用以上对期权定价的改进办法可得借款人每年年初等额领取的资金额为:

$$\bar{B} = \frac{LS - P}{\ddot{a}_{x:\overline{m}}} \quad (8)$$

其中,  $LS$  与  $P$  如式(4)和式(7)所示。

当  $n \rightarrow \infty$  时, 上述公式即为终身给付时的相应

表1 期权法与期权一精算法在有赎回权情形下的养老金对比

房产价值/ 万元	期权法			期权一精算法		
	一次给付额/元	年领额/元	月领额/元	一次给付额/元	年领额/元	月领额/元
30	114 870	8 736	765.470 3	123 122	10 788	820.463 3
50	191 449	14 559	1 275.783 9	205 204	17 980	1 367.438 8
80	306 319	23 295	2 041.254 2	328 326	28 767	2 187.902 0
100	382 899	29 119	2 551.567 7	410 407	35 959	2 734.877 5

根据国家统计局最新数据, 2010年上海居民人均年消费支出为7281.9元, 上海人均住房居住面积为17.5 m<sup>2</sup>, 同年上海二手房均价在2万元左右。表1显示, 若上海老年人采用有赎回权的住房反向抵押贷款方式养老, 晚年生活可以得到充分的保障, 且借款人在期权一精算法定价模型中所能领取的一次性给付额、年等额提取额与月等额提取额相较于期权法定价模型中的均略高。这说明笔者针对有赎回权的住房反向抵押贷款产品的定价方式是可行的, 并且期权一精算法比改进的期权法定价更为宽松, 更能保障老年人的晚年生活, 且更符合我国的实际。

## 4 结论

笔者对传统的有赎回权的住房反向抵押贷款期权定价模型进行了整理和多次改进, 重点以期权一

结论。由于考虑到寿命的不确定性, 这个期权一精算定价模型相较于前面改进的期权定价模型更合理, 且更具有实际意义和实务价值。

## 3 实例分析

具体参数设定如下: 男性借款人年龄为60岁; 根据2011年7月6日起央行调整的5年以上商业性个人住房贷款利率的下限, 设定住房反向抵押贷款的年利率  $r = 4.935\%$ ; 贷款比例  $\lambda = 70\%$ ; 根据中房上海住房指数2010年6月到2011年5月的数据, 得到住房价格的年平均变化率  $g = 5.50\%$ ; 借鉴国外经验, 以我国2011年7月6日起央行调整的5年以上商业性个人住房贷款利率的下限作为无风险利率, 则连续复利形式的无风险利率  $\delta = 4.817\%$ ; 采用上海市1998~2010年商品住宅价格进行分析, 得到在连续复利形式下的房价变动波动率  $\sigma = 32.79\%$ ; 期权法下的合约期限  $T$  为20年; 期权一精算法下的最长合约期限  $n$  为20年。则借款人在不同房产价值下使用期权法与期权一精算法定价的有赎回权产品所能领取的养老金如表1所示。

精算法构筑了有赎回权的住房反向抵押贷款的一次性给付产品和生存年金产品的定价模型, 建立了一次性给付额和年等额提取额与住房初始价值的关系式。在模型建立过程中, 期权一精算法在前期考虑了合约期间房价的波动以及死亡时刻的不确定性, 在后期用精算方法消除了期权费对贷款机构的不利影响, 使得模型更加精确和合理。实例分析将期权法与期权一精算法进行了比较, 由数据比较可得, 期权一精算法定价模型相较于改进的期权法定价模型更有利于保障老年人的晚年生活。可以预见, 将金融与精算方法相结合并运用到以房养老模式的定价与风险研究中应该具有广阔的应用空间和较高的研究价值和实用价值, 从而能充分发挥住房除生活居所和投资外的养老保障功能, 为金融保险部门以房养老模式政策推行提供决策参考, 缓解我国的养老保障压力。

**参考文献:**

- [1] 王 微, 吴君民, 王秀萍. 有赎回权的住房反向抵押贷款定价研究[J]. 研究与探索, 2009(12): 35-36.
- [2] Mitchell O, Piggott J. Unlocking housing equity in Japan[J]. J Japanese Int Economics, 2004(18): 466-505.
- [3] 阎春宁, 张 伟, 祝罗骁. 住房反向抵押贷款定价模型  
的比较分析[J]. 价值工程, 2010(31): 31-32.
- [4] 李瑾卓. 有赎回权的住房反向抵押贷款定价模型的定量  
研究[J]. 经济与管理研究, 2011, 30(12): 124-128.
- [5] Goodman V, Stampfli J. The Mathematics of Finance:  
Modeling and Hedging[M]. Australia, Pacific Grove,  
CA: Brooks/Cole, 2001: 25-121.

## Research on Pricing Method of Housing Reverse Mortgage Loan with Right of Redemption

LIN Feng, ZHANG Mei-ling

(School of Sciences, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

**Abstract:** This paper revises the pricing method of housing reverse mortgage loan with right of redemption and obtains an advanced option pricing model in allusion to shortages of option method. Considering the influence of lifetime on the term of loan, it further uses actuarial principle to optimize the advanced option pricing model and obtains a more accurate and reasonable option-actuarial pricing model and method, and verifies the feasibility and rationality of the method through case analysis.

**Key words:** housing reverse mortgage loan; right of redemption; option method; option-actuarial method

(责任编辑: 马春晓)