

牛顿图的性质与拟齐次多项式系统的中心问题

杜飞飞, 黄土森

(浙江理工大学理学院, 杭州 310018)

摘要: 文章研究了牛顿图与拟齐次多项式的一些基本性质,并在此基础上给出了拟齐次多项式系统单值奇点是中心还是焦点的充要条件,最后的例子表明它本质上推广了有关文献中的相应结果。

关键词: 牛顿图; 拟齐次多项式系统; 中心问题

中图分类号: O175.14 **文献标志码:** A

0 引言

在平面解析微分系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

的定性理论研究中,确定在系统的某个孤立奇点邻域内的拓扑性态是主要的未解决问题之一^[1],并且与 Hilbert 第十六问题的解决,特别地与研究微分系统的分支问题有密切的联系^[2]。如果奇点的线性部分的系数矩阵不恒等于零,奇点的分类问题基本上已经得到解决^[3-4]。关于奇点的线性部分的系数矩阵恒等于零(这样的奇点通常称为退化奇点),则奇点的分类问题远未解决^[1,5]。目前国内外文献中研究这类问题的有效方法之一是采用齐次 blow-up 技巧^[4],即先对式(1)中的 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 进行齐次分解,然后作一系列的齐次 blow-up 变量变换以便最终把奇点打开成为初等奇点再进行分类。文献[6]证明了任何平面解析系统的孤立奇点总可以经过有限次齐次 blow-up 把退化奇点打开成为初等奇点。然而,当系统的奇点的次数(即 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 中最低次齐次单项式的次数)比较高时,需要经过多次齐次 blow-up,计算十分复杂。为了克服这一不足之处,文献[1,7-8]利用牛顿图,对 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 进行拟齐次分解,然后做拟齐次 blow-up 变量变换以便把奇点打开成为初等奇点,并且把这种方法应用于一些特殊的平面解析微分

系统。

笔者主要是深入研究牛顿图及拟齐次多项式的一些性质,并把文献[9]中区分齐次系统的中心问题(区分一个单值奇点是中心还是焦点的问题称为中心问题)条件推广到拟齐次多项式系统情形,最后应用到具体例子加以验证。

1 牛顿图及其性质

考虑如下一般形式的平面解析微分系统

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (2)$$

其中

$$P(x, y) = \sum_{i \geq 0, j \geq 1} a_{ij} x^i y^{j-1}, Q(x, y) = \sum_{i \geq 1, j \geq 0} b_{ij} x^{i-1} y^j.$$

系统(2)所对应的向量场通常记为^[7]

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\sum_{i \geq 0, j \geq 1} a_{ij} x^i y^{j-1} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\sum_{i \geq 1, j \geq 0} b_{ij} x^{i-1} y^j \right) \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3)$$

定义 1.1^[1] 系统(2),也是向量场(3)的支撑集 \mathfrak{N} 是集合

$$\{(i, j)^T \mid (a_{ij}, b_{ij})^T \neq (0, 0)^T \text{ 且 } i, j \in \mathbf{N}\},$$

其中 \mathbf{N} 表示自然数集合 $\{0, 1, 2, \dots\}$, \mathfrak{N} 中的点称为支撑点,向量 $(a_{ij}, b_{ij})^T$ 称为点 $(i, j)^T \in \mathfrak{N}$ 的系数向量。

定义 1.2^[1] 考虑集合 $\bigcup_{(i, j)^T \in \mathfrak{N}} ((i, j)^T + \mathbf{R}_+^2)$,

其中 \mathbf{R}^2 为第一象限, 这个集合凸包的边界由两条射线和一条折线组成(这条折线可以退化为一个点)。折线连同不在坐标轴上的射线(如果它们存在的话)叫做系统(2), 也是向量场(3)的牛顿图。牛顿图中的射线或折线上的线段叫做牛顿图的边(折线上的线段也称为有界边), 它们的端点叫做牛顿图的顶点。显然, 牛顿图中的顶点必是 \mathcal{N} 中的点, 反之不然。

定义 1.3^[1] 如果牛顿图的顶点不位于坐标轴上, 则称其为内顶点, 否则称其为外顶点。

定义 1.4^[1] 设 $(a_{ij}, b_{ij})^T$ 为牛顿图的顶点 $V = (i, j)^T$ 系数向量, 则 V 的指数 α_v 定义为

$$\alpha_v = \begin{cases} \frac{b_{ij}}{a_{ij}}, & \text{当 } a_{ij} \neq 0; \\ \infty, & \text{当 } a_{ij} = 0. \end{cases}$$

定义 1.5^[1] 牛顿图的有界边 l 的指数 α_l 定义为边 l 与纵坐标所夹锐角的正切值。根据端点坐标是自然数这一特点, α_l 是一正有理数 $\frac{t_2}{t_1}$, 数对 $t = (t_1, t_2)^T$ 称为边 l 的类型。如果牛顿图包含一条无界的水平边, 则它的指数定义为 ∞ , 其类型是 $(0, 1)^T$ 。如果牛顿图包含一条无界的垂直边, 则它的指数定义为 0, 其类型为 $(1, 0)^T$ 。图 1 和图 2 分别给出了有两条有界边和两条无界边的牛顿图的例子。

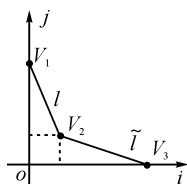


图 1 有两条有界边的牛顿图的例子

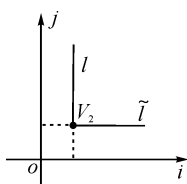


图 2 有两条无界边的牛顿图的例子

附注 1.1 上面关于向量场的支撑集、牛顿图、牛顿图的边及边指数等概念对一个解析函数仍有意义。

定义 1.6^[5] 平面向量场的一个奇点称为初等的, 如果该向量场的线性部分的矩阵在该点至少有一个非零的特征值。

下面给出牛顿图的一些性质, 其中有些在文献[5]中给出, 但没有给出证明。为方便起见, 把向量场(3)改写成如下形式

$$\frac{X(x, y)}{y} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{Y(x, y)}{x} \frac{\partial}{\partial y}, \quad (4)$$

其中

$$X(x, y) = yP(x, y) = \sum_{i \geq 0, j \geq 1} a_{ij} x^i y^j, \\ Y(x, y) = xQ(x, y) = \sum_{i \geq 1, j \geq 0} b_{ij} x^i y^j,$$

从而 X 和 Y 分别可以被 y 和 x 整除, 此时(2)的另一

种形式为

$$\begin{cases} y\dot{x} = X(x, y) \\ x\dot{y} = Y(x, y). \end{cases} \quad (5)$$

性质 1.1 向量场(4)的支撑集 \mathcal{N} 中位于 i 轴上的点具有形如 $(0, b)^T$ 的系数向量, 位于 j 轴上的点具有形如 $(a, 0)^T$ 的系数向量。

证明 设位于 i 轴上的点 V_m 的坐标为 $(m, 0)^T$, 且点 V_m 系数向量为 $(a, b)^T$, 则 $X(x, y)$ 中必有项 ax^m 。由 $y \mid X(x, y)$ 知必有 $y \mid ax^m$, 又 $y \nmid x^m$, 故必有 $a = 0$, 从而点 V_m 有形如 $(0, b)^T$ 的系数向量。同理可证位于 j 轴上的点具有形如 $(a, 0)^T$ 的系数向量。

性质 1.2 向量场(4)可以被 y (或 x) 整除, 当且仅当下列两个条件之一成立:

- a) 牛顿图到轴 $j = 0$ (或 $i = 0$) 的距离大于 1;
- b) 牛顿图到轴 $j = 0$ (或 $i = 0$) 的距离等于 1, 且支撑集中位于直线 $j = 1$ (或 $i = 1$) 的任何点的系数向量的第一个分量为 0。

证明 仅证明括号外部分, 括号内部分同理可证。向量场(4)可以被 y 整除, 当且仅当 $y \mid \sum a_{ij} x^i y^{j-1}$, 且 $y \mid \sum b_{ij} x^{i-1} y^j$ 。注意到牛顿图到轴 $j = 0$ 的距离即为 y 的次数, 所以 $y \mid \sum a_{ij} x^i y^{j-1}$ 当且仅当以下条件之一成立:

- a) $y \mid y^{j-1}$, 故 $j - 1 \geq 1$, 即 $j \geq 2$;
- b) 如果 $j = 1$, 则必有 $a_{ij} = 0$ 。

所以, 向量场(4)可以被 y 整除, 当且仅当

- a) $j \geq 2$;
- b) 如果 $j = 1$, 则必有 $a_{ij} = 0$ 。

性质 1.3 设原点是向量场(4)的孤立奇点, 则它的牛顿图中没有顶点在 i 轴 (或 j 轴) 上当且仅当 $y = 0$ (或 $x = 0$) 是该向量场的轨线。

证明 仅证明括号外部分, 括号内部分同理可证。

充分性: 设 $y = 0$ 是向量场的相曲线, 则 $y \mid \dot{y} = \frac{Y(x, y)}{x}$, 即 $xy \mid Y(x, y)$ 。倘若有顶点位于 i 轴, 则必有形如 ax^m 的项位于 $Y(x, y)$ 或 $X(x, y)$ 中, 其中 $a \neq 0$ 且 $m \geq 1$ 。注意到这样的项不可能位于 $X(x, y)$ 中, 否则由 $y \mid X(x, y)$ 知 $y \mid ax^m$, 矛盾; 从而 $y \mid ax^{m-1}$, 这也矛盾。故向量场的牛顿图没有顶点在 i 轴。

必要性: 因为牛顿图中没有顶点在 i 轴, 所以在 $X(x, y)$ 与 $Y(x, y)$ 中没有形如 ax^m 的项, 其中 $a \neq 0$ 且 $m \geq 1$, 从而 $Y(x, y)$ 的各项中必有 y 因子, 故 y

$= 0$ 是该向量场的轨线。

推论 1.1 向量场(4)的原点是单值的,那么向量场(4)的牛顿图必有两个外顶点。

证明 如果向量场(4)的原点是单值的, $y = 0$ (或 $x = 0$) 必不是该向量场的轨线,由性质 1.3 可知向量场(4)的牛顿图必有两个顶点分别位于 i 轴、 j 轴,即向量场(4)的牛顿图必有两个外顶点。

性质 1.4 向量场(4)的牛顿图包含顶点 $(0,1)$ 或 $(1,0)$ 之一,当且仅当原点不是向量场的奇点。

证明 必要性:设向量场包含顶点 $(0,1)$,则在 $X(x,y)$ 与 $Y(x,y)$ 中必有形如 ay 的项,其中 $a \neq 0$ 。因为 $x \mid Y(x,y)$,所以 $Y(x,y)$ 中不含这样的项,从而 $y\dot{x} = ay + \dots$,且 $a \neq 0$,即 $\frac{X(x,y)}{y}$ 中有非零常数项 a ,所以原点不是向量场的奇点。同理可证若向量场包含 $(1,0)$,则原点也不是向量场的奇点。

充分性:设原点不是向量场的奇点,则在原点 $\dot{x} \neq 0$ 与 $\dot{y} \neq 0$ 至少有一个成立。若在原点 $\dot{x} \neq 0$,从 $\dot{x} = \sum a_{ij}x^i y^{j-1}$ 可以看出必有 $i = 0, j-1 = 0$,且 $a_{01} \neq 0$,即牛顿图包含顶点 $(0,1)$ 。同理可证若在原点 $\dot{y} \neq 0$,牛顿图包含顶点 $(1,0)$ 。

性质 1.5 设原点是向量场(4)的孤立奇点,如果牛顿图中有顶点 $(1,1)$,且与其对应的系数向量为 (a,b) ,那么原点是向量场的初等奇点,且向量场的特征值为 a,b 。

证明 依假设有

$$\begin{cases} y\dot{x} = axy + cy^2 + \dots, \\ x\dot{y} = dx^2 + bxy + \dots, \end{cases} \text{即} \begin{cases} \dot{x} = ax + cy + \dots, \\ \dot{y} = dx + by + \dots. \end{cases}$$

若 c, d 都不为零,即 $cd \neq 0$,则由

$$\begin{cases} y\dot{x} = axy + cy^2 + \dots, \\ x\dot{y} = dx^2 + bxy + \dots \end{cases}$$

可知在牛顿图上同时有 x^2, y^2, xy 对应的点位于同一条边上,这样就与 $(1,1)$ 为顶点的定义矛盾(此时 $(1,1)$ 不是端点)。故 c, d 至少有一个为零,不妨设 $d = 0$,

由向量场在原点的线性矩阵为 $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$,又 $(a,b) \neq (0,0)$,可知原点是向量场的初等奇点,且特征值为 a,b 。

附注 1.2 性质 1.5 的逆命题一般是不对的。例如,考虑下面的系统

$$\begin{cases} y\dot{x} = xy + 2y^2 + \dots, \\ x\dot{y} = 2x^2 + xy + \dots, \end{cases}$$

显然 $(1,1), (0,2), (2,0) \in \mathfrak{N}$,从而 $(1,1)$ 不是牛顿图中的顶点,但原点是该系统的初等奇点。

2 拟齐次多项式及其分解

定义 2.1^[1] 设 $t = (t_1, t_2)^T \neq (0,0)^T$,其中 t_1, t_2 为没有公因子的非负整数,一个二元函数 $f(x, y)$ 称为 t 型 k 次的拟齐次函数,如果

$$f(\epsilon^{t_1}x, \epsilon^{t_2}y) = \epsilon^k f(x, y),$$

并且也把 $f(x, y)$ 称为关于变量 x 与 y 分别具有权重为 t_1 与 t_2 的 k 次的拟齐次函数。

把 t 型 k 次的拟齐次多项式构成的线性空间记作 \mathcal{P}_k^t 。另外,如果 $t = (1,1)^T$,这时拟齐次多项式即为我们所熟悉的齐次多项式。

定义 2.2^[1] 向量场 $F_k^t = (P, Q)^T$ 称为是 t 型 k 次的拟齐次向量场,如果

$$P \in \mathcal{P}_{k+t_1}^t \text{ 且 } Q \in \mathcal{P}_{k+t_2}^t.$$

把 t 型 k 次的拟齐次向量场构成的线性空间记作 \mathcal{Q}_k^t 。

下面的平面解析系统的拟齐次分解性质,是平面解析系统的齐次分解的推广。

性质 2.1 任何解析平面向量场都可以展成 t 型连续次数的拟齐次向量场和,

$$\dot{x} = F(x) = F_r(x) + F_{r+1}(x) + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} F_{r+j}(x) \quad (6)$$

其中 r 是某个正整数, $F_{r+j} = (P_{r+j+t_1}, Q_{r+j+t_2})^T \in \mathcal{Q}_{r+j}^t$,如图 3 所示。

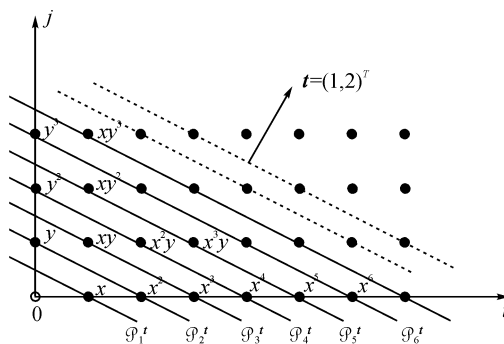


图 3 $t = (1,2)^T$ 型连续次数的拟齐次项单项式的示意图

推论 2.1 t 型 k 次的拟齐次多项式的牛顿图只有一条有界边,并且它的所有支撑点都在这条边上。

3 拟齐次系统中心与焦点的条件

考虑系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F_1(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = F_2(x, y), \end{cases} \quad (7)$$

其中

$$F_1(x, y) \in \mathcal{P}'_{k+t_1} \text{ 且 } F_2(x, y) \in \mathcal{P}'_{k+t_2},$$

$k \geq 1$ 并且 $F_1(x, y)$ 与 $F_2(x, y)$ 是没有公因式, 即系统(7) 是一个 t 型 k 次的拟齐次多项式系统, 且原点是它的一个孤立奇点。

令 $x = r^{t_1} \cos \theta, y = r^{t_2} \sin \theta$, 则系统(7) 变为

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r^{k+1} H(\theta), \\ \frac{d\theta}{dt} = r^k G(\theta), \end{cases} \quad (8)$$

其中

$$H(\theta) = \frac{\cos \theta F_1(\cos \theta, \sin \theta) + \sin \theta F_2(\cos \theta, \sin \theta)}{t_1 \cos^2 \theta + t_2 \sin^2 \theta},$$

$$G(\theta) = \frac{t_1 \cos \theta F_2(\cos \theta, \sin \theta) - t_2 \sin \theta F_1(\cos \theta, \sin \theta)}{t_1 \cos^2 \theta + t_2 \sin^2 \theta}.$$

显然, 如果 θ_0 是 $G(\theta)$ 的一个零点, 则由(7) 的原点是孤立奇点的假设知 $H(\theta_0) \neq 0$, 所以射线 $\theta = \theta_0$ 是(8) 从而是(7) 的轨线, 从而原点不可能是(7) 的单值奇点。于是我们得到原点是(7) 的单值奇点的充要条件。

定理 3.1 原点是系统(7) 的单值奇点当且仅当 $G(\theta) \neq 0$ 。

文献[9] 给出了区分齐次系统的单值奇点是中心还是焦点的充分条件, 文献[8] 利用广义三角函数变换

$$x = r^{t_1} \text{Cs}\theta, y = r^{t_2} \text{Sn}\theta$$

把文献[9] 中相应结果推广到拟齐次系统(7) 情形, 给出了拟齐次系统(7) 的奇点是单值奇点的充分条件, 并进一步给出该单值奇点是中心还是焦点的充分条件。由于广义三角函数 $\text{Cs}\theta$ 与 $\text{Sn}\theta$ (是周期函数) 的周期表达式

$$T_t = 4t_1 \int_0^1 \frac{1}{(1 - x^{2t_1})^{\frac{2t_2-1}{2t_2}}} dx$$

比较复杂, 难以求得, 使得在实际应用上受到限制。下面的定理给出了拟齐次系统(7) 的单值奇点是中心还是焦点的容易判别的充要条件。

定理 3.2 设原点是拟齐次系统(7) 的单值奇点。

1) 系统(7) 的原点 O 是中心 (即存在原点的一个邻域, 使得(7) 在该邻域中的轨线都是闭轨线) 当且仅当 $\int_0^{2\pi} \frac{H(\theta)}{G(\theta)} d\theta = 0$ 。

2) 系统(7) 的原点 O 是稳定的焦点 (即存在原点的一个邻域, 使得(7) 在该邻域中的轨线都是螺旋线, 并且当 $t \rightarrow +\infty$ 时趋于原点) 当且仅当

$$G(\theta) \int_0^{2\pi} \frac{H(\theta)}{G(\theta)} d\theta < 0.$$

3) 系统(7) 的原点 O 是不稳定的焦点 (即存在原点的一个邻域, 使得(7) 在该邻域中的轨线都是螺旋线, 并且当 $t \rightarrow -\infty$ 时趋于原点) 当且仅当

$$G(\theta) \int_0^{2\pi} \frac{H(\theta)}{G(\theta)} d\theta > 0.$$

证明 因为系统(7) 的原点是单值奇点, 所以由定理 3.1 知 $G(\theta)$ 定号, 从而系统(8) 的每条轨线可以表示为 $r = r(\theta)$ 的形式, 其中 $r(\theta)$ 是方程

$$\frac{dr}{d\theta} = r \frac{H(\theta)}{G(\theta)}$$

的解。从 0 到 θ 积分此式, 得

$$r(\theta) = r(0) \exp\left(\int_0^\theta \frac{H(\alpha)}{G(\alpha)} d\alpha\right).$$

1) 不失一般性, 假设 $G(\theta) > 0$ (如果 $G(\theta) < 0$, 则可改 t 为 $-t$), 系统(7) 的原点 O 是中心当且仅当 $r(2\pi) = r(0)$, 故有 $r(2\pi) = r(0)$, 即 $\int_0^{2\pi} \frac{H(\theta)}{G(\theta)} d\theta = 0$ 。

2) 当 $G(\theta) > 0$ 时, 系统(8) 的轨线是逆时针旋转的, 所以系统(7) 的原点 O 是稳定的焦点当且仅当 $r(2\pi) < r(0)$, 即 $\int_0^{2\pi} \frac{H(\theta)}{G(\theta)} d\theta < 0$ 。从而

$$G(\theta) \int_0^{2\pi} \frac{H(\theta)}{G(\theta)} d\theta < 0;$$

当 $G(\theta) < 0$ 时, 系统(8) 的轨线是顺时针旋转的, 所以系统(7) 的原点 O 是稳定的焦点当且仅当 $r(-2\pi) < r(0)$, 即 $\int_0^{-2\pi} \frac{H(\theta)}{G(\theta)} d\theta < 0$, 由函数 $\frac{H(\theta)}{G(\theta)}$ 的周期性得到

$$\int_0^{-2\pi} \frac{H(\theta)}{G(\theta)} d\theta = -\int_0^{2\pi} \frac{H(\theta)}{G(\theta)} d\theta,$$

从而也成立 $G(\theta) \int_0^{2\pi} \frac{H(\theta)}{G(\theta)} d\theta < 0$ 。

类似于 2) 的证明, 得到 3)。

4 例 子

考虑系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 - 6y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x^3 + 2xy. \end{cases} \quad (9)$$

如图 4 所示, 系统(9) 的支撑集中的点全部位于直线 $i - 1 + 2(j - 1) = 1$ 上, 此时 $t = (1, 2)^T, k = 1$, $F_1(x, y) = x^2 - 6y \in \mathcal{P}_2, F_2(x, y) = 4x^3 + 2xy \in \mathcal{P}_3$, 故系统(9) 为拟齐次系统。

引入广义极坐标变换, 设 $x = r \cos \theta, y = r^2 \sin \theta$,

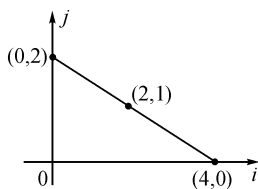


图 4 系统(9)的牛顿图

系统(9)变为

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r^2 H(\theta), \\ \frac{d\theta}{dt} = r G(\theta), \end{cases}$$

其中

$$H(\theta) = -\frac{\cos\theta(-\cos^2\theta - 6\sin\theta + 4\cos^2\theta\sin\theta + 2)}{\cos^2\theta - 2},$$

$$G(\theta) = -\frac{4(\cos^4\theta + 3\sin^2\theta)}{\cos^2\theta - 2}.$$

因为对任意的 θ , 恒有 $G(\theta) = -\frac{4(\cos^4\theta + 3\sin^2\theta)}{\cos^2\theta - 2} > 0$,

参考文献:

- [1] Algaba A, Garcia C, Reyes M. Characterization of a monodromic singular point of a planar vector field[J]. Nonlinear Analysis, 2011, 74(3/4): 5402-5414.
- [2] 陈兰荪, 王明淑. 二次系统极限环的相对位置与个数[J]. 数学学报, 1979, 22(6): 751-758.
- [3] 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 等. 微分方程定性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1985.
- [4] Dumortier F, Llibre J, Artes J. Qualitative Theory of Planar Differential Systems [M]. Berlin: Springer, 2006.
- [5] Berezovskaya F S, Medvedeva N B. The asymptotics of

又

$$\int_0^{2\pi} \frac{H(\theta)}{G(\theta)} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \frac{\cos\theta(-\cos^2\theta - 6\sin\theta + 4\cos^2\theta\sin\theta + 2)}{\cos^4\theta + 3\sin^2\theta} d\theta = 0$$

故由定理 3.2 知, 奇点 O 为系统(9)的中心。

由 Maple 8.0 软件包画出的系统(9)在奇点附近的轨线如图 5 所示。

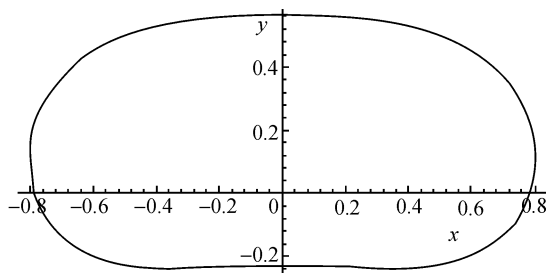


图 5 系统(9)的轨线图, 初始点选取在点(0.5, 0.5)

the return map of a singular point with fixed Newton diagram[J]. Journal of Mathematical Sciences, 1991, 60(6): 1765-1781.

- [6] Dumortier F. Singularities of vector fields in the plane [J]. J Differ Equ, 1977, 23: 53-106.
- [7] Algaba A, Freire E, Gamero E, et al. Monodromy, center-focus and integrability problems for quasi-homogeneous polynomial systems[J]. Nonlinear Analysis, 2010, 72(3/4): 1726-1736.
- [8] Algaba A, Freire E, Garcia C. Center of quasi-homogeneous polynomial planar systems[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2012, 13: 419-431.
- [9] Sansone G, Conti R. Nonlinear Differential Equations [M]. New York: Pergamon Press, 1964.

Properties of Newton Diagram and the Center Problem for System of Quasi-Homogeneous Polynomials

DU Fei-fei, HUANG Tu-sen

(School of Sciences, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: This paper studies some basic properties of Newton diagram and quasi-homogeneous polynomials and obtains a necessary and sufficient condition based on these concepts for a singular point of the system of quasi-homogeneous polynomials about whether a center or a focus. The example in the end shows that it essentially generalizes the corresponding results in the relevant literatures.

Key words: newton diagram; system of quasi-homogeneous polynomials; center problem

(责任编辑: 马春晓)