

基于最小势能原理的变截面压杆临界压力的计算方法

谢海, 寿开荣, 李龙, 李剑敏

(浙江理工大学机械与自动控制学院, 杭州 310018)

摘要: 基于弹性力学的最小势能变分原理, 对一类具有连续变截面的压杆进行了稳定性计算, 得到了临界压力的表达式。该解能够适应可变截面形状和边界约束的压杆, 计算简单方便, 精确度较高, 能够在工程中得到较为广泛的应用。

关键词: 变截面压杆; 稳定性; 最小势能原理; 临界压力

中图分类号: TH114 **文献标志码:** A

0 引言

压杆在工程中有着极其广泛的应用, 如建筑结构中的承压柱、汽车起重机的吊臂、多级液压油缸的活塞杆等, 其工作时受到较大的压力作用, 且长细比较大, 因此, 稳定性是这类杆件分析中需主要考虑的问题^[1]。但通常的稳定性计算, 压杆是作为等截面直杆进行分析的。近年来, 实际工程中, 由于各种工艺或造型需要, 出现了很多变截面杆, 而且, 不同于机械类阶梯轴那样的间断变化, 其截面是连续的变化。这类杆在新型建筑中应用较广, 但其设计的主要问题仍然是稳定性问题。目前工程中对变截面杆可以采用有限元等数值方法进行离散分析, 但需要用到大型专业软件, 且建模、分析等耗时较多^[2]。因此, 工程界试图寻找具有足够精度的解析解或半解析解, 以对变截面压杆的稳定性进行简单、方便的计算与设计。本文采用弹性理论的最小势能原理, 通过对假设位移函数的变分运算, 来得到变截面压杆线性稳定的计算公式, 从而可以对一般意义的变截面压杆进行稳定分析。

1 临界压力的最小势能变分计算

对变形体材料, 基于能量的变分原理是现代计算

力学的基本原理。虚位移原理、最小势能原理等都可以归结为能量泛函的变分原理。最小势能原理在有限元分析中的应用得到广泛的认同。最小势能原理指出, 变形体结构平衡的条件是其势能泛函取驻值^[3-4]。

假设变截面压杆的惯性矩为 $I(x)$, 当压杆受到压力作用发生微小的弯曲而处于临界平衡时, 压杆即在此弯曲状态下平衡。取位移试函数系数为:

$$\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x) \quad (1)$$

这里, 每一个函数均需要有 2 阶以上的导数。同时, 根据压杆的约束情况, 该试函数须满足边界条件。

假设压杆在载荷作用下的挠度为:

$$v = \lambda_1 \phi_1(x) + \lambda_2 \phi_2(x) + \dots + \lambda_n \phi_n(x) = \sum_i \lambda_i \phi_i(x) \quad (2)$$

其中, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为待定系数。即, 挠度为所取得试函数集的线性组合, 由试函数性质可知, 挠度也满足压杆的边界约束条件。压杆此时的变形是在压力载荷作用下的弯曲变形, 在小变形情况下, 压杆的应变为

$$\epsilon = -\frac{y}{\rho} = -\frac{d^2 v}{dx^2} y = -\left(\sum_i \lambda_i \phi_i''(x)\right) y \quad (3)$$

其中 y 为 y 轴方向上的挠度, ρ 为曲率半径。

由式(3)可以得到压杆横截面上的应力为:

$$\sigma = E\epsilon = -E\left(\sum_i \lambda_i \phi_i''(x)\right) y \quad (4)$$

其中 E 为弹性模量。

由式(3)、式(4) 可以计算得到压杆的应变能为

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma \epsilon d\Omega = \frac{1}{2} \int_0^l \int_A E y^2 \left(\sum_i \lambda_i \phi''_i(x) \right)^2 dA dx = \frac{1}{2} E \int_0^l I(x) \left(\sum_i \lambda_i \phi''_i(x) \right)^2 dx \quad (5)$$

其中 Ω 为压杆的体积, A 为压杆的横截面积, x 为压杆长度。

另外, 可以计算外载荷在此变形中所做功, 由于压杆的外力为作用于杆段的轴向压力, 故

$$W = \frac{1}{2} F_N \int_0^l v'(x)^2 dx = \frac{1}{2} F_N \int_0^l \left(\sum_i \lambda_i \phi'_i(x) \right)^2 dx \quad (6)$$

其中 F_N 为作用于杆段的轴向压力。

由式(5)、式(6) 可以得到系统的势能为

$$\Pi = U - W = \frac{1}{2} E \int_0^l I(x) \left(\sum_i \lambda_i \phi''_i(x) \right)^2 dx - \frac{1}{2} F_N \int_0^l \left(\sum_i \lambda_i \phi'_i(x) \right)^2 dx \quad (7)$$

由最小势能原理, 系统平衡的条件为势能泛函取极小^[5-7]。对于压杆在临界压力作用下, 杆处于微弯平衡状态, 因此, 其势能取到极小值。注意到势能表达式中, 试函数系为假设的已知函数, 故势能是待定系数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的函数, 因此, 势能的极小也就是对各待定系数的偏导数为 0, 即:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda_1} = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda_2} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda_n} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

将势能 Π 代入式(8) 得:

$$\begin{cases} E \int_0^l I(x) \phi''_1(x) \left(\sum_i \lambda_i \phi''_i(x) \right) dx - F_N \int_0^l \phi'_1(x) \left(\sum_i \lambda_i \phi'_i(x) \right) dx = 0 \\ E \int_0^l I(x) \phi''_2(x) \left(\sum_i \lambda_i \phi''_i(x) \right) dx - F_N \int_0^l \phi'_2(x) \left(\sum_i \lambda_i \phi'_i(x) \right) dx = 0 \\ \dots \\ E \int_0^l I(x) \phi''_n(x) \left(\sum_i \lambda_i \phi''_i(x) \right) dx - F_N \int_0^l \phi'_n(x) \left(\sum_i \lambda_i \phi'_i(x) \right) dx = 0 \end{cases} \quad (9)$$

而各待定系数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 与积分无关, 则可以定义如下参数:

$$\begin{cases} a_{ij} = \int_0^l I x \phi''_i x \phi''_j dx \\ b_{ij} = \int_0^l \phi'_i x \phi'_j dx \\ c_{ij} = E a_{ij} - F_N b_{ij} \end{cases} \quad (10)$$

则方程(9) 可以用式(10) 所定义参数表达为:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

方程(11) 即为用最小势能原理^[8] 得到的压杆弯曲平衡方程。该方程是一齐次线性代数方程组, 该类方程有非零解的充要条件是方程的系数矩阵为奇异阵, 也就是

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E a_{11} - F_N b_{11} & \dots & E a_{1n} - F_N b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ E a_{n1} - F_N b_{n1} & \dots & E a_{nn} - F_N b_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

方程(12) 给出了关于压力 F_N 的一个方程, 其中参数 (a_{ij}, b_{ij}) 为给定的试函数系列的积分, 可以先行求解出来。

方程(12) 是一个 n 次方程, 求解可以得到 n 个压力解, 这些压力都能够使压杆保持弯曲平衡, 但根据线性稳定性理论, 临界压力是这些“平衡”压力中的最小一个, 因此, 取方程(12) 的最小解就可以得到变截面压杆的临界压力。

2 两端简支压杆的临界压力

有压杆两端简支, 长度为 l , 材料的弹性模量为 E , 受到压力作用, 如图 1 所示。假设压杆

为变截面杆, 其惯性矩的变化为

$$I(x) = I_0 \left(a \left(\frac{x}{l} \right)^3 + b \left(\frac{x}{l} \right)^2 + c \left(\frac{x}{l} \right) + d \right) \quad (13)$$

根据压杆的约束情况, 采用三角函数系列为试函数, 即, 挠度为

$$v(x) = \lambda_1 \sin \frac{\pi}{l} x + \lambda_2 \sin \frac{3\pi}{l} x \quad (14)$$

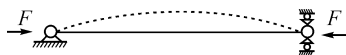


图 1 简支压杆

显然,假设的挠度满足压杆的边界约束。

将式(13)、式(14)代入式(10),得到平衡的特征方程为:

$$\begin{cases} (Ea_{11} - F_N)\lambda_1 + Ea_{12}\lambda_2 = 0 \\ Ea_{12}\lambda_1 + (Ea_{22} - 9F_N)\lambda_2 = 0 \end{cases} \quad (15)$$

其中,

$$\begin{cases} a_{11} = \frac{\pi^2 I_0}{l^2} \left(\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4\pi^2} \right) a + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2} \right) b + \frac{1}{2} c + d \right) \\ a_{12} = \frac{81 I_0}{16 l^2} (a + b) \\ a_{22} = \frac{81 \pi^2 I_0}{l^2} \left(\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{12\pi^2} \right) a + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{18\pi^2} \right) b + \frac{1}{2} c + d \right) \end{cases}$$

由方程(15)的非零解条件,可以得到

$$\begin{vmatrix} Ea_{11} - F_N & Ea_{12} \\ Ea_{12} & Ea_{22} - 9F_N \end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

从而可以解得:

$$F_N = \frac{1}{18} (9Ea_{11} + Ea_{22} - \sqrt{(9Ea_{11} + Ea_{22})^2 - 36E^2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}) \quad (17)$$

式(17)即为该变截面杆的临界压力。特别,当变截面杆的惯性矩中 $a = b = c = 0, d = 1$, 即, $I(x) = I_0$, 为恒截面杆, 这时, 有

$$\begin{cases} a_{11} = \frac{\pi^2}{l^2} I_0 \\ a_{12} = 0 \\ a_{22} = \frac{81\pi^2}{l^2} I_0 \end{cases} \quad (18)$$

将式(18)代入式(17), 可以得到: $F_N = \pi^2 EI_0 / l^2$,

即众所周知的等截面杆临界压力, 从而表明了本文计算的正确性。

3 结 论

利用最小势能原理, 可以对各种约束条件下的变截面杆进行临界应力和临界压力的求解。该方法的实质是基于能量泛函的变分原理, 因此, 对各种不同材料(如非线性材料)、载荷(如考虑压杆的自重)、边界约束等复杂情况都能够适用。该计算方法简单明了, 可以在工程中得到广泛的应用。

参考文献:

- [1] 刘鸿文. 材料力学[M]. 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2004: 292-293.
- [2] 李丽君, 沈玉凤. Anasy 对压杆稳定的辅助教学[J]. 实验开学与技术, 2009(7): 121-125.
- [3] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [4] 孙锁泰. 弹性力学中的变分原理导引[M]. 南京: 东南大学出版社, 1989.
- [5] 洪振德. 变截面压杆稳定临界力能量计算方法[J]. 江苏建筑, 2011(3): 28-30.
- [6] 楼梦麟, 李建元. 变截面压杆稳定问题半解析解[J]. 同济大学学报: 自然科学版, 2004(7): 857-860.
- [7] 郑建军, 樊承谋. 一类变截面压杆稳定计算的解析解[J]. 四川建筑科学研究, 1993(6): 22-24.
- [8] 陈 婷, 童根树. 楔形变截面压杆的弹塑性稳定[J]. 工业建筑, 2004(10): 62-65.

Critical Pressure of Struct with Variable Section Based on the Minimum Potential Energy Principle

XIE Hai, SHOU Kai-rong, LI Long, LI Jian-min

(School of Machinery and Automation, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: According to minimum potential energy variational principle of elastic mechanics and stability calculation of a continuous variable cross-section of the strut, the authors get the approximate expressions of the critical pressure. The approximate solution can adapt to a variety of variable cross-section strut and the method is not only accurate but also easy to use. Thus, they can be widely applied to engineering.

Key words: variable cross-section strut; stability; minimum potential energy principle; critical pressure

(责任编辑: 朱松英)