浙江理工大学学报，2022，47(6)：950-958
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
DOI:10.3969/j.issn.1673-3851(n).2022.06.019

基于分片线性最大 Rényi 熵的 Fredholm 积分方程数值解法

管　钰[1]，丁　玖[2]，靳聪明[1]
（1.浙江理工大学理学院，杭州 310018；2.南密西西比大学数学系，美国密西西比州哈蒂斯堡 39406-5045）

摘　要：大部分积分方程无法求出精确解，因此需考虑数值方法得到近似解。提出了一种基于分片线性基函数的最大 Rényi 熵的函数恢复方法，证明了解的唯一性，并在此基础上给出基于分片线性最大 Rényi 熵的 Fredholm 积分方程数值解法。数值实验表明：基于分片线性最大 Rényi 熵的 Fredholm 积分方程数值解法有效，且可以得到比基于分片线性最大 Shannon 熵的数值解法精度更高的解。

关键词：最大熵原理；Rényi 熵；分片线性基函数；Fredholm 积分方程；数值解法
中图分类号：TS195.644　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-3851 (2022) 11-0950-09

Numerical solution of Fredholm integral equations via piecewise linear maximum Rényi entropy method

GUAN Yu[1], *DING Jiu*[2], *JIN Congming*[1]
(1. School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China; 2. Department of Mathematics, The University of Southern Mississippi, Hattiesburg, MS 39406-5045, USA)

Abstract: The exact solutions cannot be found for most integral equations, so numerical methods should be considered to obtain the approximate solutions. In this paper, a maximum Rényi entropy method based on piecewise linear basis functions is proposed to recovery the functions. The uniqueness of the solution of this piecewise linear maximum Rényi entropy method is proved. Then it is used to solve the Fredholm integral equations. Numerical experiments show that the proposed piecewise linear maximum Rényi entropy method for solving the Fredholm integral equations is efficient, and can obtain better solutions than those of the piecewise linear maximum Shannon entropy method.

Key words: maximum entropy principle; Rényi entropy; piecewise linear basis function; Fredholm integral equation; numerical method

0 引　言

1957 年，Jaynes[1]提出最大熵原理（Maximum entropy princinple，MEP），该原理表明熵最大化满足已知约束条件的概率分布具有最小无偏估计。最大熵原理在数值求解数学问题等方面具有广泛应用。1986 年，Mead[2]首先提出了一种基于最大熵原理近似求解 Fredholm 积分方程的数值解法。2005 年，Bandyopadhyay 等[3]以 Chebyshev 多项式作为矩函数，提出了一种离散的最大熵方法，并给出了一种稳定的

收稿日期：2022－06－30　　网络出版日期：2022－09－14
基金项目：国家自然科学基金项目(11571314)
作者简介：管　钰(1993－　)，女，江苏南通人，硕士研究生，主要从事积分方程数值解法的研究。
通信作者：靳聪明，E-mail:jincm@zjst.edu.cn

迭代方法进行求解。2011 年，Ding 等[4]以分片线性基函数作为矩函数，提出了一种用于计算映射的不变测度的最大熵方法；相对于以多项式基函数 $1, x, x^2, \cdots x^n$ 作为矩函数的最大熵方法，这种新的近似方法具有一个优点，即所得非线性方程组非病态，由此可以更有效地求解。2017 年，张茹等[5]采用三角单元上的分片线性基函数作为矩函数，将最大熵方法应用到二维映射不变测度的计算中。2016 年，Jin 等[6]提出了一种分片线性最大熵方法数值求解 Fredholm 积分方程，并证明了该方法的收敛性。2018 年，Jin 等[7]给出了基于最大熵原理的求解一类二阶线性常微分方程边值问题的方法，并证明了其收敛性。

如果没有特殊说明，最大熵原理中的熵一般指 Shannon 熵[8]。1961 年，Rényi[9]推广了 Shannon 熵，称为 Rényi 熵；Rényi 熵包含 Hartley 熵、碰撞熵和最小熵等。作为 Shannon 熵的推广，Rényi 熵已广泛应用于统计学、量子信息、全息技术、人工智能与强化学习等许多领域。Lenzi 等[10]使用 Rényi 熵定义温度，得到恒温条件下广义统计力学中一些统计量的数学表达形式。Renner 等[11]提出一种新的熵度量，称作平滑 Rényi 熵；该度量可描述随机变量的基本属性，例如可以从平滑 Rényi 熵提取随机事件的数量或随机变量编码的长度。Franchini 等[12]和 Its 等[13]用 Rényi 熵衡量量子纠缠，在 Heisenberg XY 自旋链模型中，Rényi 熵是关于模群的特定子群的自守函数，因此可以精确计算。Hung 等[14]根据热力学配分函数提出了一种新方法，用于计算具有球形纠缠表面的 d 维共形场论（Conformal field theory，CFT）的 Rényi 熵，且该方法可进一步应用于计算各类全息模型中的 Rényi 熵。Lewkowycz 等[15]利用全息技术，首次计算出强耦合 4 维 CFT 中非球形纠缠表面的 Rényi 熵。Zhang 等[16]基于无奖励强化学习框架，在探索阶段选用状态－动作空间上的 Rényi 熵作为目标函数，并给出一种最大化 Rényi 熵的梯度优化算法，数值结果表明该算法是有效性的、稳定的。Peng 等[17]利用 Lévy 飞行萤火虫算法，通过最大化 Rényi 熵获得多级阈值图像分割的最优阈值，并采用基于 Lévy 飞行的自适应参数策略来提高算法性能，实验结果表明该算法在目标函数值、图像质量度量和计算效率等多个方面优于其他已有算法。

积分方程理论是数学的一个分支，与微分方程、算子理论等都有紧密的联系。许多数学物理过程、计算数学、近似理论和实际应用中的工程技术、金融等问题都可以归结于求解积分方程。大部分积分方程无法求出精确解，因此需考虑数值方法来得到近似解。本文考虑 Fredholm 积分方程：

$$f(x)+\int_a^b k(x,y)f(y)\mathrm{d}y=g(x),$$

其中：函数 g 与 k 已知，k 又称核函数（Kernel function）；f 为所求未知函数；积分上下限 a、b 为常量。迄今为止，已有许多用于求解 Fredholm 积分方程的数值方法，例如神经网络[18]、配置法[19]、小波分析法[20]、Nyström 法[21]、最大熵方法[6]等。

Rényi 熵作为 Shannon 熵的推广，具有与 Shannon 熵相似的性质。本文提出了一种基于最大 Rényi 熵的函数恢复方法，证明了解的唯一性，从而提出基于分片线性基函数的最大 Rényi 熵方法的求解 Fredholm 积分方程的数值解法。对两个 Fredholm 积分方程进行数值求解，以验证该方法的有效性和收敛性，并把数值结果与基于分片线性最大 Shannon 熵的数值解法的结果进行对比。

1　基于最大 Rényi 熵的函数恢复方法

1.1　Rényi 熵的定义

定义 1[22]　考虑区间 $[a,b]$ 上的连续随机变量 x，概率密度函数为 $f(x)$。Shannon 熵 H 定义如下：

$$H(f)=\int_a^b f(x)\ln f(x)dx,$$

当 $f=0$，$\ln f=0$。

Rényi 熵是对 Shannon 熵的推广。

定义 2[22]　考虑区间 $[a,b]$ 上的连续随机变量 x，概率密度函数为 $f(x)$，r 阶 Rényi 熵定义如下：

$$H_r(f)=\frac{1}{1-r}\ln\int_a^b f^r(x)\mathrm{d}x,$$

其中：r 是一个常数，$0<r<+\infty$，$r\neq1$。

当 $r=2$ 时，Rényi 熵可称作碰撞熵：

$$H_2(f)=-\ln\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x。$$

当 r 趋于 1 时,Rényi 熵 H_r 的极限即为 Shannon 熵:

$$\lim_{r\to 1}H_r(f)=H(f)。$$

1.2 最大 Rényi 熵方法

最大熵原理可用于恢复函数。给定 $n+1$ 个函数 $g_i(x)$和常数 m_i,$i=0,1,\cdots,n$,设概率密度函数 $f(x)$满足约束条件:

$$\int_a^b f(x)g_i(x)\mathrm{d}x=m_i,i=0,1,2,\cdots,n \tag{1}$$

其中:$g_i(x)$称作矩函数。式 (1)的解不唯一,但同时满足式 (1)和最大熵原理的概率分布具有最小无偏估计且唯一。满足约束条件式 (1)的最大 Rényi 熵问题可表示为:

$$\max\{H_r(f):f\in D,\int_a^b f(x)g_i(x)\mathrm{d}x=m_i,i=0,1,2,\cdots,n\} \tag{2}$$

其中:函数集合 D 是所有密度函数组成的集合。

定理 1 假设最大 Rényi 熵问题式(2)的解为 $f(x)$,则 $f(x)$可由

$$f(x)=\left(\frac{1}{C}\sum_{i=0}^{n}\lambda_i g_i(x)\right)^{\frac{1}{r-1}}$$

给出,其中 λ_i 满足非线性方程组:

$$\int_a^b\left(\frac{1}{C}\sum_{i=0}^{n}\lambda_i g_i(x)\right)^{\frac{1}{r-1}}g_j(x)\mathrm{d}x=m_j,j=0,1,\cdots,n,$$

其中:

$$C=\frac{r}{1-r}\frac{1}{\int_a^b f^r(x)\mathrm{d}x}$$

是一个常数。

证明 最大 Rényi 熵问题是一个有约束的优化问题。对应式 (2)的拉格朗日函数定义为:

$$L(f,\lambda)=\frac{1}{1-r}\ln\int_a^b f^r(x)\mathrm{d}x-\sum_{i=0}^{n}\lambda_i(\int_a^b f(x)g_i(x)\mathrm{d}x-m_i)。$$

拉格朗日函数的变分问题为:

$$\frac{\delta L}{\delta f}=\frac{L(f+\delta f,\lambda)-L(f,\lambda)}{\delta f}=\frac{1}{\delta f}\left\{\frac{1}{1-r}\left[\ln\int_a^b(f(x)+\delta f)^r\mathrm{d}x-\ln\int_a^b f^r(x)\mathrm{d}x\right]-\right.$$
$$\left.\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\left[\int_a^b(f(x)+\delta f)g_i(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)g_i(x)\mathrm{d}x\right]\right\}=\frac{1}{1-r}\frac{1}{\int_a^b f^r(x)\mathrm{d}x}r\int_a^b f^{r-1}(x)\mathrm{d}x-$$
$$\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\int_a^b g_i(x)\mathrm{d}x=C\int_a^b f^{r-1}(x)\mathrm{d}x-\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\int_a^b g_i(x)\mathrm{d}x=0 \tag{3}$$

其中:

$$C=\frac{r}{1-r}\frac{1}{\int_a^b f^r(x)\mathrm{d}x}$$

是一个常数。由式 (3)可得:

$$f^{r-1}(x)=\frac{1}{C}\sum_{i=0}^{n}\lambda_i g_i(x)$$

或

$$f(x)=\left(\frac{1}{C}\sum_{i=0}^{n}\lambda_i g_i(x)\right)^{\frac{1}{r-1}} \tag{4}$$

其中:λ_i 满足非线性方程组

$$\int_a^b \left(\frac{1}{C}\sum_{i=0}^{n}\lambda_i g_i(x)\right)^{\frac{1}{r-1}} g_j(x)\mathrm{d}x = m_j, j=0,1,\cdots,n。$$

式(4)即为最大熵问题式(2)的解。证明完毕。

当 $r=2$ 时,解式(4)可简化为:

$$f(x)=\frac{1}{C}\sum_{i=0}^{n}\lambda_i g_i(x),$$

其中:λ_i 满足

$$\int_a^b \frac{1}{C}\sum_{i=0}^{n}\lambda_i g_i(x) g_j(x)\mathrm{d}x = m_j, j=0,1,2,\cdots,n,$$

此处的 C 是归一化常数。此时近似解 $f(x)$是 $g_i(x)$的线性组合。

为了证明最大 Rényi 熵问题式 (2)的解的唯一性,本文引入相对 r-Rényi 熵距离这个概念。

定义 3[22]　对于 $r\neq 1$,给定两个概率密度 f 和 g,定义从 f 到 g 的相对 r-Rényi 熵距离为:

$$D_r(f\parallel g)=\frac{1}{1-r}\ln\left(\int_a^b g^{r-1}(x)f(x)\mathrm{d}x\right)+\frac{1-r}{r}H_r(g)-\frac{1}{r}H_r(f) \tag{5}$$

引理 1[22]　对任意常数 $r>0$ 和任意概率密度 f 和 g,从 f 到 g 的相对 r-Rényi 熵距离 $D_r(f\parallel g)\geqslant 0$,等号成立的条件是当且仅当 $f=g$ 几乎处处成立。

定理 2　当矩函数 $g_i(x)$及约束条件式(1)给定时,由式 (4)给出的解 $f(x)$是最大 Rényi 熵问题的唯一解。

证明　假设概率密度函数 f 由式 (4)给出且满足矩约束式 (1),即:

$$\int_a^b f(x)g_i(x)\mathrm{d}x = m_i, i=0,1,2,\cdots,n。$$

则易得:

$$\begin{aligned}H_r(f)&=\frac{1}{1-r}\ln\int_a^b f^{r-1}(x)f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{1-r}\ln\int_a^b \frac{1}{C}\sum_{i=0}^{n}\lambda_i g_i(x)f(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{1-r}\ln\left(\frac{1}{C}\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\int_a^b g_i(x)f(x)\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{1-r}\ln\left(\frac{1}{C}\sum_{i=0}^{n}\lambda_i m_i\right)\end{aligned} \tag{6}$$

假设 g 是由式 (4)给出的另一个满足矩约束式 (1)的概率密度函数,即:

$$\int_a^b g(x)g_i(x)\mathrm{d}x = m_i, i=0,1,2,\cdots,n。$$

则可得到:

$$\int_a^b f^{r-1}(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \frac{1}{C}\sum_{i=0}^{n}\lambda_i g_i(x)g(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{C}\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\int_a^b g_i(x)g(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{C}\sum_{i=0}^{n}\lambda_i m_i \tag{7}$$

由式(6)—(7)可知,从 g 到 f 的相对 r-Rényi 熵距离为:

$$\begin{aligned}D_r(g\parallel f)&=\frac{1}{1-r}\ln\left(\int_a^b f^{r-1}(x)g(x)\mathrm{d}x\right)+\frac{1-r}{r}H_r(f)-\frac{1}{r}H_r(g)\\&=\frac{1}{1-r}\ln\left(\frac{1}{C}\sum_{i=0}^{n}\lambda_i m_i\right)+\frac{1-r}{r}H_r(f)-\frac{1}{r}H_r(g)\\&=H_r(f)+\frac{1-r}{r}H_r(f)-\frac{1}{r}H_r(g)=\frac{1}{r}H_r(f)-\frac{1}{r}H_r(g)\geqslant 0,\end{aligned}$$

即 $H_r(f)\geqslant H_r(g)$。

由引理 1 可知,等号成立的条件是当且仅当 $f=g$ 几乎处处成立,所以由式 (4)给出的解 $f(x)$是唯一的。

证明完毕。

1.3 分片线性最大 Rényi 熵方法

将区间 $I=[a,b]$均等划分为 n 个小区间 $I_i=[x_{i-1},x_i]$,其中:$x_i=a+ih$,$h=\dfrac{b-a}{n}$是每个小区间的长度。设 $\phi_0(x)$,$\phi_1(x)$,…,$\phi_n(x)$是一系列定义在 I 上的分片线性基函数,$\phi_i(x_i)=1$ 且 $\phi_i(x_j)=0(j\neq i)$,则 $\phi_i(x)$可以写作:

$$\phi_i(x)=w\left(\frac{x-x_i}{h}\right),i=0,1,\cdots,n,$$

其中:

$$w(x)=\begin{cases}1+x, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 1-x, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x\notin[-1,1]。\end{cases}$$

对任意非负函数 $f(x)$,假设 $f(x)$满足约束条件:

$$\int_a^b f(x)\phi_i(x)\mathrm{d}x=m_i,i=0,1,2,\cdots,n。$$

即考虑使得 Rényi 熵最大化的近似解为约束优化问题:

$$\max\{H_r(f),\int_a^b f(x)\phi_i(x)\mathrm{d}x=m_i,i=0,1,2,\cdots,n\} \tag{8}$$

即分片线性最大 Rényi 熵问题。

定理 3 假设分片线性最大 Rényi 熵问题式 (8)的解为 $f(x)$,则 $f(x)$可由

$$f(x)=\left(\frac{1}{C}\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\phi_i(x)\right)^{\frac{1}{r-1}}$$

给出,其中 λ_i 满足:

$$\int_a^b\left(\frac{1}{C}\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\phi_i(x)\right)^{\frac{1}{r-1}}\phi_j(x)\mathrm{d}x=m_j,j=0,1,\cdots,n,$$

其中:

$$C=\frac{r}{1-r}\frac{1}{\int_a^b f^r(x)\mathrm{d}x}$$

是一个常数。

定理 3 的证明与定理 1 的证明类似。

当 $r=2$,Rényi 熵即为碰撞熵,可得到分片线性近似解:

$$f(x)=\frac{1}{C}\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\phi_i(x),$$

其中 λ_i 满足:

$$\int_a^b\frac{1}{C}\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\phi_i(x)\phi_j(x)\mathrm{d}x=m_j,\ j=0,1,2,\cdots,n。$$

此处

$$C=-\frac{2}{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}$$

是一常数。

2 分片线性最大 Rényi 熵方法求解 Fredholm 积分方程

考虑 Fredholm 积分方程:

$$f(x)+\int_a^b k(x,y)f(y)\mathrm{d}y=g(x) \tag{9}$$

假设 Fredholm 积分方程有非负解。方程(9)两边同乘以分片线性基函数 $\phi_i(x)(i=0,1,\cdots,n)$ 并在区间 $[a,b]$ 上积分,得到:

$$\int_a^b f(x)\phi_i(x)\mathrm{d}x+\int_a^b\int_a^b k(x,y)f(y)\mathrm{d}y\cdot\phi_i(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\phi_i(x)\mathrm{d}x \tag{10}$$

交换二次积分的顺序得:

$$\int_a^b\int_a^b k(x,y)f(y)\mathrm{d}y\phi_i(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\int_a^b k(x,y)\phi_i(x)\mathrm{d}xf(y)\mathrm{d}y=\int_a^b\bar{g}_i(y)f(y)\mathrm{d}y=\int_a^b\bar{g}_i(x)f(x)\mathrm{d}x,$$

此处

$$\bar{g}_i(y)=\int_a^b k(x,y)\phi_i(x)\mathrm{d}x。$$

此时式 (10)可改写成:

$$\int_a^b f(x)\phi_i(x)\mathrm{d}x+\int_a^b\bar{g}_i(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\phi_i(x)\mathrm{d}x,$$

即:

$$\int_a^b(\phi_i(x)+\bar{g}_i(x))f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\phi_i(x)\mathrm{d}x。$$

令

$$\phi_i(x)+\bar{g}_i(x)=g_i(x),\int_a^b g(x)\phi_i(x)\mathrm{d}x=m_i,$$

则有

$$\int_a^b f(x)g_i(x)\mathrm{d}x=m_i,i=0,1,\cdots,n \tag{11}$$

因此 Fredholm 积分方程 (9)的解 $f(x)$满足约束条件式 (11),方程的解由分片线性最大 Rényi 熵问题

$$\max\{H_r(f):f\geqslant 0,f\in L^1(a,b),\int_a^b f(x)\phi_i(x)\mathrm{d}x=m_i,i=0,1,\cdots,n\} \tag{12}$$

的解近似给出。

由定理 1 可得约束优化问题式 (12)的解为 $f(x)$,$f(x)$由

$$f(x)=\left(\frac{1}{C}\sum_{i=0}^n\lambda_i\phi_i(x)\right)^{\frac{1}{r-1}}$$

给出,其中 λ_i 满足:

$$\int_a^b\left(\frac{1}{C}\sum_{i=0}^n\lambda_i\phi_i(x)\right)^{\frac{1}{r-1}}\phi_j(x)\mathrm{d}x=m_j,j=0,1,\cdots,n,$$

其中:

$$C=\frac{r}{1-r}\frac{1}{\int_a^b f^r(x)\mathrm{d}x}$$

是一个常数。在实际计算中,只需令 λ_i/C 为一变量,为了方便仍记作 λ_i,则只需求解方程组

$$\int_a^b(\sum_{i=0}^n\lambda_i\phi_i(x))^{\frac{1}{r-1}}\phi_j(x)\mathrm{d}x=m_j,j=0,1,\cdots,n。$$

3　数值实验

本文给出一些数值实验结果,以验证所提出的基于分片线性最大 Rényi 熵求解第二类 Fredholm 积分方程的数值解法的有效性和收敛性,并把数值结果与基于分片线性最大 Shannon 熵的数值解法的结果进行对比。

假设 $f^*(x)$是精确解,$f_n(x)$是在区间$[a,b]$上均等划分 n 个小区间后所求近似解,则设 L^1 范数误差和 L^∞ 范数误差为:

$$\| f^*(x)-f_n(x)\|_1=\int_a^b |f^*(x)-f_n(x)|\,\mathrm{d}x$$

和

$$\| f^*(x)-f_n(x)\|_\infty=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{|f^*(x)-f_n(x)|\}。$$

例 1 考虑 Fredholm 积分方程:

$$f(x)-\frac{3}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{|x-y|} f(y)\mathrm{d}y=-1 \tag{13}$$

该方程的精确解为:

$$f^*(x)=-\frac{1}{4}\left(1+\frac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{2-2x}}{1-\frac{\mathrm{e}^2}{3}}\right)。$$

将区间[0,1]均等划分为 n 个小区间,利用分片线性最大 Rényi 熵方法求解,近似解的 L^1 范数误差和 L^∞ 范数误差如表 1 所示。表 1 中的分片线性最大 Shannon 熵方法的数值结果可参考文献[6]。

表 1 例 1 数值解的误差

n	分片线性最大 Rényi 熵方法				分片线性最大 Shannon 熵方法	
	$r=0.5$		$r=2$			
	L^1-error	L^∞-error	L^1-error	L^∞-error	L^1-error	L^∞-error
4	1.990×10^{-2}	7.004×10^{-2}	1.353×10^{-3}	6.490×10^{-3}	7.3×10^{-3}	2.0×10^{-2}
8	5.008×10^{-2}	1.928×10^{-2}	3.075×10^{-4}	1.887×10^{-3}	1.8×10^{-3}	5.0×10^{-3}
16	1.253×10^{-3}	4.832×10^{-3}	7.588×10^{-5}	4.837×10^{-4}	4.5×10^{-4}	1.3×10^{-3}
3	3.133×10^{-4}	1.234×10^{-3}	1.891×10^{-5}	1.245×10^{-4}	1.1×10^{-4}	3.2×10^{-4}
64	7.832×10^{-5}	3.263×10^{-4}	4.721×10^{-6}	3.325×10^{-5}	2.8×10^{-5}	8.1×10^{-5}
128	1.958×10^{-5}	8.397×10^{-5}	1.181×10^{-6}	8.590×10^{-6}	7.0×10^{-6}	2.0×10^{-5}
256	4.895×10^{-6}	2.130×10^{-5}	2.951×10^{-7}	2.183×10^{-6}	1.8×10^{-6}	5.0×10^{-6}

例 2 考虑定义在实数轴上的 Wiener-Hopf 积分方程:

$$f(x)+4\int_0^\infty \mathrm{e}^{-|x-y|} f(y)\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-|x|} \tag{14}$$

精确解为:

$$f^*(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3x}, & x\geqslant 0;\\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}, & x<0。\end{cases}$$

由于方程(14)的右端包含了绝对值,可以先求解 $x\geqslant0$ 时的近似解 $f_n(x)$,$x<0$ 时的近似解由 $x\geqslant0$ 时的近似解推导得出。在数值求解积分方程时,考虑有限区间上的近似解是一种广泛使用的方法,因此将求解方程(14)简化为求解如下方程:

$$f(x)+4\int_0^{16} \mathrm{e}^{-|x-y|} f(y)\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-x},x\geqslant 0 \tag{15}$$

在将区间[0,16]均等划分为 n 个小区间,利用分片线性最大 Rényi 熵方法求解,近似解的 L^1 范数误差和 L^∞ 范数误差如表 2 所示。表 2 中的分片线性最大 Shannon 熵方法的数值结果可参考文献[6]。

表 2 例 2 数值解的误差

n	分片线性最大 Rényi 熵方法				分片线性最大 Shannon 熵方法	
	$r=0.5$		$r=2$			
	L^1-error	L^∞-error	L^1-error	L^∞-error	L^1-error	L^∞-error
16	2.309×10^{-3}	1.701×10^{-2}	1.765×10^{-2}	7.840×10^{-2}	3.2×10^{-3}	2.5×10^{-2}
32	6.345×10^{-4}	5.230×10^{-3}	3.582×10^{-3}	2.314×10^{-2}	8.0×10^{-4}	8.8×10^{-3}
64	1.595×10^{-4}	1.204×10^{-3}	1.083×10^{-3}	5.805×10^{-3}	2.0×10^{-4}	2.6×10^{-3}
128	3.992×10^{-5}	3.914×10^{-4}	1.043×10^{-3}	4.157×10^{-3}	4.8×10^{-5}	7.0×10^{-4}
256	9.974×10^{-6}	1.174×10^{-4}	8.525×10^{-4}	4.065×10^{-3}	1.2×10^{-5}	1.8×10^{-4}

从数值实验结果可以看出，本文提出的基于分片线性最大 Rényi 熵的 Fredholm 积分方程数值解法是有效的和收敛的。在例 1 中，$r=2$ 时解的精度最高；在例 2 中，$r=0.5$ 时解的精度最高。

4　结　语

本文提出了一种基于最大 Rényi 熵的函数恢复方法，并证明了解的唯一性；给出了基于分片线性基函数的最大 Rényi 熵的数值方法进行函数恢复，进而给出基于分片线性最大 Rényi 熵的 Fredholm 积分方程数值解法。数值实验表明该方法是有效的和收敛的，可以得到比基于分片线性最大 Shannon 熵的数值解法的数值结果精度更高的解。但 Rényi 熵是非凸函数，而 Shannon 熵是凸函数，因此还不能类似地从理论上证明基于分片线性最大 Rényi 熵的数值解法的收敛性，有待下一步研究。

参考文献：

[1] Jaynes E T. Information theory and statistical mechanics[J/OL]. Physical Review，1957，106：620-630. https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.106.620.

[2] Mead L R. Approximate solution of Fredholm integral equations by the maximum-entropy method[J]. Journal of Mathematical Physics，1986，27(12)：2903-2907.

[3] Bandyopadhyay K，Bhattacharya A K，Biswas P，et al. Maximum entropy and the problem of moments：A stable algorithm[J]. Physical Review E，2005，71(5)：057701.

[4] Ding J，Jin C M，Rhee N H，et al. A maximum entropy method based on piecewise linear functions for the recovery of a stationary density of interval mappings[J]. Journal of Statistical Physics，2011，145(6)：1620-1639.

[5] 张茹，徐春伟，靳聪明. 最大熵方法在计算二维不变测度中的应用[J]. 浙江理工大学学报(自然科学版)，2017，37(4)：569-574.

[6] Jin C M，Ding J. Solving Fredholm integral equations via a piecewise linear maximum entropy method[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics，2016，304：130-137.

[7] Jin C M，Ding J. A maximum entropy method for solving the boundary value problem of second order ordinary differential equations[J]. Journal of Mathematical Physics，2018，59(10)：103505.

[8] Shannon C E. A mathematical theory of communication[J]. Bell System Technical Journal，1948，27(3)：379-423.

[9] Rényi A. On measures of entropy and information[C]//Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Berkeley：University of California Press，1961：547-562.

[10] Lenzi E K，Mendes R S，da Silva L R. Statistical mechanics based on Rényi entropy[J]. Physica A：Statistical Mechanics and Its Applications，2000，280(3/4)：337-345.

[11] Renner R，Wolf S. Smooth Rényi entropy and applications[C]//International Symposium on Information Theory，2004. ISIT 2004. Proceedings. Chicago，IL，USA：IEEE，2004：233.

[12] Franchini F，Its A R，Korepin V E. Rényi entropy of the XY spin chain[J]. Journal of Physics A：Mathematical and Theoretical，2008，41(2)：025302.

[13] Its A R，Korepin V E. Generalized entropy of the Heisenberg spin chain[J]. Theoretical and Mathematical Physics，2010，164(3)：1136-1139.

[14] Hung L Y，Myers R C，Smolkin M，et al. Holographic calculations of Rényi entropy[J]. Journal of High Energy Physics，2011，2011(12)：47.

[15] Lewkowycz A，Perlmutter E. Universality in the geometric dependence of Rényi entropy[J]. Journal of High Energy Physics，2015，2015：80.

[16] Zhang C H，Cai Y Y，Huang L B，et al. Exploration by maximizing Rényi entropy for reward-free RL framework[EB/OL]. (2020-12-10)[2022-06-30]. https://arxiv.org/abs/2006.06193.

[17] Peng L，Zhang D B. An adaptive Lévy flight firefly algorithm for multilevel image thresholding based on Rényi entropy[J]. The Journal of Supercomputing，2022，78(5)：6875-6896.

[18] Effati S，Buzhabadi R. A neural network approach for solving Fredholm integral equations of the second kind[J]. Neural Computing and Applications，2012，21(5)：843-852.

[19] Wang K Y, Wang Q S. Taylor collocation method and convergence analysis for the Volterra-Fredholm integral equations [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2014, 260: 294-300.

[20] Babolian E, Shahsavaran A. Numerical solution of nonlinear Fredholm integral equations of the second kind using Haar wavelets[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 225(1): 87-95.

[21] Atkinson K. Iterative variants of the Nyström method for the numerical solution of integral equations[J]. Numerische Mathematik, 1974, 22(1): 17-31.

[22] Lutwak E, Yang D, Zhang G Y. Cramér-rao and moment-entropy inequalities for Rényi entropy and generalized Fisher information[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2005, 51(2): 473-478.

(责任编辑:康 锋)