



距离受限车辆路径问题的近似算法

孟庆欣, 韩曙光

(浙江理工大学理学院, 杭州 310018)

摘要: 针对无向完全图上以极小化行驶路线(环游)总距离为目标函数的距离受限车辆路径问题, 将最小二元2-匹配问题与环游拆分和环游整合相结合, 提出了一种近似算法。该算法将松弛问题最小二元2-匹配的最优解中距离超过限制的环游进行拆分, 距离未超过限制的环游进行整合, 以得到距离受限车辆路径问题的环游集合。针对该近似算法, 首先通过分析该问题最优解下界与近似算法的上界, 证明了算法参数形式的近似比上界; 然后通过对近似比上界的证明, 说明最大行驶距离与顾客点规模的取值对算法参数近似比的影响较小; 最后通过构造实例, 进一步说明该算法在此种情况下性能更优。该算法可为城市无人物流配送高效快速算法的设计提供参考。

关键词: 车辆路径问题; 距离受限; 近似算法; 环游拆分; 环游整合

中图分类号: O223

文献标志码: A

文章编号: 1673-3851(2022)03-0273-10

The approximation algorithm for distance constrained vehicle routing problem

MENG Qingxin, HAN Shuguang

(School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: This paper deals with a distance constrained vehicle routing problem on an undirected complete graph with the minimized total distance of driving route (tour) as the objective function, and proposes an approximation algorithm integrating minimum binary 2-matching with tour partitioning and tour integration. In order to obtain a set of tours for the distance constrained vehicle routing problem, the distance of tour exceeding the distance constraint for the minimum binary 2-matching optimal solution in a slack problem is split, and the counterparts with a distance less than distance constraint are integrated. Firstly, by analyzing the lower bound of the optimal solution and the upper bound of the algorithm, the upper bound of the approximate ratio of the parameter form of the algorithm is proved. Secondly, by proving the upper bound of the approximate ratio, it indicates that the parameter approximation ratio between the maximum driving distance and the value of customer point scale has a small effect. Finally, an instance of distance constraint vehicle routing problem is constructed to further explain that the algorithm has better performance in this case. The algorithm in this study is expected to provide reference for the design of efficient and fast algorithms for urban unmanned logistics distribution.

Key words: vehicle routing problem; distance constraint; approximation algorithm; tour splitting; tour integration

收稿日期: 2021-07-15 网络出版日期: 2021-11-08

基金项目: 国家自然科学基金项目(12071436)

作者简介: 孟庆欣(1996—), 女, 内蒙古赤峰人, 硕士研究生, 主要从事组合优化和路径规划方面的研究。

通信作者: 韩曙光, E-mail: zist001@163.com

0 引言

车辆路径问题(Vehicle routing problem, VRP)是运筹学和计算机科学中的重要组合优化问题^[1-2]。VRP及其相关问题广泛应用于快递配送,特别是城市无人物流配送。VRP由Dantzig等^[3]在1959年首次提出,主要规划从仓库出发的一组车辆的最佳行驶路线(环游),使车辆有序通过若干目标点,在满足一定约束条件(如车辆容量限制、行驶距离限制、交货时间窗口等)下实现特定的优化目标(如行驶路程最短、所需车辆数最小等)。

经典的VRP主要有两种类型的约束:车辆容量受限和行驶距离受限,即容量受限车辆路径问题(Capacity constraint vehicle routing problem, CVRP)^[4]和距离受限车辆路径问题(Distance constraint vehicle routing problem, DVRP)^[5]。这两类问题的复杂性均可由已知的非确定性算法多项式时间可解问题类(Nondeterministic polynomial solvable problem class, NP)的组合优化问题规约得到。由于旅行商问题(Traveling salesman problem, TSP)已被证明是强NP-难问题^[6],而CVRP和DVRP均可在多项式时间内规约到TSP,所以CVRP和DVRP也是强NP-难问题。因此,对这两类问题的研究主要集中在近似算法和启发式算法上。

CVRP是对于给定的若干顾客点、仓库点、容量限制和顾客需求,规划从仓库点出发,覆盖全部顾客点的路线(环游)集合,而且各环游的顾客需求之和均不超过容量限制(即最多覆盖 q 个顾客点)。Haimovich等^[7]提出了迭代拆分TSP环游的近似算法,对于需求可拆分的度量CVRP,该算法的近似比为 $1+(1-1/q)\alpha$,其中 α 为TSP近似算法的近似比;该算法还证明当 $q \leq c \log \log n$ 时,欧氏平面的CVRP存在多项式时间近似方案(Polynomial time approximation scheme, PTAS),其中 c 为常数, n 为顾客点数。Khachay等^[8]进一步证明,欧氏平面上需求不可拆分的CVRP存在PTAS。Becker^[9]提出了树形图上单仓库度量CVRP的 $4/3$ -近似算法,并给出相应的紧界实例。Lenstra等^[10]证明当 $P \neq NP$ 时,无向完全图上的CVRP不存在 $(3/2-\epsilon)$ -近似算法,其中 $\epsilon > 0$;已有的研究成果多关注启发式算法的设计与改进,关于无向完全图上的CVRP近似比与其下界 $(3/2-\epsilon)$ 间的间隙近几年尚未有显著的改善。

DVRP是对于给定的若干顾客点、仓库点和距离限制,找到从仓库出发且覆盖全部顾客点的一组行驶路线(环游),且各环游的行驶距离均不超过距离限制。Li等^[11]研究了目标函数为极小化总行驶距离和极小化所需车辆数的DVRP,证明在这两个目标函数下最优解的性质:若极小化所需车辆数的DVRP存在 α -近似算法,则极小化总距离的DVRP存在 2α -近似算法;他们还提出了TSP环游拆分近似算法,证明了该算法参数形式的近似比,且给出相应紧界实例。Bazgan等^[12]提出了单仓库度量DVRP的 $1/3$ -微分近似算法。Nagarajan等^[13]提出了树形图上单仓库度量DVRP的 2 -近似算法,并证明:当 $P \neq NP$ 时,树形图上单仓库度量DVRP不存在 1.5 -近似算法;同时,给出了无向完全图上单仓库度量DVRP近似比为 $O(\min\{\log n, \log \lambda\})$ 的算法,其中 λ 为车辆最大行驶距离。Friggstad等^[14]进一步给出无向完全图上单仓库度量DVRP近似比为 $O(\min\{\log n, \log \lambda / \log \log \lambda\})$ 的算法。完全图上单仓库DVRP的常数界近似算法仍是未解问题。

本文考虑在无向完全图上以极小化行驶路线总距离(权重)为目标函数的DVRP。设图 $G=(V, E)$ 是一个无向完全图,其中: V 表示点集,包含若干顾客点和仓库点; E 表示边集,给 E 中每条边赋予权重。对于给定的最大行驶距离 λ ,需要规划一个从仓库点出发覆盖全部顾客点的环游集合,使其中各环游的权重均不超过 λ ,且目标函数为极小化全部环游的总权重。由于已有研究结果的算法近似比受实例顾客点规模 n 和行驶距离 λ 的影响均较大,即对于 n 或 λ 取值较大的DVRP实例,其算法解与最优解间的近似比也是较大值。本文提出了一种近似算法,主要从减弱问题实例顾客点规模及行驶距离的取值对近似比结果的影响考虑,以改进算法参数的近似比。首先,针对该问题提出将最小二元2-匹配与环游拆分和环游整合相结合的近似算法,即删除DVRP的距离约束给出松弛问题最小二元2-匹配,对松弛问题最优解中距离超过限制的环游进行拆分,距离未超过限制的环游进行整合,以得到满足距离约束限制的环游集合;其次,通过对算法步骤的分析,证明最大行驶距离 λ 的取值在3倍到4倍最大仓库与顾客间边权重时该算法参数形式的近似比上界;最后,给出一个DVRP实例,以说明对于该类型的DVRP实例。本文近似算法得到可行解的目标函数值比已有近似算法的结果更优。

1 DVRP 及相关问题描述

设 $G=(V,E)$ 是一个无向完全图, 点集 V 由仓库点 $\{0\}$ 和若干顾客点 $\{1,2,\dots,n\}$ 构成, 即 $V=\{0,1,2,\dots,n\}$; 边集 $E=\{(u,v) \mid \forall u,v \in V, u \neq v\}$ 。给定边权重函数 $c:E \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$, 即 $\forall (u,v) \in E$, 其权重 $c(u,v)$ 非负。假设权重函数满足两条性质:

a) 对称性, $\forall (u,v) \in E$, 有 $c(u,v)=c(v,u)$;

b) 满足三角不等式, $\forall u,v,w \in V$, 有 $c(u,v)+c(v,w) \geq c(u,w)$ 成立, 那么称满足三角不等式的权重函数为度量权重函数。仓库点与顾客点间的边权重 $c(0,v)$ 简记为 $c(v)$, 其中 $v \in V \setminus \{0\}$, 并定义权重值最大的 $c(v)$ 为 $c_{\max}=\max\{c(v) \mid v \in V \setminus \{0\}\}$, 且最大行驶距离 λ 满足 $3c_{\max} \leq \lambda \leq 4c_{\max}$; 对任意两顾客点之间的边权重有 $c(u,v) \in [a,b]$, 其中 $a=\min\{c(u,v) \mid \forall u,v \in V \setminus \{0\}, u \neq v\}$, $b=\max\{c(u,v) \mid \forall u,v \in V \setminus \{0\}, u \neq v\}$ 。对于图 G 的子图 H , 记 $V(H)$ 、 $E(H)$ 和 $c(H)$ 分别为子图 H 的顶点集、边集和边权重之和。

下面定义 DVRP 和与之相关的几个问题, 这些问题的目标均是寻找满足条件的环游集合, 且集合中的元素为环游 $C_i=(u_1, u_2, \dots, u_{m_i}, u_1)$, 其中 $u_1, u_2, \dots, u_{m_i} \in V$, 记环游 C_i 的权重为 $c(C_i)$ 。特别的, 序列 $(0, u, 0)$ 也表示一个环游, 其中 $u=1,2,\dots,n$ 。

1.1 车辆路径问题

VRP 主要决策一组从仓库出发, 且覆盖全部顾客点的行驶路线(环游), 本文主要涉及目标函数为极小化总行驶距离的 VRP, 即对于给定的度量边权重函数 $c:E \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$, 计算图 G 上目标函数为 $\min \sum_{i=1}^{p_{\text{VRP}}} c(C_i)$ 的环游集合 $M_{\text{VRP}}=\{C_1, C_2, \dots, C_{p_{\text{VRP}}}\}$, 其中 $p_{\text{VRP}}=|M_{\text{VRP}}|$, 且该环游集合满足约束: a) 对 $\forall i, j=1,2,\dots, p_{\text{VRP}}, i \neq j$, 有 $V(C_i) \cap V(C_j)=\{0\}$; b) $V=\bigcup_{i=1}^{p_{\text{VRP}}} V(C_i)$ 。

1.2 距离受限的车辆路径问题

DVRP 是对给定的度量边权重函数 $c:E \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ 和车辆最大行驶距离 $\lambda \geq 0$, 计算图 G 上目标函数为 $\min \sum_{i=1}^{p_{\text{DVRP}}} c(C_i)$ 的环游集合 $M_{\text{DVRP}}=\{C_1, C_2, \dots, C_{p_{\text{DVRP}}}\}$, 其中 $p_{\text{DVRP}}=|M_{\text{DVRP}}|$, 且该环游集合满足约束: a) $\forall i, j=1,2,\dots, p_{\text{DVRP}}, i \neq j$, 有 $V(C_i) \cap V(C_j)=\{0\}$; b) $V=\bigcup_{i=1}^{p_{\text{DVRP}}} V(C_i)$; c) $\forall i, j=1,2,\dots, p_{\text{DVRP}}$, 有 $c(C_i) \leq \lambda$ 。为了保证 DVRP 有可行解, 车辆从仓库出发, 经过任一顾客点后返回仓库所行驶的距离必不超过 λ , 即 $2c_{\max} \leq \lambda$ 。

1.3 最小二元 2-匹配问题

在图 G 上构造图 $G'=(V', E')$, 其中: 点集 $V'=\{V_0 \cup V \setminus \{0\}\}$, 点集 V_0 包括 $2n$ 个点, 即点集 V' 是由点集 V_0 替换点集 V 中的 0 点得到的; 边集 $E'=\{(u,v) \mid u,v \in V', u \neq v\}$, 定义边集 E' 的权重函数 $c':E' \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$,

$$c'(u,v)=\begin{cases} c(0,v), & u \in V_0, v \in V \setminus \{0\}; \\ c(u,v), & u,v \in V \setminus \{0\}; \\ 0, & u,v \in V_0. \end{cases}$$

二元 2-匹配(Binary 2-matching, B2M)是计算图 G' 上的一个子图, 该子图包括点集 V' 中的全部点, 且每个点的顶点度均为 2。由于图 G' 是简单图, 不含自环和平行边, 则每个环游中至少包含三个点。最小二元 2-匹配问题(Min binary 2-matching, MB2M)则是对于给定的边权重函数 $c':E' \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$, 计算图 G' 上目标函数为 $\min \sum_{i=1}^{p_{\text{B2M}}} c'(C_i)$ 的环游集合 $M_{\text{B2M}}=\{C_1, C_2, \dots, C_{p_{\text{B2M}}}\}$, 其中 $p_{\text{B2M}}=|M_{\text{B2M}}|$, 且该环游集合满足约束: a) $\forall i=1,2,\dots, p_{\text{B2M}}, |C_i| \leq 3$; b) $\forall i, j=1,2,\dots, p_{\text{B2M}}, i \neq j$, 有 $V(C_i) \cup V(C_j)=\emptyset$; c) $V'=\bigcup_{i=1}^{p_{\text{B2M}}} V(C_i)$ 。Hartvigsen^[15]证明, 在多项式时间 $O(n^3)$ 内可以得到 MB2M 的最优解。Pekny 等^[16]进一步证明, 可以在多项式时间 $O(n^2 |E|)$ 内得到 MB2M 最优解。

1.4 圈覆盖问题

圈覆盖问题(Cycle cover problem, CCP)是通过将 MB2M 最优解 M_{B2M} 中的环游进行变换得到图 G 上的环游集合 M_c , 其中包括三种类型的环游: 不含 0 点的环游, 由 0 点和一个顾客点构成的环游, 以及由 0 点

和若干顾客点构成的环游。即根据 MB2M 的最优解 $M_{\text{B2M}} = \{C_1, C_2, \dots, C_{p_B}\}$, 计算图 G 上的环游集合 $M_C = \{C_1, C_2, \dots, C_p\}$, 其中 $p = |M_C|$, 且该环游集合满足约束: a) $\forall i, j = 1, 2, \dots, p, i \neq j, V(C_i) \cap V(C_j) = \emptyset$ 或 $\{0\}$; b) $V = \bigcup_{i=1}^p V(C_i)$ 。

2 算法设计

本节给出 DVRP 的近似算法。该算法的基本思想是: 首先, 通过删除 DVRP 中行驶距离约束构造松弛问题 CCP, 计算生成子图上 MB2M 的最优解并对其中环游进行变换, 给出权重相同的松弛问题的环游集合; 然后, 为得到满足 DVRP 约束的可行解, 对松弛问题的解中超过距离约束的环游, 应用环游拆分技巧, 即将其拆分为若干满足距离约束的环游; 其次, 为进一步优化算法, 对环游集合中未超过距离约束的环游, 进行整合以减少环游数量; 最后, 得到满足 DVRP 约束的环游集合。

2.1 DVRP 最优解下界

用 opt_{DVRP} 表示 DVRP 最优解的权重值, 下证 CCP 为 DVRP 的松弛问题, 且与 MB2M 最优解 M_{B2M} 的权重相等的 CCP 的环游集合 M_C , 其权重 $c(M_C)$ 是 opt_{DVRP} 的下界。

引理 1 对于图 G 上的 CCP 环游集合 M_C , 有 $opt_{\text{DVRP}} \geq c(M_C)$ 。

证明 计算图 G' 上 MB2M 的最优解 M_{B2M} , 记其权重为 $c(M_{\text{B2M}})$ 。考虑图 G 上一个 VRP 实例的最优解, 用 opt_{VRP} 表示该实例最优解中全部环游的权重之和。由于 DVRP 是在 VRP 的基础上加入行驶距离的约束, 则 $opt_{\text{DVRP}} \geq opt_{\text{VRP}}$ 。

设图 G 上该 VRP 实例的一个可行解为 $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$, 则在图 G' 上存在一个与其权重相同的 B2M 的可行解 M' , 记其权重为 $c(M')$ 。对于该实例可行解中的环游 C_i , 用 V_0 中任意两点替换 C_i 中的 0 点, 得到新环游 $C_{i'}$, 且 $V(C_{i'}) \cap V(C_{j'}) = \emptyset$, 即 V_0 中已加入到 $C_{i'}$ 的点将不会再出现在其他环游中, 其中 $i', j' = 1, \dots, k-1$ 且 $i' \neq j'$; 而 V_0 中未加入到环游 C_1, C_2, \dots, C_{k-1} 中的点, 将全部用于替换环游 C_k 中的 0 点。由此得到与该实例可行解权重相等的图 G' 上 B2M 的可行解 M' , 且 M' 的每个环游中至少包括 3 个点。同理, 对于该实例的最优解, 也可按上述方法得到权重相同的图 G' 上 B2M 的可行解 M'' , 记其权重为 $c(M'')$, 则 $c(M'') = opt_{\text{VRP}}$ 。由于 M_{B2M} 的最优性, 有 $opt_{\text{VRP}} \geq c(M_{\text{B2M}})$ 。

同样, 图 G' 上 MB2M 的最优解 M_{B2M} 也可以在多项式时间 $O(n)$ 内转换为图 G 上权重相同的 CCP 环游集合 M_C , 具体步骤如下: 对集合 M_{B2M} 中不含 V_0 中点的环游, 可直接看作集合 M_C 中环游; 对集合 M_{B2M} 中含 V_0 中点的环游, 若其形式为 $(u_1, \dots, u_i, v_0^1, \dots, v_0^t, u_{i+1}, \dots, u_{i'}, u_1)$, 其中 $v_0^1, \dots, v_0^t \in V_0, u_1, \dots, u_{i'} \in V \setminus \{0\}$, 用 0 点替换点 v_0^1, \dots, v_0^t 得到环游 $(u_1, \dots, u_i, 0, u_{i+1}, \dots, u_{i'}, u_1)$, 可以看作 M_C 中的环游, 且根据图 G' 上权重函数 c' 的定义, 可知变换后环游的权重与原环游权重相等; 若其形式为 $(v_0^1, u_1, v_0^2, u_2, \dots, v_0^t, u_t, v_0^1)$, 其中 $v_0^1, \dots, v_0^t \in V_0, u_1, \dots, u_t \in V \setminus \{0\}$, 将其拆分成 t 个形如 $(0, u_1, 0), \dots, (0, u_t, 0)$ 的环游, 这 t 个环游可看作 M_C 中的元素, 且根据图 G' 上权重函数 c' 的定义, 可知这 t 个环游的权重之和与原环游权重相等。因此, $c(M_{\text{B2M}}) = c(M_C)$ 。综上所述, 有 $opt_{\text{DVRP}} \geq c(M_C)$ 。

证毕。

2.2 DVRP 近似算法

近似算法 A 的步骤如下:

步骤 1. 计算图 G' 上 MB2M 的最优解 M_{B2M} , 按引理 1 证明中的步骤将环游集合 M_{B2M} 变换为图 G 上权重相同的 CCP 的环游集合 $M_C = \{C_1, C_2, \dots, C_p\}$ 。

步骤 2. 判断 M_C 中环游是否包含 0 点, 对于不含 0 点的环游 C_i , 计算其中相邻两点的节约值 $s(v_i, v_{i+1})$, 即 $\forall v_j, v_{j+1} \in V(C_i), s(v_j, v_{j+1}) = c(v_j) + c(v_{j+1}) - c(v_{j+1}, v_{j+1})$ 。找到最小的节约值 $\min\{s(v_j, v_{j+1}) \mid \forall v_j, v_{j+1} \in V(C_i)\}$ 所对应的边 (v_j^i, v_{j+1}^i) , 在点 v_j^i 和 v_{j+1}^i 间插入 0 点得到新环游 C'_i 。

步骤 3. 将新环游 C'_i 中的点重新编号, 即从 0 点开始, 以顺时针或逆时针方向, 将点按其在 C'_i 中的顺序编号。记 M_C 中含 0 点的环游 C_j 为 C'_j , 用 $M_0 = \{C'_1, C'_2, \dots, C'_p\}$ 表示 M_C 中不含 0 点的环游插入 0 点后得到的环游集合。

步骤 4。判断集合 M_0 中各环游的权重是否超过 λ , 对于权重超过 λ 的环游, 应用环游拆分算法 A_1 。

a) 环游拆分算法 A_1 。

将 M_0 中权重超过 λ 的环游 C'_i 拆分成 k_i 条路, 并将 0 点与每条路的端点相连, 得到 k_i 个环游 C_j^i , 其中 $1 \leq j < k_i$ 。对于环游 C_j^i , 从 0 点出发连接到一个不属于环游 C_{j-1}^i 且编号最小的非 0 点 v_q , 并且在权重不超过 λ 的前提下, 使其覆盖尽可能多的非 0 点。

步骤 5。对于权重未超过 λ 的环游, 应用环游整合算法 A_2 , 得到满足 DVRP 约束的环游集合 sol 。

b) 环游整合算法 A_2 。

步骤 A_{21} 。权重未超过 λ 的环游 $C'_i = (0, v_1, v_2, \dots, v_{m_i}, 0)$, 删除 C'_i 中的 0 点及其相连边, 得到路 $P_i = (v_1, v_2, \dots, v_{m_i})$ 。

步骤 A_{22} 。将全部权重未超过 λ 的环游所对应的路 P_i 首尾相连得到环游 C' 。

步骤 A_{23} 。按步骤 2 和步骤 3 给环游 C' 插入 0 点并重新编号得到环游 C^γ 。

步骤 A_{24} 。判断环游 C^γ 的权重是否超过 λ , 若未超过 λ , 则返回该环游 C^γ ; 若超过 λ , 则对环游 C^γ 执行环游拆分算法 A_2 , 返回拆分后的环游集合。

3 算法性能分析

本节证明近似算法 A 的近似比上界。图 G 上的环游集合 $M_C = \{C_1, C_2, \dots, C_p\}$ 中元素可以分为两类, 即含 0 点环游和不含 0 点环游。不妨设集合 M_C 中不含 0 点的环游 r 个, 含 0 点的环游 $(p-r)$ 个。假设在 $(p-r)$ 个含 0 点的环游中, 权重未超过 λ 的环游 p_1 个和权重超过 λ 的环游 $(p-r-p_1)$ 个。对 M_C 中含 0 点且权重超过 λ 的环游应用拆分算法 A_1 , 引理 2 给出拆分后得到的环游数量的上界。

引理 2 环游集合 M_C 中包含 0 点且权重超过 λ 的环游 C_i , 按算法 A_1 进行拆分, 可得到 k_i 个环游, 且 $k_i < [c(C_i) - 2c_{\max}]/(\lambda - 2c_{\max}) + 1$ 。

证明 根据算法 A_1 , 将点集 $V(C_i)$ 拆分为 k_i 个互不相交的子集。即 $S_1^i = \{0, v_1, \dots, v_{l_1}\}$, $S_j^i = \{v_{l_{j-1}+1}, v_{l_{j-1}+2}, \dots, v_{l_j}\}$, 其中 $j=2, \dots, k_i-1$ 和 $S_{k_i}^i = \{v_{l_{k_i-1}+1}, v_{l_{k_i-1}+2}, \dots, v_{l_{k_i}}, 0\}$, 其中 $v_{l_{k_i}} = v_{m_i}$ 。对于 k_i 个子集 S_j^i , 按点编号的顺序连接成路, 用 $c(S_j^i)$ 表示 S_j^i 对应路的权重。再将 0 点与每条路的非 0 端点相连, 得到环游 $C_1^i = (S_1^i, 0)$, $C_{k_i}^i = (0, S_{k_i}^i)$ 和 $C_j^i = (0, S_j^i, 0)$, 其中 $j=2, \dots, k_i-1$ 。对于环游 C_1^i , 点 v_{l_1} 作为该环游中最后一个非 0 点, 有

$$c(S_1^i) + c(v_{l_1}, v_{l_1+1}) + c(v_{l_1+1}) > \lambda;$$

对于环游 C_j^i , 其中 $j=2, \dots, k_i-1$, 有

$$c(v_{l_{j-1}+1}) + c(S_j^i) + c(v_{l_j}, v_{l_j+1}) + c(v_{l_j+1}) > \lambda;$$

对于环游 $C_{k_i}^i$, 根据三角不等式, 有

$$c(S_{k_i}^i) - c(v_{l_{k_i-1}+1}) \geq 0。$$

将上述 k_i 个不等式累加后, 有

$$\sum_{j=1}^{k_i} c(S_j^i) + \sum_{j=1}^{k_i-1} c(v_{l_j}, v_{l_j+1}) + 2 \sum_{j=1}^{k_i-2} c(v_{l_j+1}) > (k_i - 1)\lambda。$$

又由于 $c_{\max} = \max\{c(v) \mid v \in V \setminus \{0\}\}$, 且

$$\sum_{j=1}^{k_i} c(S_j^i) + \sum_{j=1}^{k_i-1} c(v_{l_j}, v_{l_j+1}) = c(C_i);$$

则

$$c(C_i) + 2(k_i - 2)c_{\max} > (k_i - 1)\lambda。$$

又由于 $2c_{\max} \leq \lambda$, 则

$$k_i < \frac{c(C_i) - 2c_{\max}}{\lambda - 2c_{\max}} + 1。$$

证毕。

集合 M_C 中 r 个不含 0 点的环游, 按算法 A 插入 0 点后得到集合 M_0 , 则 $|M_C| = |M_0| = p$ 。判断插入

0 点后的环游权重是否超过 λ 。假设 r 个插入 0 点后得到的环游中权重未超过 λ 的 r_1 个, 权重超过 λ 的 $(r-r_1)$ 个。对插入 0 点后权重超出 λ 的环游应用拆分算法 A_1 , 引理 3 给出拆分后得到的环游数量的上界。

引理 3 环游集合 M_C 中不含 0 点且插入 0 点后权重超过 λ 的环游 C_i , 按算法 A_1 进行拆分, 可得到 k'_i 个环游, 且 $k'_i \leq [c(C_i) - c(v_j^i, v_{j+1}^i)] / (\lambda - 2c_{\max}) + 1$ 。

证明 根据算法 A, 对于 M_C 中不含 0 点的环游 C_i , 在点 v_j^i 和 v_{j+1}^i 间插入 0 点, 即与最小的节约值 $\min\{s(v_j, v_{j+1}) \mid \forall v_j, v_{j+1} \in V(C_i)\}$ 所对应的边相邻的两点, 并对点重新编号得到环游 C'_i , 则

$$c(C'_i) = c(C_i) + s(v_j^i, v_{j+1}^i) = c(C_i) + c(v_j^i) + c(v_{j+1}^i) - c(v_j^i, v_{j+1}^i)。$$

若权重 $c(C'_i) > \lambda$, 按算法 A_1 对其进行拆分, 即将点集 $V(C'_i)$ 拆分成 k'_i 个互不相交的子集 $S_1^i = \{0, v_1, \dots, v_{l'_1}\}, S_j^i = \{v_{l'_{j-1}+1}, v_{l'_{j-1}+2}, \dots, v_{l'_j}\}$, 其中 $j=2, \dots, k'_i-1, S_{k'_i}^i = \{v_{l'_{k'_i-1}+1}, \dots, v_{l'_{k'_i}}, 0\}, v_{l'_{k'_i}} = v_{m_i}$ 。构造子集 S_j^i 对应的环游 C_j^i , 其中 $j=1, \dots, k'_i$ 。则由引理 2 可知:

$$\sum_{j=1}^{k'_i} c(S_j^i) + \sum_{j=1}^{k'_i-1} c(v_{l'_j}, v_{l'_{j+1}}) + 2 \sum_{j=1}^{k'_i-2} c(v_{l'_{j+1}}) > (k'_i - 1)\lambda。$$

又由于 $c_{\max} = \max\{c(i) \mid i \in V \setminus \{0\}\}$, 且

$$\sum_{j=1}^{k'_i} c(S_j^i) + \sum_{j=1}^{k'_i-1} c(v_{l'_j}, v_{l'_{j+1}}) = c(C'_i);$$

则

$$c(C_i) + s(v_j^i, v_{j+1}^i) + 2(k'_i - 1)c_{\max} > (k'_i - 1)\lambda;$$

因此有

$$k'_i < \frac{c(C_i) + s(v_j^i, v_{j+1}^i) - 2c_{\max}}{\lambda - 2c_{\max}} + 1。$$

又由于

$$2c_{\max} - s(v_j^i, v_{j+1}^i) \geq c(v_j^i, v_{j+1}^i);$$

则

$$k'_i < \frac{c(C_i) - c(v_j^i, v_{j+1}^i)}{\lambda - 2c_{\max}} + 1。$$

证毕。

对集合 M_0 中 $(p_1 + r_1)$ 个权重未超过 λ 的环游应用环游整合算法 A_2 , 并给出整合后环游数量的上界。

引理 4 对环游集合 M_0 中所有权重未超过 λ 的环游, 按算法 A_2 进行整合, 可得到 k^γ 个环游, 且 $k^\gamma < [\sum_{i=1}^{p_1+r_1} c(C_i) + 2c_{\max}(r_1 - 1) - r_1 a] / (\lambda - 2c_{\max}) + 1$ 。

证明 将 M_0 中的环游重新编号, 即 $M_0 = \{C'_1, \dots, C'_{p_1}, C'_{p_1+1}, \dots, C'_{p_1+r_1}, \dots, C'_{p_1+r_1}\}$, 使得前 p_1 个环游对应 M_C 中含 0 点的环游; 第 (p_1+1) 到第 (p_1+r_1) 个环游则是 M_C 中不含 0 点的环游插入 0 点后得到的, 按算法 A_2 将此 (p_1+r_1) 个环游整合后得到环游 C^γ , 判断该环游权重 $c(C^\gamma)$ 是否超过 λ , 若未超过 λ , 则 $k^\gamma = 1$; 若超过 λ , 对 C^γ 应用环游拆分算法 A_1 , 得到 k^γ 个满足约束的环游。根据引理 2, 为给出 k^γ 的上界, 需要给出环游权重 $c(C^\gamma)$ 的上界。

由于该 (p_1+r_1) 个环游中均含 0 点, 按算法 A_2 删除各环游中 0 点及与其相邻两边, 并将得到的 (p_1+r_1) 条路的端点首尾相连后, 再插入 0 点构造环游 C^r 。因此, 根据三角不等式有

$$c(C^\gamma) \leq \sum_{i=1}^{p_1+r_1} C'_i。$$

其中第 (p_1+1) 到第 (p_1+r_1) 个是 M_C 中不含 0 点的环游插入 0 点后得到的, 即

$$\sum_{i=p_1+1}^{p_1+r_1} c(C'_i) = \sum_{i=p_1+1}^{p_1+r_1} [c(C_i) + c(v_j^i) + c(v_{j+1}^i) - c(v_j^i, v_{j+1}^i)];$$

而前 p_1 个环游对应 M_C 中含 0 点的环游, 因此

$$\sum_{i=1}^{p_1+r_1} c(C'_i) = \sum_{i=1}^{p_1} c(C_i) + \sum_{i=p_1+1}^{p_1+r_1} [c(C_i) + c(v_j^i) + c(v_{j+1}^i) - c(v_j^i, v_{j+1}^i)];$$

又由于 $a = \min\{c(u, v) \mid \forall u, v \in V \setminus \{0\}, u \neq v\}$, 有

$$c(C^\gamma) \leq \sum_{i=1}^{p_1} c(C_i) + 2r_1 c_{\max} + \sum_{i=p_1+1}^{p_1+r_1} (c(C_i) - c(v_j^i, v_{j+1}^i)) \leq \sum_{i=1}^{p_1+r_1} c(C_i) + 2r_1 c_{\max} - r_1 a。$$

因此,根据引理2有

$$k^\gamma < \frac{\sum_{i=1}^{p_1+r_1} c(C_i) + 2c_{\max}(r_1-1) - r_1a}{\lambda - 2c_{\max}} + 1;$$

则

$$k^\gamma < \max\left\{\frac{\sum_{i=1}^{p_1+r_1} c(C_i) + 2c_{\max}(r_1-1) - r_1a}{\lambda - 2c_{\max}} + 1, 1\right\} = \frac{\sum_{i=1}^{p_1+r_1} c(C_i) + 2c_{\max}(r_1-1) - r_1a}{\lambda - 2c_{\max}} + 1.$$

证毕。

Li等^[10]给出了 DVRP 的 TSP 环游拆分算法,并证明算法近似比为 $[1+\lambda/(\lambda-2c_{\max})]$ 。对于该比值,当 λ 远大于 c_{\max} 且趋近于 $+\infty$ 时, $[1+\lambda/(\lambda-2c_{\max})]$ 趋近于常数2。因此,研究最大行驶距离 $\lambda \geq 2c_{\max}$ 且取值较小时的 DVRP 近似算法更有意义。

假设由算法A得到的 DVRP 的算法解为 $sol = \{C_1^{sol}, C_2^{sol}, \dots, C_{k_h}^{sol}\}$,记 $c(sol)$ 为算法解的权重值。根据上述引理2—引理4,下文给出当 $2c_{\max} \leq \lambda \leq 4c_{\max}$ 时,算法解环游数量 k_h 的上界。

定理1 当 $2c_{\max} \leq \lambda \leq 4c_{\max}$ 时,有 $k^h < [c(M_C) + r(2c_{\max} - a)]/(\lambda - 2c_{\max})$ 。

证明 将集合 M_0 中的环游重新编号,使得前 (p_1+r_1) 个环游是权重未超过 λ 的环游,其中前 p_1 个环游对应 M_C 中含0点的环游,第 (p_1+1) 到第 (p_1+r_1) 个环游则对应 M_C 中不含0点的环游;后 $(p-p_1-r_1)$ 个环游是权重超过 λ 的环游,其中第 (p_1+r_1+1) 到第 (p_1+r) 个环游对应 M_C 中不含0点环游;第 (p_1+r+1) 到第 p 个环游则对应 M_C 中含0点的环游。即 $M_0 = \{C'_1, \dots, C'_{p_1}, C'_{p_1+1}, \dots, C'_{p_1+r_1}, C'_{p_1+r_1+1}, \dots, C'_{p_1+r}, C'_{p_1+r+1}, \dots, C'_p\}$ 。

根据引理2,第 (p_1+r+1) 到第 p 个环游经过拆分后,其环游数量的上界为

$$\sum_{(p_1+r+1)}^p k_i < \sum_{(p_1+r+1)}^p \left[\frac{c(C_i) - 2c_{\max}}{\lambda - 2c_{\max}} + 1 \right] = \frac{\sum_{(p_1+r+1)}^p c(C_i) - 2(p-r-p_1)c_{\max}}{\lambda - 2c_{\max}} + (p-r-p_1).$$

根据引理3,第 (p_1+r_1+1) 到第 (p_1+r) 个环游经过拆分后,其环游数量的上界为

$$\sum_{(p_1+r_1+1)}^{p_1+r} k'_i < \sum_{(p_1+r_1+1)}^{p_1+r} \left[\frac{c(C_i) - c(v_j^i, v_{j+1}^i)}{\lambda - 2c_{\max}} + 1 \right] \leq \frac{(r_1-r)a + \sum_{(p_1+r_1+1)}^{p_1+r} c(C_i)}{\lambda - 2c_{\max}} + (r-r_1).$$

根据引理4,前 (p_1+r_1) 个环游经过整合后,其环游数量的上界为

$$k^\gamma < \frac{\sum_{i=1}^{p_1+r_1} c(C_i) + 2c_{\max}(r_1-1) - r_1a}{\lambda - 2c_{\max}} + 1;$$

而且,由于

$$c(M_C) = \sum_{i=1}^{p_1+r_1} c(C_i) + \sum_{(p_1+r_1+1)}^{p_1+r} c(C_i) + \sum_{(p_1+r+1)}^p c(C_i),$$

有

$$\begin{aligned} k^h &< (p-r_1-p_1+1) + \frac{1}{\lambda - 2c_{\max}} [c(M_C) - 2c_{\max}(p-r-p_1) + 2c_{\max}(r_1-1) - ra] \\ &= (p-r_1-p_1+1) + \frac{1}{\lambda - 2c_{\max}} [c(M_C) - 2c_{\max}(p-r-p_1-r_1+1) - ra] \\ &= \frac{1}{\lambda - 2c_{\max}} [c(M_C) + \lambda(p-r_1-p_1+1) - 2c_{\max}(2p-2r_1-2p_1+2-r) - ra] \\ &= \frac{1}{\lambda - 2c_{\max}} [c(M_C) + \lambda(p-r_1-p_1+1) - 4c_{\max}(p-r_1-p_1+1) + r(2c_{\max}-a)]. \end{aligned}$$

当 $2c_{\max} \leq \lambda \leq 4c_{\max}$ 时,有

$$k^h < \frac{1}{\lambda - 2c_{\max}} [c(M_C) + r(2c_{\max}-a)].$$

证毕。

下面考虑在特殊情况 $3c_{\max} \leq \lambda \leq 4c_{\max}$ 时,算法 A 的近似比上界。

定理 2 当 $3c_{\max} \leq \lambda \leq 4c_{\max}$ 时,算法的近似比为 $\frac{c(sol)}{opt_{DVRP}} < \eta \left[1 + \frac{r(2c_{\max} - a)}{c(M_C)} \right]$ 。

证明 由算法 A 得到的 k^h 个环游的权重均不超过 λ ,即 $c(sol) \leq k^h \lambda$ 。又根据引理 1,有 $opt_{DVRP} \geq c(M_C)$,则

$$\frac{c(sol)}{opt_{DVRP}} \leq \frac{k^h \lambda}{c(M_C)};$$

根据定理 1

$$k^h < \frac{1}{\lambda - 2c_{\max}} [c(M_C) + r(2c_{\max} - a)],$$

有

$$\frac{c(sol)}{opt_{DVRP}} < \frac{\lambda}{c(M_C)} \cdot \frac{[c(M_C) + r(2c_{\max} - a)]}{(\lambda - 2c_{\max})} = \frac{\lambda}{(\lambda - 2c_{\max})} + \frac{\lambda}{(\lambda - 2c_{\max})} \cdot \frac{r(2c_{\max} - a)}{c(M_C)}。$$

令 $\eta = \frac{\lambda}{(\lambda - 2c_{\max})}$, 则 $\frac{c(sol)}{opt_{DVRP}} < \eta \left[1 + \frac{r(2c_{\max} - a)}{c(M_C)} \right]$ 。

证毕。

4 实例分析

对于定理 2 给出的算法 A 参数形式近似比上界,下面将用一个实例来说明,目标函数为极小化总行驶距离的 DVRP,在 $r(2c_{\max} - a)/c(M_C) \leq 1/3$ 时,本文提出的算法 A 比 Li 等^[11]提出的 TSP 环游拆分算法的结果更优。

给定一个 DVRP 实例,如图 1 所示,其中包括 81 个顾客点和 1 个仓库点。由于本文考虑的是无向完全图上度量 DVRP,因此权重需满足对称性,非负性以及三角不等式。定义该实例的度量边权重:同一排相邻两顾客点的边权重为 2;从第 4 排到第 9 排,相邻两排位置对应的两点间边的权重为 4;从仓库点到第 i 排的顾客点间边的权重为 i ,其中 $i = 1, 2, \dots, 9$;此外,任意两点间的边权重则为此两点间最短路的权重,因此,该权重函数满足三角不等式。同时,给出最大行驶距离 $\lambda = 4c_{\max} = 36$ 。应用 TSP 环游拆分算法计算该实例结果如图 2 所示,用 sol_{TSP} 表示 TSP 环游拆分算法解的环游集合,记 $c(sol_{TSP})$ 为 sol_{TSP} 中各环游权重之和,则 $c(sol_{TSP}) = 247$ 。

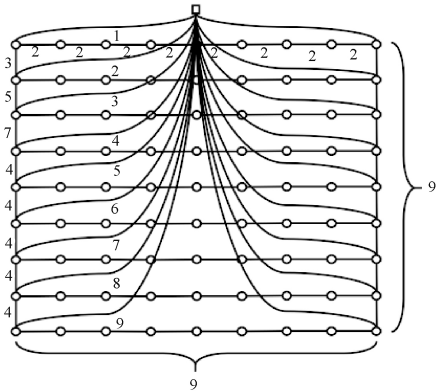


图 1 DVRP 实例

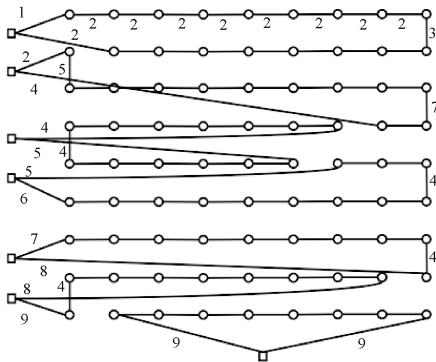


图 2 TSP 环游拆分算法的环游集合

应用近似算法 A 计算该实例,首先给出该实例松弛问题 CCP 的环游集合 M_C ,如图 3 所示;再对集合 M_C 中的部分环游插入 0 点,应用环游拆分算法 A_1 与环游整合算法 A_2 得到算法解 sol ,如图 4 所示,则 $c(sol) = 242$,即 $c(sol) < c(sol_{TSP})$ 。

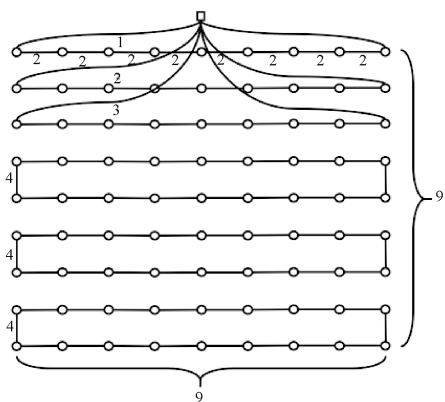


图 3 DVRP 松弛问题 CCP 的环游集合

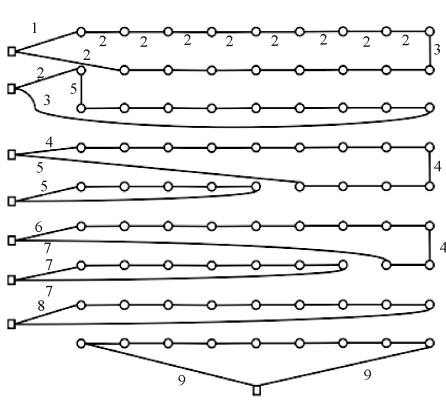


图 4 近似算法 A 算法解的环游集合

5 结 论

本文研究无向完全图上以极小化总行驶距离为目标函数的 DVRP, 将 MB2M 与环游拆分和环游整合相结合, 设计了近似算法, 证明了该算法在 $3c_{\max} \leq \lambda \leq 4c_{\max}$ 时参数形式的近似比上界, 用一个 DVRP 实例说明了该算法在某些情况下的结果更优, 并说明实例中顾客点规模和行驶距离的取值对该算法近似比的影响较小。

但是, 该算法近似比上界的证明仅考虑 $3c_{\max} \leq \lambda \leq 4c_{\max}$ 情况下的结果, 后续将进一步研究当 $2c_{\max} \leq \lambda < 3c_{\max}$ 时的 DVRP 近似算法的近似比上界; 并且为了方便分析证明, 本文仅考虑了无向完全图下仅送货(取货), 需求不可拆分的 DVRP 问题, 后续会考虑将本文提出的算法推广到车辆容量和行驶距离均受限的 VRP, 以及诸如存在逆向物流与交叉物流的物流网络等更贴合实际物流网络情形的 VRP。

参考文献:

[1] Konstantakopoulos G D, Gayialis S P, Kechagias E P. Vehicle routing problem and related algorithms for logistics distribution: A literature review and classification[J/OL]. Operational Research, 2020. (2020-09-09) [2021-07-15]. <https://doi.org/10.1007/s12351-020-00600-7>.

[2] Yadav U, Sharma S K, Routroy S. Vehicle routing problem: recent literature review of its variants[J/OL]. International Journal of Operational Research, 2018, 33(1): 1-31[2021-07-15]. <https://doi.org/10.1504/ijor.2018.10015367>.

[3] Dantzig G B, Ramser J H. The truck dispatching problem[J]. Management Science, 1959, 6(1): 80-91.

[4] Amous M, Toumi S, Jarbouli B, et al. A variable neighborhood search algorithm for the capacitated vehicle routing problem[J]. Electronic Notes in Discrete Mathematics, 2017, 58: 231-238.

[5] Yu W, Liu Z H, Bao X G. Distance constrained vehicle routing problem to minimize the total cost: algorithms and complexity[J/OL]. Journal of Combinatorial Optimization, 2020, 5: 1-18[2021-07-15]. <http://dx.doi.org/10.1007/s10878-020-00669-y>.

[6] Papadimitriou C H. The Euclidean travelling salesman problem is NP-complete[J]. Theoretical Computer Science, 1977, 4 (3): 237-244.

[7] Haimovich M, Rinnooy Kan A H G. Bounds and heuristics for capacitated routing problems[J]. Mathematics of Operations Research, 1985, 10(4): 527-542.

[8] Khachay M, Ogorodnikov Y. Polynomial capacity guarantees PTAS for the euclidean capacitated vehicle routing problem even for non-uniform non-splittable demand[C]//International Conference on Optimization and Applications, 2019. Cham: Springer International Publishing, 2020, 1145: 415-426.

[9] Becker A. A tight 4/3 approximation for capacitated vehicle routing in trees[EB/OL]. (2018-08-25) [2021-07-15]. <https://arxiv.org/pdf/1804.08791>.

[10] Lenstra J K, Kan A H G R. Complexity of vehicle routing and scheduling problems[J]. Networks, 2010, 11(2): 221-227.

[11] Li C L, Simchi-Levi D, Desrochers M. On the distance constrained vehicle routing problem[J]. Operations Research,

1992, 40(4): 790-799.

[12] Bazgan C, Hassin R, Monnot J. Approximation algorithms for some vehicle routing problems[J]. Discrete Applied Mathematics, 2005, 146(1): 27-42.

[13] Nagarajan V, Ravi R. Approximation algorithms for distance constrained vehicle routing problems[J]. Networks, 2012, 59(2): 209-214.

[14] Friggstad Z, Swamy C. Approximation algorithms for regret-bounded vehicle routing and applications to distance-constrained vehicle routing[C]//Proceedings of the forty-sixth annual ACM symposium on Theory of computing. New York: ACM, 2014: 744-753.

[15] Hartvigsen D. Extensions of Matching Theory[D]. Pittsburgh, Pennsylvania: Carnegie-Mellon University, 1984: 1-18.

[16] Pekny J F, Miller D L. A staged primal-dual algorithm for finding a minimum cost perfect two-matching in an undirected graph[J]. ORSA Journal on Computing, 1994, 6(1): 68-81.

(责任编辑:康 锋)