



带随机 Robin 边界数据的三层热传递模型及参数识别反问题

谷 韬, 徐定华

(浙江理工大学理学院, 杭州 310018)

摘 要: 为描述带随机数据的环境-热防护服-空气层-皮肤系统的热传递过程, 建立了带随机 Robin 边界条件的一类三层抛物型方程定解问题, 对方程进行数值求解, 得到了温度随时间、空间的分布情况。提出了概率意义下的厚度参数识别反问题, 并基于区间算法思想构建了反问题的一种随机搜索算法, 通过数值计算获得了给定设计目标下的厚度参数置信区间。将计算结果代入正问题模型, 并结合皮肤烧伤评估系统进行验证, 结果表明置信区间下选取的厚度参数可以尽可能减轻烧伤程度。

关键词: 随机 Robin 边界条件; 热传递; 反问题; 数值模拟

中图分类号: O242.1

文献标志码: A

文章编号: 1673-3851(2021)03-0266-07

Three-layer heat transfer model with random Robin boundary data and the inverse problem of parameter identification

GU Tao, XU Dinghua

(School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: In this paper, a class of three-layer parabolic equation finite solution problems with random Robin boundary conditions was established to describe the heat transfer process of environment-heat protective clothing-air layer-skin system with random data. The distribution of temperature with time and space was derived by solving the equation. An inverse problem of thickness parameter identification in the sense of probability was presented. Based on the idea of interval algorithm, a random search algorithm for inverse problem was constructed. The confidence interval of the thickness parameter under the given design objective was obtained through numerical calculation. The calculation results were substituted into the direct problem model and verified using the skin burn evaluation system. The results show that the thickness parameter selected under the confidence interval can reduce the degree of burn as far as possible.

Key words: random Robin boundary conditions; heat transfer; inverse problem; numerical simulation

0 引 言

在消防救援、陶瓷制造、金属炼钢、石油化工等诸多行业中, 工作人员时常在高温环境下进行作业。高温通过服装传递到人体皮肤之后, 使得皮肤发生不同程度的热损伤。热防护服由于具有较好的隔热性以及阻燃性, 可以很大程度上减缓热量传递的速度, 以保护皮肤不发生烧伤或尽可能少烧伤^[1-3]。因此, 建立高温

收稿日期: 2020-12-10 网络出版日期: 2021-02-03

基金项目: 国家自然科学基金项目(11871435, 11471287)

作者简介: 谷 韬(1993-), 男, 安徽马鞍山人, 硕士研究生, 主要从事偏微分方程反问题方面的研究。

通信作者: 徐定华, E-mail: dhuxu6708@zstu.edu.cn

环境下热防护服装热传递模型,并结合人体皮肤烧伤评估系统,为高性能热防护服装研究的结构参数以及物理学参数的选取提供理论依据显得尤为重要。

近年来,关于热传递模型的研究不断增加。Torvi 等^[4-5]提出了高温环境下的单层热防护服的热传递模型。与 Torivi 等提出的模型相似,Mell 等^[6]考虑了热防护服材料的热传导和热辐射,提出了一种包含多层材料的热传递模型。Chazy 等^[7]考虑了空气层对热防护服性能的影响,建立了包含空气层的多层传递模型。上述热传递模型在边界条件上多为 Dirichlet 和 Neumann 边界,在此基础上,Li 等^[1]和 Xu 等^[2-3]建立一类具有 Robin 边界条件的单层或多层热传递模型,并更准确地描述边界上的热交换。

总之,上述模型都将高温环境温度数据看作确定性的,没有考虑高温工作环境下温度随机变化的情形。本文建立的是一类带有随机 Robin 边界数据的三层热传递模型,相比于其他模型,更贴合实际情况中的热交换过程。同时,对所建立的模型,本文采用了一种高收敛阶的复合有限差分算法进行数值求解;针对功能服装的热安全性要求,本文提出了概率意义下的热防护服厚度参数识别反问题,并基于区间算法思想构建了反问题的一种随机搜索算法。通过对反问题进行数值实验,为高温环境下的安全工作时间和热防护服的性能研究提供科学指导。

1 三层抛物型方程模型

本文考虑三层抛物型方程定解问题,温度场 $u(x, t)$ 满足

$$\begin{cases} \partial_t u_i = a_i \partial_x^2 u_i, (x, t) \in (L_{i-1}, L_i) \times (0, T], \quad i = 1, 2, 3, \quad L_0 = 0, \\ -k_i \partial_x u_i(L_i, t) = -k_{i+1} \partial_x u_{i+1}(L_i, t) = \sigma_i (u_i(L_i, t) - u_{i+1}(L_i, t)), \quad t \in (0, T], \quad i = 1, 2, \\ -k_1 \partial_x u_1(0, t) = h_{c,fl} (u_1(t) - u_e(t)), \quad t \in (0, T], \\ -k_3 \partial_x u_3(L_3, t) = \sigma_3 (u_3(L_3, t) - u_{art}), \quad t \in (0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, L_3] \end{cases} \quad (1)$$

其中: a_i, k_i, σ_i 分别为第 $i (i = 1, 2, 3)$ 层的热扩散系数相关系数、热传导率、热交换系数;第 $i (i = 1, 2, 3)$ 层的厚度可以表示为 $L_i - L_{i-1}, L_0 = 0; h_{c,fl}$ 为高温环境和织物外表面之间的热传递系数; u_{art} 为人体血液温度,通常被视为确定性的^[5-9];环境温度 $u_e(t) = u_g(t) + W(t)$, $u_g(t)$ 为环境温度的确定性部分, $W(t)$ 为环境温度的随机性部分。在本文中, $W(t)$ 是一个随时间连续变化的随机过程,若以布朗运动^[10]描述,可以表示为:

$$W(t) \equiv W(V, t) = \sum_{i=1}^{+\infty} v_i \int_0^t \omega_i(s) ds, \quad t \in [0, T] \quad (2)$$

其中: $\{\omega_i(t), i = 1, 2, \dots\}$ 为 $L^2[0, T]$ 上的完备正交系, $V = (v_1, v_2, \dots, v_n, \dots)$ 为一组相互独立的标准高斯随机变量。对于 V 的某个具体实现 $V^p = (v_1^p, v_2^p, \dots, v_n^p, \dots)$, $p = 1, 2, \dots, W(V^p, t)$ 为定义在 $[0, T]$ 上的一个函数,称 $W(V^p, t)$ 为 $W(t)$ 的一条样本轨道或一个样本函数^①。上述三层抛物型方程模型是基于环境-热防护服-空气层-皮肤系统(如图 1 所示)和如下假设条件建立,假设条件为^[1-7, 10]:

- a) 热传递沿垂直于皮肤方向进行,模型可视为一维;
- b) 热防护服装材料是各向同性的;
- c) 空气层厚度不超过 6.4 mm,不考虑空气层与热防护服织物之间的热对流;
- d) 空气层在高温环境下处于干燥状态,不考虑湿传递;
- e) 模型之间的接触面上,热通量是连续变化的,但温度是跳跃的;
- f) 环境温度是一个随机过程,关于时间 t 随机变化。

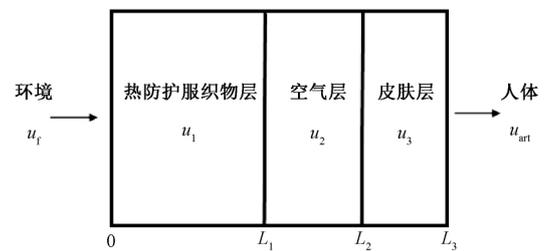


图 1 环境-热防护服-空气层-皮肤系统的示意

高温环境使得模型内外侧存在较大的热交换,这就必须要使用 Robin 边界条件来描述,具体在方程(1)中左右边界条件均为 Robin 边界条件。

① 对于给定样本轨道下的 $W(t)$, 参照 Yang 等^[11]和 Ladyzenskaja 等^[12]的结果可给出环境温度 $u_e(t)$ 为确定性条件下定解问题(1)解的唯一性证明。

2 热防护服织物厚度参数识别反问题

基于上述三层热传递模型,本文研究在保证高温环境下工作人员不发生烧伤或尽可能少烧伤的前提下,优化选取热防护服厚度参数。

2.1 皮肤烧伤程度的评估

皮肤烧伤度评估过程中,通常当人体皮肤表面下 $80 \mu\text{m}$ 处(基底层)的绝对温度 $u_3 \geq 317.15 \text{ K}$ 时,皮肤开始发生热损伤。Henriques 皮肤烧伤积分模型是评估皮肤烧伤程度的准则之一,应用较为广泛,该模型通过将皮肤温度代入 Henriques 提出的一阶积分方程^[13]:

$$\Omega(x, t_f) = \int_0^{t_f} D \exp\left(-\frac{\Delta E}{R u_3(x, s)}\right) ds \quad (3)$$

其中: Ω 为皮肤烧伤程度的量化值; D 为频率破坏因子; ΔE 为皮肤活化性能; R 为理想气体常数; t_f 为皮肤暴露于热源下其温度 $u_3 \geq 317.15 \text{ K}$ 的持续时间。通过 $\Omega(L_2, t_f)$ 值评估皮肤烧伤的程度:当 $\Omega(L_2, t_f) \leq 0.53$ 时,皮肤不会发生烧伤;当 $0.53 \leq \Omega(L_2, t_f) \leq 1$ 时,皮肤将发生一级烧伤;当 $1 \leq \Omega(L_2, t_f) \leq 10^4$ 时,皮肤将发生二级烧伤。

2.2 反问题的数学归结与求解步骤

在高温环境下工作人员的热安全是热防护服的首要功能需求,据此可归结如下反问题:确保皮肤不发生二级烧伤(即 $\Omega^* = [0, 1]$)的概率不低于 $s, 0 < s < 1$ 的前提下,优化决定热防护服厚度参数。

设热防护服厚度 L 为随机变量,其概率密度函数为 $f_L(l)$;则皮肤烧伤度 Ω 是随机变量 L 的函数, $\Omega = g(L)$,依据实际问题的背景,当随机变量 $L \leq L_{\max}$ 时,显然 g 是单调递减的函数,其反函数 $L = h(\Omega)$ 必存在。

对于任意的非负数 ω ,由于 g 是单调递减的,有:

$$P\{\Omega \leq \omega\} = P\{L \geq h(\omega)\} = \int_{h(\omega)}^{+\infty} f_L(l) dl,$$

对上式关于 ω 求导,可得随机变量 Ω 的概率密度函数:

$$f_\Omega(\omega) = -f_L(h(\omega))h'(\omega),$$

此时,皮肤不发生二级烧伤的概率可表示为:

$$P\{\Omega \in \Omega^*\} = P\{0 \leq \Omega \leq 1\} = \int_0^1 -f_L(h(\omega))h'(\omega) d\omega,$$

对于正问题,只要给出相应的参数(厚度、孔隙率、热传导率等),就可以计算出 $\Omega(L_2, t_f)$,并判断是否发生二级烧伤。而反问题的求解步骤如下:

步骤 1. 构造概率意义下反问题的解,随机搜索 L 以满足:

$$P\{\Omega(L + L_{\text{air}}, t_f) \in \Omega^*\} \geq s, \quad 0 < s < 1 \quad (4)$$

其中: L_{air} 表示空气层的厚度; s 在可允许的范围内取值;

步骤 2. 由式(4)并结合随机变量 L 的先验信息获得其概率密度函数 $f_L(l)$ 的相关参数,如 $L \sim U(a, b)$ 或 $L \sim N(\mu, \sigma^2)$,则需要获得参数 $\{a, b\}$ 或 $\{\mu, \sigma\}$ 取值,以确定其概率密度函数:

$$f_L^1(l) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & l \in [a, b], \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$$

$$f_L^2(l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(l-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

步骤 3. 计算带有式(4)约束下的随机变量 L 的数学期望,以应用背景下节省热防护服材料为目标,按期望值取最小时的参数作为参数最优选取。

3 基于多样本路径取均值的正问题数值算法

(C)1994-2021, China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net
使用复合有限差分算法求解方程(1),将求解区域 $[0, L_3] \times [0, T]$ 作均等剖分,并记 $h = L_3/m, \tau = T/n$ 。

接下来采用 Crank-Nicolson 格式^[14] 求解方程(1), 差分格式表示为:

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\tau} = \frac{a_j}{2h^2}(u_{i-1,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i+1,j}^{k+1}) + \frac{a_j}{2h^2}(u_{i-1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i+1,j}^k) \tag{5}$$

其中: $u_{i,j}^k$ 为第 $j(j=1,2,3)$ 层在时间 $t_k = k\tau, 1 \leq k \leq n-1$ 和位置 $x_i = ih, 1 \leq i \leq m-1$ 的温度 u_j . 方程(1)的接触面条件和初边值条件的处理如下:

$$\begin{cases} 2r_2 u_{m_1-1,1}^{k+1} + (1 + 2r_2 + r_1 r_2) u_{m_1,1}^{k+1} - r_1 r_2 u_{m_1,2}^{k+1} = 2r_2 u_{m_1-1,1}^k + (1 - 2r_2 - r_1 r_2) u_{m_1,1}^k + r_1 r_2 u_{m_1,2}^k, \\ r_3 r_4 u_{m_1,1}^{k+1} + (1 + 2r_4 - r_3 r_4) u_{m_1,2}^{k+1} - 2r_4 u_{m_1+1,2}^{k+1} = -r_3 r_4 u_{m_1,1}^k + (1 - 2r_4 + r_3 r_4) u_{m_1,2}^k + 2r_4 u_{m_1+1,2}^k, \\ 2r_6 u_{m_2-1,2}^{k+1} + (1 + 2r_6 + r_5 r_6) u_{m_2,2}^{k+1} - r_5 r_6 u_{m_2,3}^{k+1} = 2r_6 u_{m_2-1,2}^k + (1 - 2r_6 - r_5 r_6) u_{m_2,2}^k + r_5 r_6 u_{m_2,3}^k, \\ r_7 r_8 u_{m_2,2}^{k+1} + (1 + 2r_8 - r_7 r_8) u_{m_2,3}^{k+1} - 2r_8 u_{m_2+1,3}^{k+1} = -r_7 r_8 u_{m_2,2}^k + (1 - 2r_8 + r_7 r_8) u_{m_2,3}^k + 2r_8 u_{m_2+1,3}^k \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} u_{0,1}^{k+1} = \left(1 - \frac{2a_1\tau}{h^2} - \frac{2a_1\tau h_{c,fl}}{hk_1}\right) u_{0,1}^k + \frac{2a_1\tau}{h^2} u_{1,1}^k + \frac{2\tau}{h} \alpha^k, \\ u_{m,3}^{k+1} = \frac{2a_3\tau}{h^2} u_{m-1,3}^k + \left(1 - \frac{2a_3\tau}{h^2} - \frac{2a_3\tau\sigma_3}{hk_3}\right) u_{m,3}^k + \frac{2a_3\tau\sigma_3}{hk_3} u_{art}, \\ (u_{0,1}^0, u_{1,1}^0, \dots, u_{m,3}^0) = (u_0(x_0), u_0(x_1), \dots, u_0(x_m)) \end{cases} \tag{7}$$

其中:

$$r_1 = \frac{2h\sigma_1}{k_1}, r_2 = \frac{a_1\tau}{2h^2}, r_3 = \frac{2h\sigma_1}{k_2}, r_4 = \frac{a_2\tau}{2h^2}, r_5 = \frac{2h\sigma_2}{k_2}, r_6 = \frac{a_2\tau}{2h^2},$$

$$r_7 = \frac{2h\sigma_2}{k_3}, r_8 = \frac{a_3\tau}{2h^2}, \alpha(t) = \frac{a_1 h_{c,fl}}{k_1} (u_g(t) + W(t)).$$

m_1, m_2 分别为接触面 L_1, L_2 处的下标位置. 对于布朗运动 $W(t)$, 其数值格式如下^[10]:

$$\begin{cases} W(t_{k+1}) \equiv W^{k+1} = \sum_{i=0}^k \Delta W^i = \sum_{i=0}^k \sqrt{\Delta t_i} v_i, \\ \Delta W^i = W(t_{i+1}) - W(t_i), \\ \Delta t_i = t_{i+1} - t_i \end{cases} \tag{8}$$

利用式(5)–(8), 计算随机项 $u_f(t)$ 对应多条样本轨道的解, 并取其均值近似作为方程(1)的数值解.

4 基于区间算法的厚度决定反问题随机搜索算法

4.1 区间算法

下面以一个有偏的 M -硬币来描述区间算法^[15] 生成随机数的过程, 令 X 是一个随机变量列 $\{1, 2, \dots, M\}$, 其概率分布满足:

$$\mathbf{P} = (p_1, p_2, \dots, p_M)^T, \quad \sum_{i=1}^M p_i = 1, \quad p_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, M,$$

则可以称 X 为一个 M -硬币. M 有限时, 若 $p_1 = p_2 = \dots = p_M$, 则 M -硬币是无偏的, 反之是有偏的. 对于随机分布列 $\{r_1, r_2, \dots, r_N\}$, 其概率分布满足 $\mathbf{Q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)^T$, 则随机数选取的具体步骤如下:

步骤 1. 根据 $\mathbf{Q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)^T$ 将输出区间 $[0, 1]$ 划分成 N 个区间 $J(1), J(2), \dots, J(N)$, 其中:

$$J(i) = \left[\sum_{j=1}^{i-1} q_j, \sum_{j=1}^i q_j \right], \quad i = 1, 2, \dots, N;$$

步骤 2. 根据分布 $\mathbf{P} = (p_1, p_2, \dots, p_M)^T$ 初次划分输入区间 $[0, 1]$ 得到 $I(1), I(2), \dots, I(M)$, 其中:

$$I(1) = [0, p_1], \quad I(k) = \left[\sum_{j=1}^{k-1} p_j, \sum_{j=1}^k p_j \right], \quad k = 2, \dots, M-1, \quad I(M) = \left[\sum_{j=1}^{M-1} p_j, 1 \right];$$

步骤 3. 判断 $I(k)$ 是否包含于某个 $J(i)$, 若存在满足条件的输出区间, 则输出该区间代表值作为一个随机数, 反之根据 $\mathbf{P} = (p_1, p_2, \dots, p_M)^T$ 再次划分 $I(k)$ 得到 $I(k1), I(k2), \dots, I(kM)$, 重复上述步骤, 直到得到足够的随机数(每个随机数最多只取一次), 算法停止.

4.2 先验假设下反问题的随机搜索算法

由正问题的计算结果可知,当外界环境、热防护服材料、工作时间给定的前提下,热防护服厚度过小或过大(可能导致散热性差、负重较大)都会造成不同程度的热损伤,因此需要在适当的区间 $[l_a, l_b]$ 进行随机搜索。下面基于区间算法思想建立反问题的随机搜索算法:

算法 均匀分布或正态分布先验假设下反问题的随机搜索算法。

输入:随机变量 $l \in [l_a, l_b]$, 随机变量 l 的先验分布信息。

输出:反问题的解 $\{a, b\}$ 或 $\{\mu, \sigma\}$ 。

步骤 1. 使用区间算法生成取自 $l \in [l_a, l_b]$ 的随机样本点 $\mathfrak{R} \triangleq \{r_1, r_2, \dots, r_N\}$ 。

步骤 2. 验证随机样本 \mathfrak{R} 是否满足式(4)的约束,若满足条件则进行第三步,否则返第一步。

步骤 3. 利用矩估计法分别对先验信息为均匀分布、正态分布下的样本点 $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ 作参数估计,分别得到 $\{a = m_1 - \sqrt{3m_2}, b = m_1 + \sqrt{3m_2}\}$ 或 $\{\mu = m_1, \sigma = \sqrt{m_2}\}$, 这里, m_1 和 m_2 分别表示样本总体的一阶原点矩和二阶中心矩。

步骤 4. 计算不同分布下随机变量 L 的数学期望: 对均匀分布, $E = \frac{1}{b-a} \int_a^b l dl$; 对正态分布, $E = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} l \exp\left(-\frac{(l-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dl$ 。

步骤 5. 多次重复前 4 步的过程,计算得到多组期望值 $\{E_1, E_2, \dots, E_i\}$, 以 $L^* = \min\{E_1, E_2, \dots, E_i\}$ 对应的均匀分布估计参数 $\{a^*, b^*\}$ 或正态分布估计参数 $\{\mu^*, \sigma^*\}$ 作为反问题的解。

5 数值模拟及结果分析

5.1 正问题的计算

首先,对方程(1)中的参数取值如下:

$$\begin{cases} a_1 = 3.36 \times 10^{-2}, & k_1 = 0.814, & \sigma_1 = 1.134 \times 10^{-9}, & L_1 = 0.008; \\ a_2 = 5.82 \times 10^{-5}, & k_2 = 0.069, & \sigma_2 = 1.134 \times 10^{-9}, & L_2 = 0.006; \\ a_3 = 5.90 \times 10^{-8}, & k_3 = 0.255, & \sigma_3 = 5.027 \times 10^{-8}, & L_3 = 0.006; \\ u_g = 1000 \text{ K}, & u_0 = 300 \text{ K}, & u_{art} = 310 \text{ K}. \end{cases}$$

图 2 为 $T=120 \text{ s}$ 和 $T=300 \text{ s}$ 时环境-热防护服-空气间隙-皮肤系统温度分布的数值模拟结果。从图 2 中可以看出,温度在接触面不是连续分布的,离高温环境越远,温度越低,与 Yang 等^[11]的实验数据进行对比,验证了模型的合理性和数值算法的有效性。同时,数值结果也与 U 型边界抛物型方程的最值原理^[16-17]相吻合。

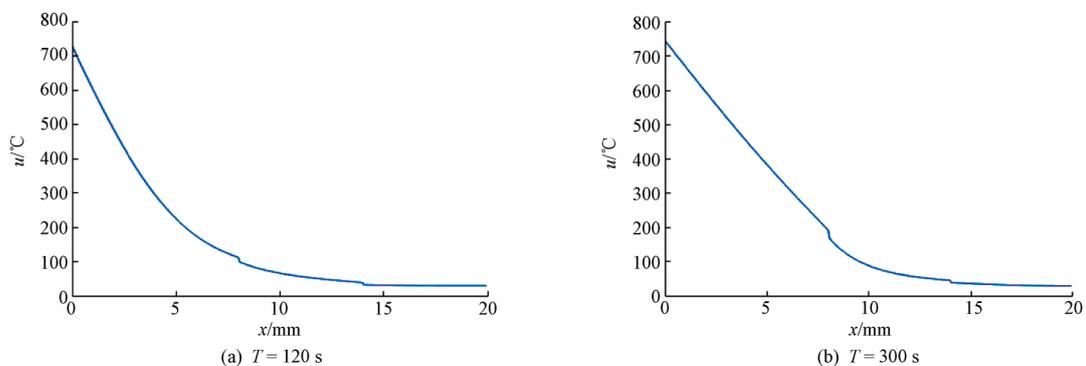


图 2 不同工作时长下环境-热防护服-空气间隙-皮肤系统的温度分布曲线

其次,图 3 给出了接触面 L_1 处温度随时间的分布,由于 u_g 相对 $W(t)$ 较大,因此在数值模拟过程中取 $50W(t)$, 对其样本轨道进行多次取样并数值求解方程(1)。从图 3 中可以看出,对样本轨道进行多次取样后,接触面 L_1 处温度随时间的分布始终是在一个范围内进行波动,这也进一步说明了不同的样本轨道下温度分布的随机性。

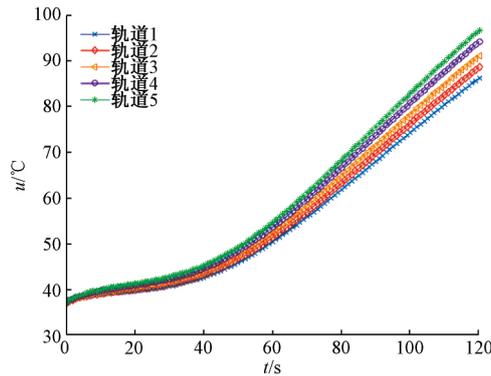


图 3 随机项为 $50W(t)$ 不同样本轨道下接触面 L_1 的温度分布曲线

5.2 均匀分布先验假设下反问题的计算

对随机变量 $L \in [l_a, l_b]$ 进行均等离散可得 $\{l_1, l_2, \dots, l_{20}\}, l_i = 6 + 0.2i, i = 1, 2, \dots, 20$, 取 $P = (0.5, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1)^T$, $Q = (0.05, 0.05, \dots, 0.05)^T$, $M = 6, N = 20$. 结合正问题的计算结果, 计算反问题时取工作时间 $T = 300$ s, 织物厚度范围 $[l_a, l_b] = [6, 10]$ mm, 不发生二级烧伤的概率 $s = 80\%$. 实验获得多组满足式(4)的数据, 并结合先验分布信息分别进行参数估计和期望值的计算, 结果如表 1 所示。

表 1 均匀分布下 L 的参数估计、期望值

序号	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8	l_9	l_{10}	a	b	E_i
1	7.2	7.4	7.6	7.8	8.0	8.2	8.4	8.6	8.8	9.0	7.05	9.15	8.10
2	6.2	6.4	7.6	7.8	8.0	8.4	8.8	9.2	9.6	9.8	6.04	10.32	8.18
3	6.2	7.6	7.8	8.0	8.4	8.6	8.8	9.2	9.4	9.6	6.60	10.12	8.36
4	7.0	7.2	7.8	8.0	8.2	8.8	9.0	9.2	9.4	9.6	6.83	10.01	8.42
5	6.8	7.0	7.4	7.8	8.0	8.2	8.6	8.8	9.0	9.2	6.64	9.52	8.08
6	6.6	7.4	7.6	7.8	8.4	8.6	8.8	9.2	9.4	9.6	6.66	10.02	8.34
7	6.4	6.8	7.6	7.8	8.0	8.4	8.8	9.0	9.2	9.6	6.36	9.96	8.16
8	6.4	7.4	7.8	8.0	8.2	8.4	9.0	9.4	9.8	10.0	6.49	10.39	8.44

根据表 1 数据, 取最小期望值 $E_5 = 8.08$ 对应的参数作为均匀分布下反问题的解, 即 $a^* = 6.64, b^* = 9.52$ 。

5.3 正态分布先验假设下反问题的计算

对 $L \in [l_a, l_b]$ 进行均等离散可得 $\{l_1, l_2, \dots, l_{20}\}, l_i = 6 + 0.2i, i = 1, 2, \dots, 20$, 取 $P = (0.3, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.2)^T$, $Q = (q_1, q_2, \dots, q_{20})^T$, $M = 7, N = 20$, 其中:

$$q_i = \int_{l_i - 0.2}^{l_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_*} \exp\left(-\frac{(x - \mu_*)^2}{2\sigma_*^2}\right) dx, \quad \mu_* = 8, \quad \sigma_* = 1,$$

实验获得多组满足约束条件(4)的数据, 并进行参数估计和期望值的计算, 结果如表 2 所示。

表 2 正态分布下 L 的参数估计、期望值

序号	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8	l_9	l_{10}	μ	σ	E_i
1	7.2	7.4	7.8	8.0	8.2	8.4	8.6	8.8	9.0	9.4	8.28	0.87	8.28
2	6.4	7.4	7.6	7.8	8.4	8.6	8.8	9.2	9.4	10.0	8.36	1.07	8.36
3	6.2	7.2	7.8	8.2	8.4	8.6	8.8	9.2	9.4	9.6	8.34	1.05	8.34
4	7.0	7.2	7.8	8.0	8.4	8.8	9.0	9.2	9.4	9.6	8.44	0.91	8.44
5	6.8	7.2	7.4	7.8	8.0	8.4	8.6	8.8	9.0	9.4	8.14	0.84	8.14
6	6.6	7.4	7.6	7.8	8.0	8.6	8.8	9.2	9.4	9.8	8.32	1.01	8.32
7	6.4	6.8	7.4	7.8	8.2	8.4	8.8	9.0	9.2	9.6	8.16	1.05	8.16
8	6.4	7.4	7.6	8.0	8.2	8.6	9.2	9.4	9.8	10.0	8.46	1.15	8.46

根据表 2 数据, 取最小期望值 $E_5 = 8.14$ 对应的参数作为正态分布下反问题的解, 即 $\mu^* = 8.14, \sigma^* =$

$\geq 80\%$ 。另外,将计算结果代入正问题的模型进行验证可以验证反问题的计算结果。这里我们只对 $L \sim U(6.64, 9.52)$ 进行验证, $L \sim N(8.14, 0.842)$ 的验证可类似进行。对 $L \sim U(6.64, 9.52)$ 进行数据取样,分别代入正问题进行数值模拟并结合式(3)得到烧伤程度曲线如图4所示。从图4可以看出,当工作时长 $T=300$ s 时只有厚度为 6.64、6.96 mm 才会发生二级烧伤,即不发生二级烧伤的概率 $s \geq 80\%$,满足式(4)的约束条件,这也表明了反问题计算结果的合理性。

6 结 语

本文对环境-热防护服-空气层-皮肤系统的热传递过程进行数学建模,建立了一个带随机 Robin 边界数据的三层热传递模型,给出了一类随机反问题的数学归结,提出了一种基于区间算法的反问题随机搜索算法,并借助 Matlab 软件进行数值模拟。该数学模型及其相关反问题的研究,为高性能热防护服的研发提供理论支持与科学依据。

本文只考虑了热防护服厚度参数对温度分布的影响,而其他参数(热防护服织物的热传导率、孔隙率等)对温度分布的影响还需要进一步研究。本文所提随机反问题处于起步阶段,寻找更有效的随机反问题数值算法并进行算法分析需要进一步研究。

参考文献:

- [1] Li T Y, Kabanikhin S, Nakamura G, et al. An inverse problem of triple-thickness parameters determination for thermal protective clothing with Stephan-Boltzmann interface conditions[J]. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2019, 28(3): 411-424.
- [2] 卢琳珍, 徐定华, 徐映红. 应用三层热防护服热传递改进模型的皮肤烧伤度预测[J]. 纺织学报, 2018, 39(1): 111-118.
- [3] 彭鹏, 徐定华. 热防护服中反常热扩散方程 Robin 问题的条件适定性[J]. 浙江理工大学学报(自然科学版), 2020, 43(2): 267-271.
- [4] Torvi D A, Douglas Dale J, Faulkner B. Influence of air gaps on bench-top test results of flame resistant fabrics[J]. Journal of Fire Protection Engineering, 1999, 10(1): 1-12.
- [5] Torvi D A, Douglas Dale J. Heat transfer in thin fibrous materials under high heat flux[J]. Fire Technology, 1999, 35(3): 210-231.
- [6] Mell W E, Lawson J R. A heat transfer model for firefighter's protective clothing[J]. Fire Technology, 2000, 36(1): 39-68.
- [7] Ghazy A, Bergstrom D J. Numerical simulation of heat transfer in firefighters' protective clothing with multiple air gaps during flash fire exposure[J]. Numerical Heat Transfer, Part A: Applications, 2012, 61(8): 569-593.
- [8] Xu D H, Wen L, Xu B X. An inverse problem of Bilayer textile thickness determination in dynamic heat and moisture transfer[J]. Applicable Analysis, 2014, 93(3): 445-465.
- [9] Xu D H, Cui P. Simultaneous determination of thickness, thermal conductivity and porosity in textile material design[J]. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2016, 24(1): 59-66.
- [10] Zhang Z Q, Karniadakis G E. Stochastic collocation methods for differential equations with white noise[M]//Numerical Methods for Stochastic Partial Differential Equations with White Noise. Cham: Springer International Publishing, 2017: 191-214.
- [11] Yang G F, Masahiro Y, Cheng J. Heat transfer in composite materials with Stefan-Boltzmann interface conditions[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2008, 31(11): 1297-1314.
- [12] Lototsky S, Mikulevicius R, Rozovskii B L. Nonlinear filtering revisited: a spectral approach[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1997, 35(2): 435-461.
- [13] Jr H F. Studies of thermal injury the predictability and the significance of thermally induced rate processes leading to irreversible epidermal injury[J]. Archives of Pathology, 1947, 43(5): 489.
- [14] 孙志忠. 偏微分方程数值解法[M]. 北京: 科学出版社, 2012: 92-102.
- [15] 毛松志. 基于区间算法的随机数生成算法的设计[D]. 杭州: 浙江工商大学, 2018: 12-37.
- [16] Erdelyi A, Friedman A. Partial differential equations of parabolic type[J]. The Mathematical Gazette, 1967, 51(375): 83.
- [17] Evans L C. Partial Differential Equations[M]. Providence, RI: American Mathematical Society, 1998: 44-65.

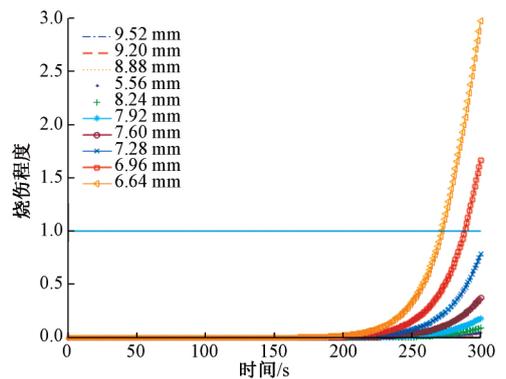


图4 均匀分布 $L \sim U(6.64, 9.52)$ 皮肤烧伤程度曲线