浙江理工大学学报，2020，43(5)：701-705
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
DOI:10.3969/j.issn.1673－3851(n).2020.05.016

有限 p-可解群的 p-长

侯 逸，易小兰
（浙江理工大学理学院，杭州 310018）

摘 要：如果有限群 G 有次正规列，即 $1=G_0\subseteq G_1\subseteq\cdots\subseteq G_t=G$，对任意的 $i\in\{1,2,\cdots,t\}$，都有截面 G_i/G_{i-1} 或为交换群或为 p'-群，则群 G 被称为 p-可解群。通过对特殊 p-群、超特殊 p-群的性质分析，讨论了饱和群系中 p-长不等于 1 的 p-可解群的一些性质。应用极小阶反证法证明：若 $\mathfrak{F}$ 是一个饱和群系，并且群 G 是一个 p-长不等于 1 的 p-可解群，用非空集 $S(G)$ 表示 G 所有截面 A/B 的集合，如果满足截面 A/B 的 p-长不等于 1 且截面 A/B 的一个 Sylow p-子群同构于极小非 $\mathfrak{F}$ 群 K 的 $\mathfrak{F}$-上根，若 $|Z(K^{\mathfrak{F}})|=p$ 或 $Z(K^{\mathfrak{F}})\subseteq Z(K)$，那么 $p=3$ 且 $S(G)$ 中具有极小阶的所有截面同构于 $[Z_3\times Z_3]SL_2(3)$。

关键词：p-可解群；Sylow p-子群；p-长；超特殊 p-群

中图分类号：O152.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-3851 (2020) 05-0701-05

On the p-length of finite p-soluble groups

HOU Yi, *YI Xiaolan*
(School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: A finite group G is called a p-solvable group, if there is a subnormal series $1=G_0\subseteq G_1\subseteq\cdots\subseteq G_t$, and for each $i\in\{1,2,\cdots,t\}$, G_i/G_{i-1} is either abelian group or p'-group. Through analyzing special p-group and extraspecial p-group, some properties of p-solvable groups with p-length unequal to 1 in a saturated formation are discussed. The method of minimal-order counter example is used to prove that: if $\mathfrak{F}$ is a saturated formation, and G is a p-soluble group with p-length $\neq 1$, $S(G)\neq\varnothing$ represents the set of all sections A/B of G. If p-length of A/B section is unequal to 1, and a Sylow p-subgroup of A/B is isomorphic to the $\mathfrak{F}$-co-radical of minimal non-$\mathfrak{F}$-group K; if $|Z(K^{\mathfrak{F}})|=p$ or $Z(K^{\mathfrak{F}})\subseteq Z(K)$, then $p=3$ and any section of minimal order in $S(G)$ is isomorphic to $[Z_3\times Z_3]SL_2(3)$.

Key words: p-solvable group; Sylow p-subgroup; p-length; extraspecial p-group

0 引 言

有限 p-可解群的 p-长是国内外很多群论专家在研究群结构中研究的重要课题之一。设 G 是有限 p-可解群，G_p 为 G 的 Sylow p-子群。假设 G_p 同构于极小非 $\mathfrak{F}$($\mathfrak{F}$ 是一个饱和群系)群 K 的 $\mathfrak{F}$-上根，则 G_p 是一个特殊 p-群，且 G_p 的 p-长不超过 2，即 $l_p(G)\leqslant 2$。Monakhov[1] 证明，当 $p=2$ 且 $\mathfrak{F}$ 是所有幂零群群类(即 K 是极小非幂零群或 Schmidt 群)，则 $l_p(G)=1$。Zhurtov 等[2] 证明，对每个 $p\geqslant 2$ 的素数，如果 $\mathfrak{F}$ 为所有的幂零群群类，则 $l_p(G)=1$。Cossey 等[3] 研究了两个 p-可解群的完全置换积的 p-长，证明：当 $G=AB$ 是两个 p-可解子群的完全置换积，且 $l_p(A)\leqslant k$，$l_p(B)\leqslant k$，则 G 是可解群且 $l_p(G)\leqslant k+1$。Grittini[4] 证

收稿日期：2019－12－05　　网络出版日期：2020－04－02
基金项目：国家自然科学基金项目(11471055)；浙江省自然科学基金项目(LY18A010028)
作者简介：侯 逸(1994－)，男，黑龙江哈尔滨人，硕士研究生，主要从事有限群方面的研究。
通信作者：易小兰，E-mail：yixiaolan2005@126.com

明:有限 p-可解群 G 的 p-长小于或等于不被 p-整除的不同次数的不可约特征标的个数。本文通过对特殊 p-群、超特殊 p-群的性质进行了分析,研究了 p-可解群的 p-长,得到一些有意义的结果。

本文所有的群都是有限群,本文使用的所有符号和术语来自于文献[5]。Z_p 表示一个阶为 p 的群,Q_8 是阶为 8 的四元数群,$[A]B$ 表示正规子群 A 和子群 B 的半直积,G_p 是 G 的 Sylow p-子群。如果有限群 G 是一个初等交换 p-群或者 $\Phi(G)=Z(G)=G'$ 且 G' 是初等交换 p-群,则一个 p-群 G 被称为一个特殊 p-群。如果一个非交换特殊 p-群 G 的中心是循环的,那么 G 被称为超特殊的。如果 $G_p\trianglelefteq G$,那么群 G 被称为 p-闭的。一个同态像闭的群类 $\mathfrak{F}$ 称为一个饱和群系,如果 $H/\Phi(H)\in\mathfrak{F}$ 总有 $H\in\mathfrak{F}$,G 的 $\mathfrak{F}$ 上根 $G^{\mathfrak{F}}$ 是由所有使得 $G/N\in\mathfrak{F}$ 的 G 的正规子群 N 的交,即 $G^{\mathfrak{F}}=\bigcap\{N\triangleleft G\mid G/N\in\mathfrak{F}\}$。如果 $MG^{\mathfrak{F}}=G$,则 G 的一个极大子群 M 被称为 $\mathfrak{F}$-伪正规的。G 的一个主因子 L/K 被称作:a) $\mathfrak{F}$-中心的,如果 $[L/K](G/C_G(L/K))\in\mathfrak{F}$;b) $\mathfrak{F}$-离心的,如果 $[L/K](G/C_G(L/K))\notin\mathfrak{F}$。如果 G 的每个真子群 S 都有 $G\notin\mathfrak{F}$ 而 $S\in\mathfrak{F}$,那么 G 被称为极小非 $\mathfrak{F}$-群。

1 预备知识

引理 1[6]164-165 $\mathfrak{F}$ 是一个饱和群系并且 G 是一个极小非 $\mathfrak{F}$-群。如果 $G^{\mathfrak{F}}\neq 1$ 是可解的,那么下列结论成立:

a) 对某个素数 p,$G^{\mathfrak{F}}$ 是一个特殊 p-群;

b) $G^{\mathfrak{F}}/\Phi(G^{\mathfrak{F}})$ 是 G 的 $\mathfrak{F}$-离心主因子;

c) $\Phi(G^{\mathfrak{F}})=\Phi(G)\cap G^{\mathfrak{F}}$;

d) $\Phi(G)$ 的每一个 G-主因子都是 $\mathfrak{F}$-中心。

引理 2[7]87 如果 G 是一个 p-可解群,则 $C_G(O_{p',p}(G))\subseteq O_{p',p}(G)$。

引理 3[6]214 对任意素数 r,每个 p-可解群都有唯一的 Hall-$\{p,r\}$-子群共轭类。

引理 4[8]76-77 假设 A 是 p-群 P 的一个不可约可交换的自同构群,$|P|=p^n\neq 1$,那么 A 是一个循环群且它的阶整除 p^n-1。这里 n 是使 $p^n\equiv 1(\mathrm{mod}\ |A|)$ 的最小自然数。

引理 5[7]163-164 P 是一个 p-群且 A 是 P 的一个极大可交换子群。假设 $|P'|=p$,则 $|P:A|=|A/Z(P)|$ 且 $|P/Z(P)|=|A/Z(P)|^2$。

引理 6[7]217 假设 $R\neq 1$ 是 $SL_2(p)$ 的一个 Sylow r-子群,$p\neq r$。如果 $r\neq 2$,那么 R 是循环群;如果 $r=2$,那么 $R\simeq Q_8$ 或者 R 同构于广义四元数群。

引理 7[9] 如果 P 是一个阶不小于 8 的二面体群,那么 $Aut(P)$ 是一个 2-群。

引理 8[7]194 P_1,P_2 是 $GL_2(p)$ 的两个不同的 Sylow p 子群,那么 $\langle P_1,P_2\rangle=SL_2(p)$。

引理 9[7]203-204 当 $p\neq 2$ 时,假设 a 是一个 p-元素且 R 是满足 $1\neq[R,a]$ 的 $SL_2(p)$ 的一个 $\langle a\rangle$-不变 p'-子群,那么 $p=3$,$R\simeq Q_8$ 且 $R\langle a\rangle\simeq SL_2(3)$。

引理 10[6]265-266 G 是 Schmidt 群(也就是 G 是极小非幂零群),P 是 G 的非正规 Sylow p-子群。当 $|P/\Phi(P)|=p^n$ 时,$|G|=p^\alpha q^\beta$。(α 与 β 为正整数。)

引理 11 设 G 是 p-可解群,N 是 G 的一个正规 p-子群,$l_p(G/N)=1$,则当 $N\leqslant Z(G)$ 或 $N\leqslant\Phi(G)$,总有 $l_p(G)=1$。

证明 令 $H/N=O_{p',p}(G/N)$ 且 $R/N=O_p{}'(G/N)$。当 $l_p(G/N)=1$ 时,p 不能整除 $|G:N|$。显然,R/N 是 H/N 的正规 Hall p'-子群。如果 $N\leqslant\Phi(G)$,则 H 是 p-幂零群[5]定理A.9.2。如果 $N\leqslant Z(G)$,可得 $R=N\times H_p{}'$,$H_p{}'$ 是 H 的正规 Hall p'-子群。综上所述,H 是 p-幂零群。

证毕。

引理 12[8]185 如果 G 是 p-可解群,那么 $l_p(G)\leqslant c_p(G)$,其中:$c_p(G)$ 是 G 中一个 Sylow p-子群的幂零类。

引理 13[6]281 H 是 G 的一个幂零正规子群,如果 $H\cap\Phi(G)=1$,那么 H 在 G 中可补且 H 是 G 的极小正规子群的直积。

引理 14[10] 如果群 G 有一个正规 Sylow p-子群 P,那么 $P\cap\Phi(G)=\Phi(P)$。

引理 15　P 是 G 的一个正规 p-子群。如果 $G/C_G(P)$ 是 p-群，那么 P 在 G 中是超中心的。

证明　$[P](G/C_G(P))$ 是一个 p-群，那么 P 在 $[P](G/C_G(P))$ 中是超中心的，因此 P 在 G 中也是超中心的。

证毕。

引理 16[11]　G 是极小非 $\mathfrak{U}$ 群，$\mathfrak{U}$ 是超可解群的类。如果 G 不是一个 Schmidt 群，那么 $G^{\mathfrak{U}}$ 是 G 的一个 Sylow p-子群，p 是 $|G|$ 的最大素因子。

2　主要定理

定理 1　若 $\mathfrak{F}$ 是一个饱和群系，并且 G 是 $l_p(G) \neq 1$ 的一个 p-可解群，令 $S(G) \neq \varnothing$ 表示 G 所有截面 A/B 的集合，如果满足下列条件：

a) $l_p(A/B) \neq 1$，

b) A/B 的一个 Sylow p-子群同构于极小非 $\mathfrak{F}$ 群 K 的 $\mathfrak{F}$-上根，满足要么 $|Z(K^{\mathfrak{F}})| = p$，要么 $Z(K^{\mathfrak{F}}) \subseteq Z(K)$，

那么，$p=3$ 且 $S(G)$ 中具有极小阶的所有截面同构于 $[Z_3 \times Z_3]SL_2(3)$。

证明　设 A/B 是 $S(G)$ 中的一个极小阶截面。需要证明 A/B 同构于 $[Z_3 \times Z_3]SL_2(3)$。假设 $B=1$ 且 $A=G$，根据引理 1，G_p 是一个特殊 p-群。因为 G_p 的幂零类不超过 2，根据引理 12，可知 $l_p(G) \leqslant 2$，因此可以假设 $l_p(G)=2$ 且 $O_p{}'(G)=1$。

设 $S=O_p(G)$。通过引理 2 得到 $C_G(S) \subseteq S$。如果 $G_p \leqslant M \leqslant G$，那么 $SO_p{}'(M) = S \times O_p{}'(M)$，因此 $O_p{}'(M)=1$ 且 M 是 p-闭的。从而，每个包含于 G_p 的真子群是 p-闭的。显然，G_p 包含于 G 的唯一极大子群 $N_G(G_p)$。

根据引理 3，对每个素数 r，G 包含 Hall-$\{p,r\}$-子群 G_pG_r。如果 $G_pG_r \neq G$，那么 $G_p \trianglelefteq G_pG_r$。因此可以假设，对某个素数 r，$G=G_pG_r$。

令 $Z=Z(G_p)$，可以得到 $Z_G = \bigcap_{x \in G} Z^x = 1$。如果 $Z_G \neq 1$，令 $C_G(Z_G)$ 为 G 的正规群并且包含 G_p，假设 G 不是 p-闭的，$C_G(Z_G) = G$。如果 $Z = Z_G$，那么根据引理 12 得到 $l_p(G/Z) = 1$，根据引理 11 得 $l_p(G) = 1$。假设 $1 \neq Z_G < Z$，根据 b)，对满足条件 $Z(K^{\mathfrak{F}}) \subseteq Z(K)$ 的一些极小非 $\mathfrak{F}$-群 K，存在一个同构 $g: G_p \to K^{\mathfrak{F}}$，显然 $K/g(Z_G)$ 是一个极小非 $\mathfrak{F}$-群，上根 $(K/g(Z_G))^{\mathfrak{F}} = K^{\mathfrak{F}}/g(Z_G)$，于是可以得到 $G_p/Z_G \simeq Z(K/g(Z_G))^{\mathfrak{F}}$，这里 $K/g(Z_G)$ 一个极小非 $\mathfrak{F}$-群，且 $Z((K/g(Z_G))^{\mathfrak{F}}) \subseteq Z(K/g(Z_G))$。因为 $|G/Z_G| < |G|$，所以 $l_p(G/Z_G)=1$。由引理 11，可得 $l_p(G)=1$，矛盾。

于是 $Z_G=1$，所以 $S' = \Phi(S) = 1$，因此 S 是初等可交换群。进而得到 $S \supseteq Z$ 且 $S = C_G(S)$。现在考虑商群 $\overline{G} = G/S$。显然，$\overline{G_p}$ 是一个初等可交换 p-群，根据引理 12，$l_p(\overline{G})=1$。因为 G 没有介于 G_p 和 G 之间的正规真子群，于得到 $\overline{G} = \overline{G_pG_r}$ 是 p-幂零群。显然，$N_{\overline{G}}(\overline{G_p})$ 是 $\overline{G}$ 的包含 $\overline{G_p}$ 唯一极大子群。根据引理 13 和引理 14，可知在 $\overline{G}$ 中，$\overline{G_r}/\Phi(\overline{G_r})$ 是极小正规子群的补的直积。因为 $N_{\overline{G}}(\overline{G_p})$ 是 $\overline{G}$ 的包含 $\overline{G_p}$ 唯一极大子群，可得 $\overline{G_r}/\Phi(\overline{G_r})$ 是群 $\overline{G}$ 的主因子。因此，$\overline{G_p}$ 不可约作用在 $\overline{G_r}/\Phi(\overline{G_r})$ 上。如果 $\overline{x} \in \overline{G_p}$ 在 $\overline{G_r}/\Phi(\overline{G_r})$ 上诱导一个平凡自同构，则根据引理 3，$\overline{x}$ 平凡作用于 $\overline{G_r}$。因为 $O_p(\overline{G})=1$，可得 $C_{\overline{G_p}}(\overline{G_r}/\Phi(\overline{G_r}))=1$，根据引理 4，可得 $|\overline{G_p}|=p$。

现在取 $s \in S/Z$ 并考虑 $[G_p, s]$，显然 $[G_p, s] \leqslant Z$。因为对任意的 $x, y \in G_p$ 有 $[xy, s] = [x, s]^y[y, s] = [x, s][y, s]$，可得 $[G_p, s] = \{[x, s] \mid x \in G_p\}$，且存在一个映射 $f: x \mapsto [x, s]$，其中：$x \in G_p$ 是 G_p 到 $[G_p, s]$ 的一个满态射，其核为核 S。因此，$G_p/S \simeq [G_p, s]$，且阶为 p。假设 $|Z| > p$。由条件 b)，在 Z 中存在一个子群 Z_0，$[G_p, s] \subseteq Z_0$，$|Z:Z_0|=p$。对于一个群同构：$g: G_p \to K^{\mathfrak{F}}$，其中 K 是极小非 $\mathfrak{F}$-群，可以得出结论 G_p/Z_0 是一个超特殊 p-群。更进一步，S/Z_0 是 G_p/Z_0 的一个极大可交换子群。根据引理 5，$|S/Z_0 : Z/Z_0| = p$，所以 $|G_p/Z| = p^2$。假设 $[G_p, s] \leqslant Z_0$，可知 sZ_0 包含于 $Z(G_p/Z_0) = Z/Z_0$，从而 $s \in Z$，矛盾，因此证明了 $|G_p| = p^3$。如果 $\Phi(G) \cap S \neq 1$，那么根据引理 11 和引理 12 得 $l_p(G)=1$，矛盾，所

以 $\Phi(G)\cap S=1$。根据引理13,S 在 G 中有一个补 H,满足 $H\simeq \overline{G}=G/S$ 且 $S=Z_p\times Z_p$ 和 $G=[Z_p\times Z_p]H$。因为 H 是由它的两个 Sylow p-群生成的,所以根据引理8,得到 $H\subseteq SL_2(p)$。

当 $p=2$,G_p 是二面体群或四元数群。因为在 G_p 中,S 是阶为4的初等交换子群,只需要考虑 G_p 是二面体群。根据引理7,这个阶为8的二面体2-群的自同构群也是一个的2-群。所以,根据引理15,$K^{\mathfrak{F}}$ 是极小非 $\mathfrak{F}$-群 K 的超中心。根据引理1,这与条件b)矛盾。

当 $p>2$。根据引理9,可得 $p=3$ 且 $H\simeq SL_2(3)$。

证毕。

推论1 若 G 是 p-可解群,G 有一个超特殊的 Sylow p-子群 P。假设 $p\neq 3$ 且 P 同构于某个极小非 $\mathfrak{F}$-群的 $\mathfrak{F}$-上根,$\mathfrak{F}$ 是一个饱和群系,则 $l_p(G)=1$。

证明 假设这个结论是错误的。选择一个满足条件的 p-长 $\neq 1$ 的极小阶的截面,根据定理1的结论可知 $p=3$,矛盾。

证毕。

推论2 G 是3-可解群,G 有一个超特殊 Sylow 3-子群 P。假设 P 同构于极小非 $\mathfrak{F}$-群的 $\mathfrak{F}$-上根,$\mathfrak{F}$ 是一个饱和群系。则要么 $l_3(G)=1$,要么 $SL_2(3)$ 都包含于 G 的截面中。

证明 当 $l_p(G)>1$ 时,令 $S(G)$ 是 G 的所有截面 A/B 的集合,满足以下条件:$l_p(A/B)>1$ 且 A/B 的一个 Sylow p-子群是同构于一个极小非 $\mathfrak{F}$-群的 $\mathfrak{F}$-上根,所以 $G\in S(G)$。根据定理1,$[Z_3\times Z_3]SL_2(3)$ 同构于 $S(G)$ 中的某一个元素,因此 $SL_2(3)$ 同构于 G 的截面。

证毕。

定理2 群 G 是 p-可解群,P 是 G 的 Sylow p-子群。如果 P 满足以下条件之一:

a) P 同构于某个 Schmidt 群的正规 Sylow p-子群,

b) P 是超特殊 p-群且同构于一个奇数阶的极小非超可解群的正规 Sylow p-子群,

则 $l_p(G)=1$。

证明 假设定理不真。根据定理1,只要 G 满足以下任一条件:

a) A/B 的 Sylow p-子群同构于 Schmidt 群的正规 Sylow p-子群,

b) A/B 的 Sylow p-子群是超特殊的并且同构于一个奇数阶的极小非超可解群的正规 Sylow p-子群,

可得 $p=3$ 且存在一个截面 $A/B\simeq[Z_3\times Z_3]SL_2(3)$。

假设 $A=G,B=1,|P|=3^3$ 且 $G\simeq[Z_3\times Z_3]SL_2(3)$,假设 P 同构于某个阶为 3^3q^β 的 Schmidt 群的正规 Sylow 3-子群,q 是素数。因为 $|P/\Phi(P)|=p^2$,由引理1可得 $3^2\equiv 1$(模 q)(即 $q=2$)。这是不可能的。

现在假设 P 同构于奇数阶的极小非超可解群 D 的正规 Sylow p-子群,那么3是 $|D|$ 的最小素因子。根据引理16,D 是一个 Schmidt 群。

证毕。

3 结 语

本文利用极小阶反证法,通过对特殊 p-群和超特殊 p-群的性质进行分析,研究了有限 p-可解群的 p-长,得到了关于饱和群系中 p-长不等于1的 p-可解群 G 在其所有截面的 p-长不等于1的情况下,可解群 G 具有极小阶的截面的结构和性质。

在后续研究中,可利用本文的结论进行推广,继续研究其对 p-群的可解性、幂零性、超可解性的一些其他影响。

参考文献:

[1] Monakhov V S. The product of finite groups close to nilpotent[J]. Minsk: Nauka i Tekhnika, 1975: 70-100.

[2] Zhurtov A K, Syskin S A. On Shmidt groups[J]. Sibirskii Matematicheskii Zhurnal, 1987, 28(2):74-78.

[3] Cossey J. On the p-length of the mutually permutable product of two p-soluble groups[J]. Basel: Archiv Der Mathematik,

2018,110(6):533-537.

[4] Grittini N. *P-length* and character degrees in *p-solvable* groups[J]. San Diego: Journal of Algebra, 2020, 544:454-462.

[5] Doerk K. Finite Soluble Groups[M]. New York: Walter de Gruyter, 1992.

[6] Shemetkov L A. Formations of Finite Groups[M]. Moscow: Nauka, 1978.

[7] Kurzweil H, Stellmacher B. The theory of Finite Groups: An Introduction[M]. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2004.

[8] Huppert, B. Endliche Gruppen I [M]. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1967.

[9] Gorenstein D. Finite Groups [M]. New York: Harper and Row, 1968: 132.

[10] Baer R. Supersoluble Immersion [J]. Canadian Journal of Mathematics, 1959, 11:353-369.

[11] Huppert B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen[J]. Mathematische Zeitschrift, 1954, 60(1): 409-434.

（责任编辑:康　锋）