



# 带载流体微机电系统动态 Pull-in 阈值研究

王重阳<sup>1</sup>, 贺平安<sup>1</sup>, 张建明<sup>1</sup>, 张丽俊<sup>2</sup>

(1.浙江理工大学理学院, 杭州 310018; 2.山东科技大学数学与系统科学学院, 山东青岛 266590)

**摘 要:** 利用动力系统和微分方程定性理论研究了带载流体微机电系统动态 pull-in 阈值。通过对系统轨线的分析, 得到该系统集总参数存在唯一的阈值; 分析该阈值与系统周期解、pull-in 解和趋于平衡态解之间的关系, 进一步得到当集总参数超过该阈值时, 系统发生动态 pull-in。

**关键词:** 微机电系统; 动力系统; 周期解; 动态 pull-in

中图分类号: O175.14

文献标志码: A

文章编号: 1673-3851(2020)05-0389-05

## Research on dynamic pull-in threshold of micro-electro-mechanical systems with current-carrying conductors

WANG Chongyang<sup>1</sup>, HE Pingan<sup>1</sup>, ZHANG Jianming<sup>1</sup>, ZHANG Lijun<sup>2</sup>

(1.School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China; 2.College of Mathematics and Systems Science, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China)

**Abstract:** The dynamic pull-in threshold of the micro-electro-mechanical systems (MEMS) with current-carrying conductors is studied by using the dynamical system and differential equation qualitative theory. Through the analysis of the system orbits, it is obtained that there is a unique threshold for the lumped parameters of the system. The relationship among the threshold, the periodic solution, the pull-in solution and the equilibrium solution of the system is analyzed. Further, when the lumped parameter exceeds the threshold, the system generates dynamic pull-in.

**Key words:** micro-electro-mechanical systems; dynamic system; periodic solutions; dynamic pull-in

## 0 引 言

微机电系统包括微传感器、微执行器、信号处理器和电源等, 其中微执行器是系统的核心部分, 为系统提供驱动力。在系统集总参数的阈值处, 微执行器会发生 pull-in 现象, 即微执行器的移动板突然“pull-in”到固定板, 从而导致设备故障, 因此研究系统发生 pull-in 现象时所对应的阈值(以下简称“pull-in 阈值”)非常必要。通常, 在微执行器的移动板距固定板约 1/3 处, 静电力会平衡线性恢复, 使系统发生静态 pull-in<sup>[1-2]</sup>。1967 年, Nathanson 等<sup>[3]</sup>首先引入了静电微执行器的质量弹簧模型, 并对 pull-in 现象给出了理论解释, 但是如何得到系统发生 pull-in 现象的条件, 这一问题并未得到根本解决。之后, 这类问题的研究受到许多数学物理学家的关注。Nayfeh 等<sup>[4]</sup>发现交流负载与纯直流负载下微机电系统 pull-in 现象差异, 从而提出了微机电系统的动态 pull-in。Shirbani 等<sup>[5-6]</sup>利用数值解得到了磁微执行器动态 pull-in 阈值的近似值。近年来,

收稿日期: 2019-09-19 网络出版日期: 2019-12-03

基金项目: 国家自然科学基金项目(11101371); 浙江省自然科学基金项目(LY15A010021)

作者简介: 王重阳(1994-), 女, 陕西咸阳人, 硕士研究生, 主要从事微分方程方面的研究。

通信作者: 张建明, E-mail: jmzhang48@hotmail.com

Imai 等<sup>[7]</sup>通过实验发现,磁微执行器移动板的位移是双向的,并且位移可以通过磁体的初始位置控制。Skrzypacz 等<sup>[8]</sup>利用动力学分支理论对石墨烯微机电系统进行了研究,得到了静电集总参数模型导体的初始位置为零时系统动态 pull-in 阈值。根据 Sedighi 等<sup>[9]</sup>关于分散力对振动纳米悬臂动态 pull-in 研究的结果,He 等<sup>[10]</sup>在忽略分散力的情况下,发现了带载流导体的微机电系统,并研究了导体初始位置为零时系统动态 pull-in 阈值。然而,He 等<sup>[10]</sup>没有考虑导体初始位置非零时系统动态 pull-in 阈值。

本文研究了导体初始位置在一定范围内的系统动态 pull-in 阈值。首先利用微分方程定性理论研究了系统集总参数存在唯一的阈值  $K_*(x_0)$ ,再利用动力系统理论导出系统的解与该阈值  $K_*(x_0)$  之间的关系,从而得到了系统发生动态 pull-in 与该阈值  $K_*(x_0)$  之间的关系,该阈值可以确定载流导体微机电系统发生动态 pull-in 的位置。

## 1 基本模型

带载流导体微机电系统的微执行器受线性恢复力和电磁力共同作用,如图 1 所示。其中: $b$  是移动导线与固定导线的初始距离, $k$  是弹簧的弹性常数, $\tilde{x}$  是第  $\tilde{t}$  时刻移动导线的位移, $i_1$  是移动导线的电流, $i_2$  是固定导线的电流, $F_1$  是弹簧弹力, $F_2$  是电磁力。若两条平行导线之间通相同方向的电流,则彼此之间相互吸引,从而产生磁场,其大小由安培定律决定<sup>[11]</sup>。

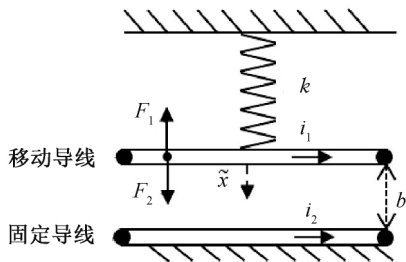


图 1 微执行器结构示意图

He 等<sup>[10]</sup>将带载流导体的微机电系统描述为:

$$m \frac{d^2 \tilde{x}}{d\tilde{t}^2} + k\tilde{x} - \frac{\mu_0 i_1 i_2 l}{2\pi(b - \tilde{x})} = 0 \quad (1)$$

其中: $m$  和  $l$  分别是移动导线的质量和长度, $k\tilde{x}$  是弹簧弹力, $\frac{\mu_0 i_1 i_2 l}{2\pi(b - \tilde{x})}$  是两条导线电流共同作用产生的磁力, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$  是磁常数。

令  $x = \frac{\tilde{x}}{b}$ ,  $t = \tilde{t} \sqrt{\frac{k}{m}}$ ,  $K = \frac{\mu_0 i_1 i_2 l}{2\pi k b^2}$ , 方程(1)可化为:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + x - \frac{K}{1-x} = 0 \quad (2)$$

其中: $x$  是正则化时间  $t$  下移动导线的位移; $K$  是系统集总参数,由于两条导线的电流都是同向的,所以  $K \geq 0$ 。显然,方程(2)是一个哈密顿系统。非线性微分方程(2)的初值问题可以化成一阶微分方程组:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x + \frac{K}{1-x} \end{cases} \quad (3)$$

初值  $x(0) = x_0, y(0) = 0$ 。

## 2 系统动态 pull-in 阈值

系统(3)关于时间  $t$  积分可得:

$$H = \frac{1}{2} (y(t))^2 + \frac{1}{2} x(t)^2 + K \ln |1-x(t)| \quad (4)$$

其中:  $H$  为积分常数。将初值  $x(0) = x_0, y(0) = 0$  代入方程(4)可知:

$$H = \frac{1}{2}x_0^2(t) + K \ln |1 - x_0(t)| \quad (5)$$

联立方程(4)–(5), 有:

$$(y(t))^2 = -x^2(t) - K \ln \left| \frac{1 - x(t)}{1 - x_0(t)} \right| + x_0^2(t) \quad (6)$$

把系统(3)的平衡点  $\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4K}}{2}, 0\right)$  代入方程(6), 则有:

$$\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4K}}{2}\right)^2 - x_0^2 + 2K \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1 - 4K}}{2(1 - x_0)} \right| = 0 \quad (7)$$

**定理 1** 对任意的  $x_0 \in \left(-1, \frac{1}{2}\right)$ , 方程(7)存在唯一的正根  $K_*(x_0)$ 。当  $K < K_*(x_0)$  时, 系统(3)有周期解; 当  $K = K_*(x_0)$  时, 系统(3)有一个趋于平衡态的解; 当  $K > K_*(x_0)$  时, 系统(3)有 pull-in 解。

**证明** 令  $m = \frac{1 + \sqrt{1 - 4K}}{2}$ , 方程(7)可改写为  $m^2 - x_0^2 + \frac{1}{2}(1 - (2m - 1)^2) \ln \left| \frac{1 - m}{1 - x_0} \right| = 0$ , 且  $\frac{1}{2} < m < 1$ 。

假设  $f(m) = m^2 - x_0^2 + \frac{1}{2}(1 - (2m - 1)^2) \ln \left| \frac{1 - m}{1 - x_0} \right|$ , 易知  $x_0 < \frac{1}{2} < m$ 。对  $f(m)$  关于  $m$  求导得

$$f'(m) = 2m - \frac{1}{2}(1 - (2m - 1)^2) \frac{1 - x_0}{1 - m} - 2(2m - 1) \ln \frac{1 - m}{1 - x_0}.$$

经计算有  $f'(m) > 0$ , 则  $f(m)$  是单调递增函数, 且  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - x_0^2 + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2(1 - x_0)} < 0$ 。而  $f(1^-) =$

$\lim_{m \rightarrow 1^-} \left( m^2 - x_0^2 + \frac{1}{2}(1 - (2m - 1)^2) \ln \left| \frac{1 - m}{1 - x_0} \right| \right) = 1 - x_0^2$ , 当  $x_0 \in \left(-1, \frac{1}{2}\right)$  时,  $f\left(\frac{1}{2}\right)f(1) < 0$ 。因此,

当初值  $x_0 \in \left(-1, \frac{1}{2}\right)$  时方程(7)存在唯一的正根  $K_*(x_0)$ 。

证毕。

将初值  $x_0 = 0.1000$  代入方程(7), 利用数值计算可得:  $K_*(x_0) = 0.2187$ 。当  $K$  分别取 0.7230、0.5341、0.3530、 $K_*(x_0)$ 、0.2010、0.1530 时, 系统(3)对应的轨线图如图 2 所示。

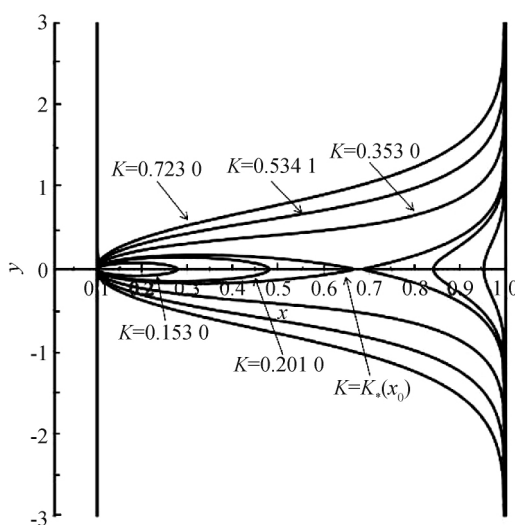
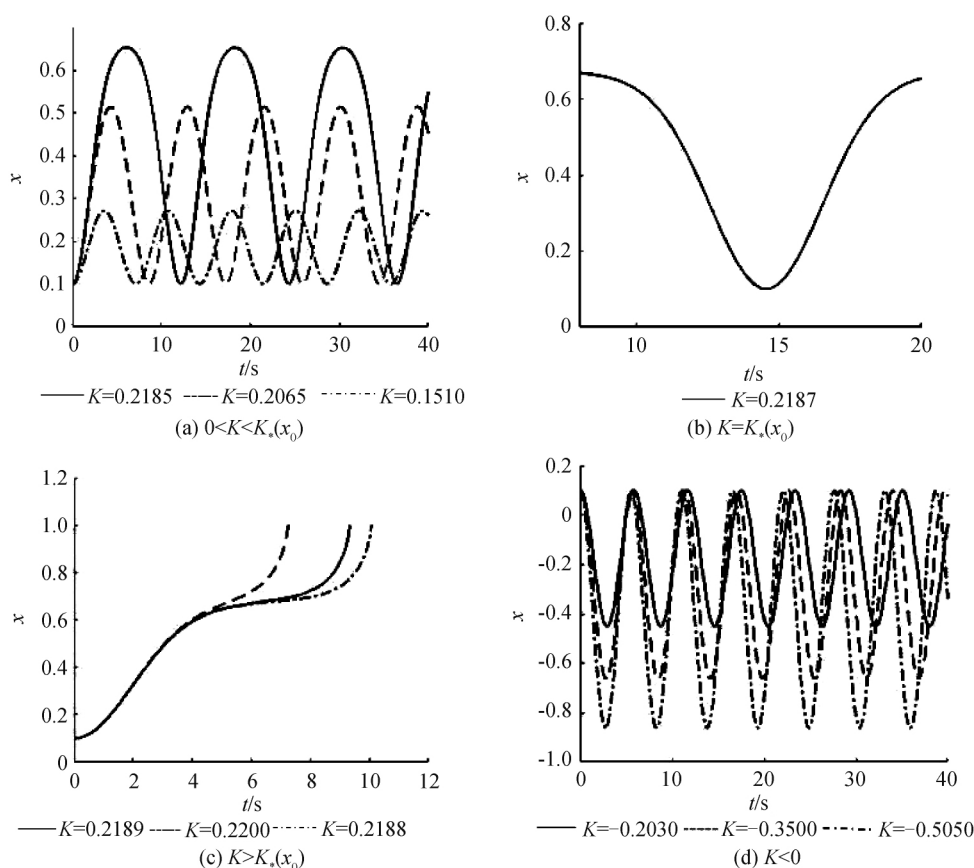


图 2 当  $x_0 = 0.1000$  时, 系统(3)的轨线

当  $0 < K < K_*(x_0)$  时, 系统(3)的轨线对应图 2 中的闭轨线。由于周期轨对应周期解, 则系统(3)有周期解, 如图 3(a)所示; 类似地, 当  $K = K_*(x_0)$  时, 系统(3)有趋于平衡态的解, 如图 3(b)所示; 当  $K > K_*(x_0)$  时, 系统(3)有 pull-in 解, 如图 3(c)所示; 当  $K < 0$  时, 系统(3)有周期解, 如图 3(d)所示。

图3 当  $x_0 = 0.1000$  时,系统(3)的解

结合实际模型,对任意初值  $x_0 \in \left(-1, \frac{1}{2}\right)$ , 带载流体微机电系统集总参数  $K$  存在唯一的阈值  $K_*(x_0)$ , 当  $K < K_*(x_0)$  时, 系统的移动导线缓慢地向固定导线移动; 当  $K = K_*(x_0)$  时, 系统处于临界平衡状态, 此时的点称为 pull-in 点, 对应的电压称为 pull-in 电压,  $K_*(x_0)$  称为动态 pull-in 阈值; 当  $K > K_*(x_0)$  时, 由于模型包含非线性项, 系统的移动导线会突然 pull-in 到固定导线, 从而发生动态 pull-in。

### 3 结 论

本文通过动力系统和微分方程定性理论研究了带载流体微机电系统动态 pull-in 阈值, 对任意的初值  $x_0 \in \left(-1, \frac{1}{2}\right)$ , 系统集总参数存在唯一的阈值  $K_*(x_0)$ , 且当  $K > K_*(x_0)$  时, 系统发生动态 pull-in。上述结果对设计带载流体微机电系统发生 pull-in 现象的位置提供了理论预测, 使得设计者能够避免 pull-in 位置。本文研究的是不考虑分散力的情况, 若考虑分散力, 数学模型将十分复杂, 确定其集总参数的阈值就更加困难, 是否可以得出系统动态 pull-in 阈值, 将是下一步需要探讨的问题。

### 参考文献:

- [1] Ganji B A, Majlis B Y. Design and fabrication of a new MEMS capacitive microphone using a perforated aluminum diaphragm[J]. Sensors and Actuators A: Physical, 2009, 149(1): 29-37.
- [2] Seeger J I, Crary S B. Stabilization of electrostatically actuated mechanical devices[C]//1997 International Conference on Solid State Sensors and Actuators. IEEE, 1997: 1133-1136.
- [3] Nathanson H C, Newell W E, Wickstrom R A, et al. The resonant gate transistor[J]. IEEE Transactions on Electron Devices, 1967, 14(3): 117-133.
- [4] Nayfeh A H, Younis M I, Abdel-Rahman E M. Dynamic pull-in phenomenon in MEMS resonators[J]. Nonlinear Dynamics, 2007, 48(1/2): 153-163.

- [5] Shirbani M M, Shishesaz M, Hajnayed A, et al. Coupled magneto-electro-mechanical lumped parameter model for a novel vibration-based magneto-electro-elastic energy harvesting systems [J]. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 2017, 90: 158-169.
- [6] Shishesaz M, Shirbani M M, Sedighi H M, et al. Design and analytical modeling of magneto-electro-mechanical characteristics of a novel magneto-electro-elastic vibration-based energy harvesting system [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2018, 425: 149-169.
- [7] Imai S, Tsukioka T. A magnetic MEMS actuator using a permanent magnet and magnetic fluid enclosed in a cavity sandwiched by polymer diaphragms [J]. *Precision Engineering*, 2014, 38(3): 548-554.
- [8] Skrzypacz P, Kadyrov S, Nurakhmetov D, et al. Analysis of dynamic pull-in voltage of a graphene MEMS mode [J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2019, 45: 581-589.
- [9] Sedighi H M, Daneshmand F, Zare J. The influence of dispersion forces on the dynamic pull-in behavior of vibrating nano-cantilever based NEMS including fringing field effect [J]. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 2014, 14(4): 766-775.
- [10] He J H, Nurakhmetov D, Skrzypacz P, et al. Dynamic pull-in for micro-electro-mechanical device with a current-carrying conductor [J]. *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, 2019: 1461348419847298.
- [11] Assis A K T, Chaib J P M C. Ampere's motor: Its history and the controversies surrounding its working mechanism [J]. *American Journal of Physics*, 2012, 80(11): 990-995.

(责任编辑:康 锋)