



齿根疲劳裂纹扩展致传动系统振动异常特征的仿真研究

刘 帅, 高 云, 崔守凡, 张振涛, 周 迅

(浙江理工大学机械与自动控制学院, 杭州 310018)

摘 要: 为研究齿轮啮合过程中齿根疲劳裂纹扩展与齿轮传动系统振动特性之间的关系, 建立了含齿根裂纹的齿轮对接触分析有限元模型, 模拟了齿根裂纹的扩展过程。通过提取有限元分析结果中的啮合齿面节点位移和接触力信息, 求得齿轮时变啮合刚度, 进而得到齿轮啮合刚度随齿根疲劳裂纹扩展的退化规律; 将该刚度变量代入 8 自由度齿轮振动系统的运动微分方程动力学模型中, 进一步研究齿根裂纹扩展与传动系统振动之间的关联性。仿真结果表明: 当齿轮单个轮齿含齿根裂纹时, 该轮齿啮合振动时域信号异常的范围为单齿-双齿-单齿三个连续区间, 其中双齿啮合区间振动冲击响应最为明显。随着齿根裂纹的扩展, 该齿时域振动信号振幅显著增大; 频域内的振动信号中各倍频的峰值基本不变, 高频区域最先出现边频带, 并且边频带向低频区域扩展, 且幅值也逐渐增大。该研究结果可以为裂纹故障识别检测提供一定的理论依据。

关键词: 齿轮; 有限元; 齿根裂纹; 啮合刚度; 动力学模型

中图分类号: TH132

文献标志码: A

文章编号: 1673-3851 (2020) 01-0051-07

Simulation analysis on characteristics of abnormal vibration of gear system caused by tooth root fatigue crack propagation

LIU Shuai, GAO Yun, CUI Shoufan, ZHANG Zhenhao, ZHOU Xun

(Faculty of Mechanical Engineering & Automation, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: In order to study the relationship between gear root fatigue crack propagation and the vibration characteristics of gear transmission system during gear meshing process, a finite element model of gear pair contact analysis containing gear root crack was established to simulate the propagation process of gear root crack. By extracting the joint displacement and contact force information of the meshing tooth surface from the finite element analysis results, the time-varying meshing stiffness of gear was obtained, and then degeneration rule of gear meshing stiffness with gear root crack propagation was gained. The stiffness variable was substituted into the dynamic model of motion differential equation of 8-degree-of-freedom gear vibration system for further study on the relevance between gear root crack propagation and vibration in transmission system. The simulation results show that when the single tooth of the gear has a tooth root crack, the range of time domain signal anomaly of meshing vibration of the tooth is three continuous intervals of single-double-single tooth, where the vibration-impact response in the double-tooth meshing interval is most obvious. With the propagation of gear root crack, the amplitude of vibration signal in the tooth time domain significantly increases; the peak value of each frequency multiplication in the vibration signal within the frequency domain is basically unchanged, and the sideband in the high frequency region first appears. Then, it expands to the low frequency region and the sideband amplitude

收稿日期: 2018-12-25 网络出版日期: 2019-06-04

基金项目: 国家国际科技合作项目 (S2015DFA71400)

作者简介: 刘 帅 (1992-), 男, 湖北黄冈人, 硕士研究生, 主要从事机械工程方面的研究。

通信作者: 周 迅, E-mail: zhouxun@zstu.edu.cn

also gradually increases. The research results can provide a certain theoretical basis for crack fault identification and detection.

Key words: gear; finite element method(FEM); gear root crack; meshing stiffness; dynamic model

0 引言

齿轮传动具有结构紧凑、传动效率和可靠度高等特点,在车辆及各类机械设备中得到了广泛应用。齿根疲劳裂纹扩展、轮齿断裂是导致齿轮传动失效的主要原因之一。研究齿根疲劳裂纹扩展与齿轮啮合振动特性之间的关联性,有助于齿轮系统振动信号分析,进而对齿根疲劳裂纹进行早期识别。

为了提高齿轮传动系统可靠性并改善性能,近年来学者们做了大量相关研究,主要包括齿根裂纹扩展、含裂纹齿轮的刚度计算以及齿轮系统动力学仿真分析等。祝赫锴等^[1]利用(Extended finite element method, XFEM)方法,建立了齿根裂纹扩展模型,对在齿面不同位置加载下齿轮裂纹的扩展规律进行仿真分析。万志国等^[2]借助 ANSYS 有限元软件求解出应力强度因子,并将其代入最大周向正应力公式中,模拟裂纹扩展轨迹,并根据裂纹轨迹建立了齿根裂纹扩展模型。该研究在使用能量法计算含裂纹轮齿啮合刚度时,将轨迹简化成直线。唐进元等^[3]建立了含不同长度和不同角度裂纹有限元模型,求解了9种工况下的刚度。Wang等^[4]提出了一种改进的斜齿轮时变啮合刚度的计算方法,在考虑各刚度分量后,通过沿齿宽方向的积分来计算时变啮合刚度。吴家腾等^[5]提出了一种将应力强度因子引入的齿轮啮合刚度的改进算法——解析有限元法(Analytical finite element method, A-FEM)。胡信鹏^[6]用能量法求解了含齿根裂纹的齿轮啮合刚度,在求解过程中将齿根裂纹模型简化成直线,代入动力学模型,根据求解结果分析了单齿裂纹以及多齿裂纹的振动信号。Liang等^[7]提出一种映射策略,分别对太阳轮、行星轮和齿圈三种裂纹故障状态下振动信号的变化趋势进行了分析。Xue等^[8]发现扭转振动信号在行星齿轮箱振动过程中不受调制效应的干扰,能有效地用于行星轮故障诊断,并利用行星轮集中参数模型进行了仿真验证。目前来看,针对齿根裂纹扩展模拟、啮合刚度计算和振动信号分析这三个方面的研究相对孤立,虽然有一些研究已经注意到含裂纹轮齿啮合刚度的计算、含裂纹轮齿的振动规律的分析等问题,但综合考虑三个问题来分析裂纹扩展与齿轮传动系统振动特征之间的关联

性的研究较少。

本文在前人研究基础上,将裂纹扩展模拟、啮合刚度计算和振动信号分析三者相结合,利用有限元方法模拟齿根疲劳裂纹的扩展行为,并求解其对应的啮合刚度,得出啮合刚度随齿根裂纹扩展的退化规律,将此规律与传动系统振动特性仿真相结合,从而获取疲劳裂纹扩展与振动系统变化之间的关联规律,为齿轮系统状态监控及损伤早期诊断提供理论支持。

1 齿根裂纹扩展仿真

1.1 含齿根裂纹齿轮有限元建模

本文以渐开线标准直齿圆柱齿轮为研究对象,取中央剖面简化为二维模型,其参数如表1所示。

表1 直齿圆柱齿轮有限元分析相关参数

齿轮	齿数/ 个	模数/ mm	压力角/ (°)	弹性模 量/GPa	齿宽/ mm
小齿轮	19	5	20	206.8	40
大齿轮	48	5	20	206.8	40

采用平面应变单元(ABAQUS CPE4I)建立齿轮的有限元模型,为保证计算的精度,接触区域网格予以细化,模型共包含52394个单元和56952个节点。利用ABAQUS KINCOUP在轴心处建立运动耦合关系。在大小齿轮接触齿面上,建立若干个接触对。本文参照文献[9]的方法,将齿轮模型分为裂纹块和非裂纹块两个部分,在裂纹块中预制了初始裂纹。含齿根裂纹齿轮啮合有限元模型如图1所示。

1.2 齿根裂纹扩展路径模拟

直齿齿根裂纹扩展主要表现为张开型,对于二维平面裂纹,撕开型应力强度因子 $K_{III}=0$ 。在极坐标系中,裂尖应力场可表达为:

$$\sigma_{\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(K_I \cos^2 \frac{1}{2}\theta - \frac{3}{2} K_{II} \sin\theta \right) \quad (1)$$

$$\tau_{\theta} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} [K_I \sin\theta + K_{II} (3\cos\theta - 1)] \quad (2)$$

其中: r 为径向坐标; θ 为角坐标; K_I 为张开型应力强度因子; K_{II} 为滑开型应力强度因子; σ_{θ} 为正应力; τ_{θ} 为切应力。Erdogan等^[10]提出的最大周向正

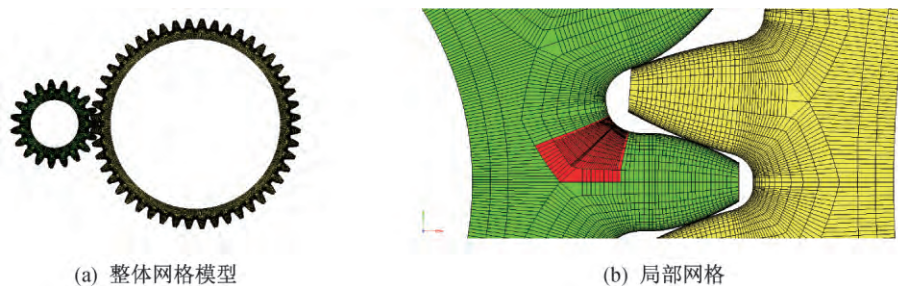


图 1 含齿根裂纹齿轮啮合有限元模型

应力理论认为：当裂尖的最大周向应力达到临界值时，裂纹开始沿垂直于最大周向应力方向扩展。由式(1)求出最大周向正应力 $\sigma_{\theta \max}$ ，根据扩展条件

$$\frac{\partial \sigma_{\theta}(K_I, K_{II}, \theta)}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial^2 \sigma_{\theta}(K_I, K_{II}, \theta)}{\partial \theta^2} = 0,$$

求得

$$\theta_0 = \arccos \left[\frac{3K_{II}^2 + \sqrt{K_I^4 + 8K_I^2 K_{II}^2}}{K_I^2 + 9K_{II}^2} \right] \quad (3)$$

其中： θ_0 为扩展角，扩展角度从 q 到 n 。当裂纹扩展方向与初始裂纹方向相同时， $\theta_0 = 0$ ；当 $K_{II} > 0$ 时， $\theta_0 < 0$ ；当 $K_{II} < 0$ 时， $\theta_0 > 0$ 。裂纹尖端环形区域以及裂纹扩展角度的描述如图 2 所示。

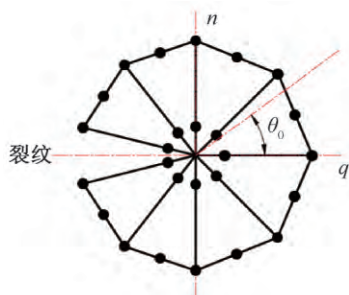


图 2 裂尖环形区域和扩展角度示意

本文根据最大周向正应力理论，建立齿根裂纹扩展模拟流程如下：

a) 将 HyperMesh 中处理好的含裂纹网格模型以 inp 文件形式导出，在 ABAQUS 中对导入的裂纹模型定义裂纹；

b) 对齿轮对接分析有限元模型设置约束、载荷和分析步，运算后在历史输出变量中提取裂纹尖端的应力强度因子；

c) 根据式(3)计算出扩展角 θ_0 ，并以裂纹尖端为起点，沿着扩展角 θ_0 方向扩展一个步长作为新的裂纹，再更新裂纹块区域网格，将模型导入 ABAQUS 进行计算，循环往复直至应力强度因子等于或大于断裂韧性。

最终得到裂纹扩展轨迹，其数据如表 2 所示。

表 2 裂纹扩展相关数据

扩展步	裂纹长/ mm	$K_I /$ (MPa $\cdot\sqrt{m}$)	$K_{II} /$ (MPa $\cdot\sqrt{m}$)	$\theta_0 /$ ($^\circ$)
0	0.4	6.76	-0.076	1.32
1	0.8	7.57	-0.102	1.53
2	1.2	8.18	-0.147	2.75
3	1.6	8.75	-0.174	2.28
4	2.0	9.32	-0.206	2.25
5	2.4	9.97	-0.245	2.96
6	2.8	10.73	-0.291	3.09
7	3.2	11.82	-0.368	3.47
8	3.6	13.56	-0.503	4.26
9	4.0	16.38	-0.722	4.98
10	4.4	21.15	-0.974	5.58
11	4.8	28.43	-1.498	5.98
12	5.2	38.12	-2.299	6.83
13	5.6	53.72	-3.735	7.76
14	6.0	71.86	-6.084	9.52
15	6.4	114.06	-17.06	15.92
16	6.8	196.73	-43.76	24.23

齿根裂纹扩展模拟到第 16 步时，其结果如图 3 所示。此时 K_I 、 K_{II} 急剧增大，齿根裂纹扩展进入了失稳状态。裂纹深度达到齿根弧长一半以后，轮齿将快速断裂。

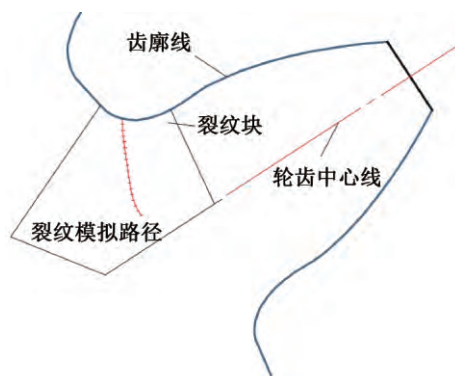


图 3 前 16 步齿根裂纹扩展模拟路径

2 有限元法求解齿轮啮合刚度

为了便于和裂纹扩展模拟过程相结合，本文采

用有限元法计算齿轮啮合刚度。该方法利用有限元分析结果中的位移和力来计算^[11],其中齿面节点位移如图4所示。设啮合齿面上节点的坐标为 A_2 ,该编号节点啮合转动之前的坐标为 A_0 ,而将其视为绕齿轮轴心 O 作刚体转动后的坐标为 A_1 ,将 A_2 和 A_1 作差就能求得齿轮的变形量。而角形变量 α 的值极小,相对应的啮合线方向上的位移在数值上可以近似为 A_1A_2 线段长度。

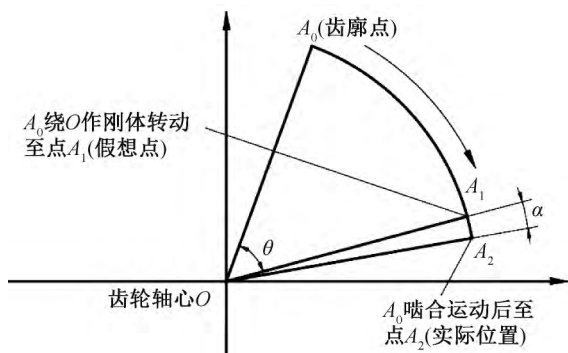


图4 齿面节点位移示意

单对齿轮啮合的刚度 K_u 定义为单位齿宽上的齿廓面法向啮合力与齿面法向变形量之比,即:

$$K_u = \frac{F_u}{b\delta} \quad (4)$$

其中: F_u 为啮合点的法向力; b 为齿轮齿宽; δ 为沿啮合线法向的变形量^[12]。

多对齿轮啮合的综合刚度 K_v 可表达为:

$$K_v = \sum_{i=1}^h K_i \quad (5)$$

其中: h 为参与啮合的齿轮对数; K_i 为第 i 对齿的啮合刚度。

为验证有限元法计算啮合刚度的有效性,将健康齿轮啮合刚度的计算结果与文献[13]中经典能量法进行了对比,能量法和有限元法齿轮啮合刚度求解结果如图5所示。

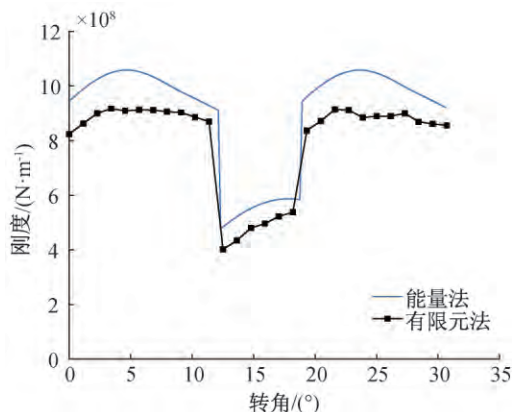
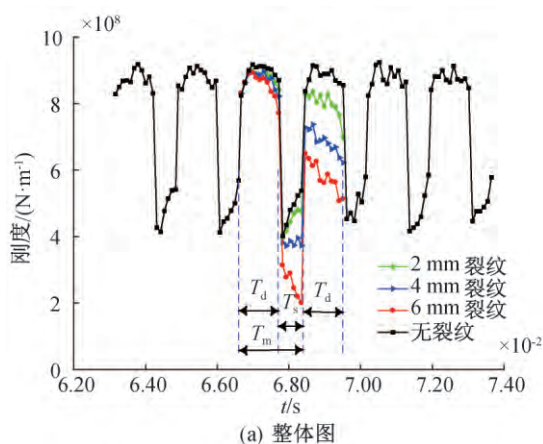


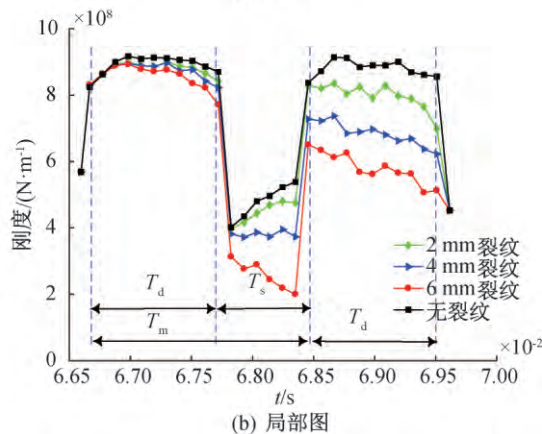
图5 齿轮啮合刚度随转角变化曲线

从对比结果(图5)可见,有限元法求得的啮合刚度总体上小于理论计算的结果,平均偏差为11.95%,二者在趋势上基本一致,呈现出单双齿交替的状态。有限元计算中,提取出来的变形量为整个齿轮在法线方向的宏观变形量,较能量法多出了齿轮基体变形量的部分,所以算出的刚度值相对较小。

图6给出了按照上述方法计算得到的当裂纹长度为2、4、6 mm时的啮合刚度。图中 T_m 为一个啮合周期, T_d 为双齿啮合区间, T_s 为单齿啮合区间。由该图可见,单个齿根裂纹对轮齿啮合刚度影响的范围为前对双齿啮合、中间单齿啮合以及后对双齿啮合。且随裂纹扩展加深,刚度下降幅度增大,后对双齿啮合刚度下降幅度最大。



(a) 整体图



(b) 局部图

图6 含不同长度齿根裂纹齿轮时变啮合刚度

3 齿轮系统动力学仿真

3.1 齿轮系统动力学建模

图7为本文计算所采用的齿轮系统动力学模型的示意图。为控制计算规模,在该模型中忽略了传动误差以及摩擦等次要因素。模型取垂直于齿轮啮合线方向为 x 轴,以沿齿轮啮合线方向为 y 轴。

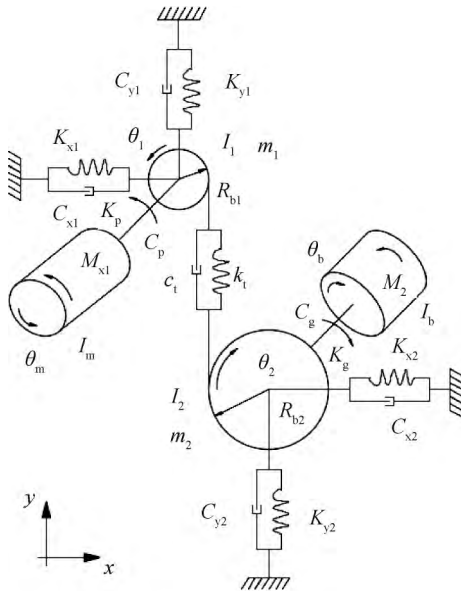


图 7 8 自由度齿轮系统动力学模型

该动力学模型的振动方程如式(6)所示

$$\begin{cases}
 m_1 \ddot{x}_1 = -K_{x1}x_1 - C_{x1}\dot{x}_1 \\
 m_2 \ddot{x}_2 = -K_{x2}x_2 - C_{x2}\dot{x}_2 \\
 m_1 \ddot{y}_1 = -K_{y1}y_1 - C_{y1}\dot{y}_1 + k_t(R_{b1}\dot{\theta}_1 - R_{b2}\dot{\theta}_2 - y_1 + y_2) + c_t(R_{b1}\dot{\theta}_1 - R_{b2}\dot{\theta}_2 - \dot{y}_1 + \dot{y}_2) \\
 m_2 \ddot{y}_2 = -K_{y2}y_2 - C_{y2}\dot{y}_2 + k_t(R_{b1}\dot{\theta}_1 - R_{b2}\dot{\theta}_2 - y_1 + y_2) + c_t(R_{b1}\dot{\theta}_1 - R_{b2}\dot{\theta}_2 - \dot{y}_1 + \dot{y}_2) \\
 I_1 \ddot{\theta}_1 = K_p(\theta_m - \theta_1) + C_p(\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_1) - R_{b1} \\
 \quad [k_t(R_{b1}\dot{\theta}_1 - R_{b2}\dot{\theta}_2 - y_1 + y_2) + c_t \\
 \quad (R_{b1}\dot{\theta}_1 - R_{b2}\dot{\theta}_2 - \dot{y}_1 + \dot{y}_2)] \\
 I_2 \ddot{\theta}_2 = K_g(\theta_2 - \theta_b) + C_g(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_b) - R_{b2} \\
 \quad [k_t(R_{b1}\dot{\theta}_1 - R_{b2}\dot{\theta}_2 - y_1 + y_2) + c_t \\
 \quad (R_{b1}\dot{\theta}_1 - R_{b2}\dot{\theta}_2 - \dot{y}_1 + \dot{y}_2)] \\
 I_m \ddot{\theta}_m = M_1 - K_p(\theta_m - \theta_1) - C_p(\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_1) \\
 I_b \ddot{\theta}_b = -M_2 - K_g(\theta_2 - \theta_b) - C_g(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_b)
 \end{cases} \quad (6)$$

式中： k_t 为上文计算的时变啮合刚度，相应的啮合阻尼 $c_t = \mu \cdot k_t$ ； θ_1 、 θ_2 、 θ_m 、 θ_b 分别为主动轮、从动轮、电动机、负载的转动自由度； x_1 、 x_2 、 y_1 、 y_2 分别为主从动轮沿 x 方向和 y 方向上的平移自由度。啮合阻尼系数 $\mu = C_m/K_m$ [13] 相关参数如表 3 所示。

3.2 齿轮动力学仿真求解分析

对方程(6)求解时，将齿轮的时变啮合刚度作为变量代入。因齿轮的啮合刚度的数量级与振动响应的数量级相差悬殊，故可将齿轮系统的振动微分方程视为刚性方程以降低求解难度 [14]。本文算例取齿轮输入轴的转速为 30 Hz(对应主动轮的啮合频

表 3 齿轮系统动力学模型主要参数

参数	数值
小齿轮质量 m_1/kg	0.96
大齿轮质量 m_2/kg	2.88
输入电机惯性矩 $I_m/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	0.0021
负载电机惯性矩 $I_b/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	0.0105
小齿轮惯性矩 $I_1/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	4.3×10^{-4}
大齿轮惯性矩 $I_2/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	8.3×10^{-3}
输入轴转动频率 f_1/Hz	30
啮合频率 f_m/Hz	570
输入扭矩 $M_1/(\text{N}\cdot\text{m})$	11.9
负载扭矩 $M_2/(\text{N}\cdot\text{m})$	48.8
电机轴扭转刚度 $K_p, K_g/(\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1})$	4.4×10^4
电机轴扭转阻尼 $C_p, C_g/(\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1})$	5.0×10^5
轴承支撑刚度 $K_{x1}, K_{x2}, K_{y1}, K_{y2}/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	6.56×10^7
轴承阻尼 $C_{x1}, C_{x2}, C_{y1}, C_{y2}/(\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1})$	1.8×10^5
小齿轮基圆半径 R_{b1}/m	0.04463
大齿轮基圆半径 R_{b2}/m	0.11276
啮合阻尼系数 μ/s	3.9×10^{-6}

率为 570 Hz)，利用 Matlab 的刚性系统变阶次多步法的 ode15 s 求解器进行求解 [15]，该方法求解过程使用的是数值差分公式。

因为机械设备常用的振动信号检测仪器为加速度传感器，本文主要对比分析健康齿轮和裂纹齿轮加速度信号。为了方便对比分析，将由疲劳载荷作用不同时长所产生不同长度裂纹下的信号置于同一时刻进行对比，如图 8—图 9 所示。

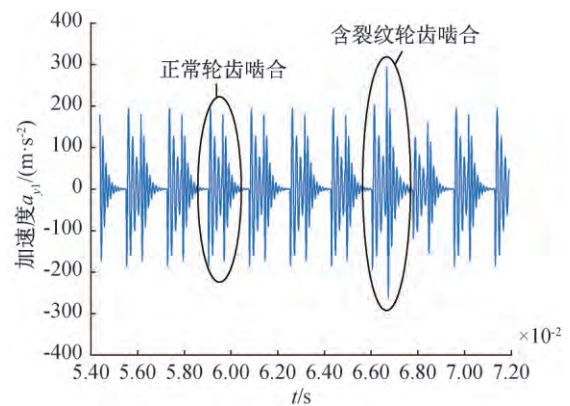


图 8 4 mm 裂纹时域振动波形

如图 8 所示，含裂纹轮齿啮合时的加速度信号波动程度明显大于正常轮齿啮合时的加速度信号波动程度，结合上文的啮合刚度计算结果可知，含裂纹轮齿啮合时刚度局部减小，从而引起了更加剧烈的振动响应。由图 9 可见，含裂纹轮齿啮合振动时信号异常的范围包括前对单齿啮合、中间双齿啮合以及后对单齿啮合三个连续区间，其中双齿啮合刚度下降幅度最大，所以振动冲击响应也最为明显。由

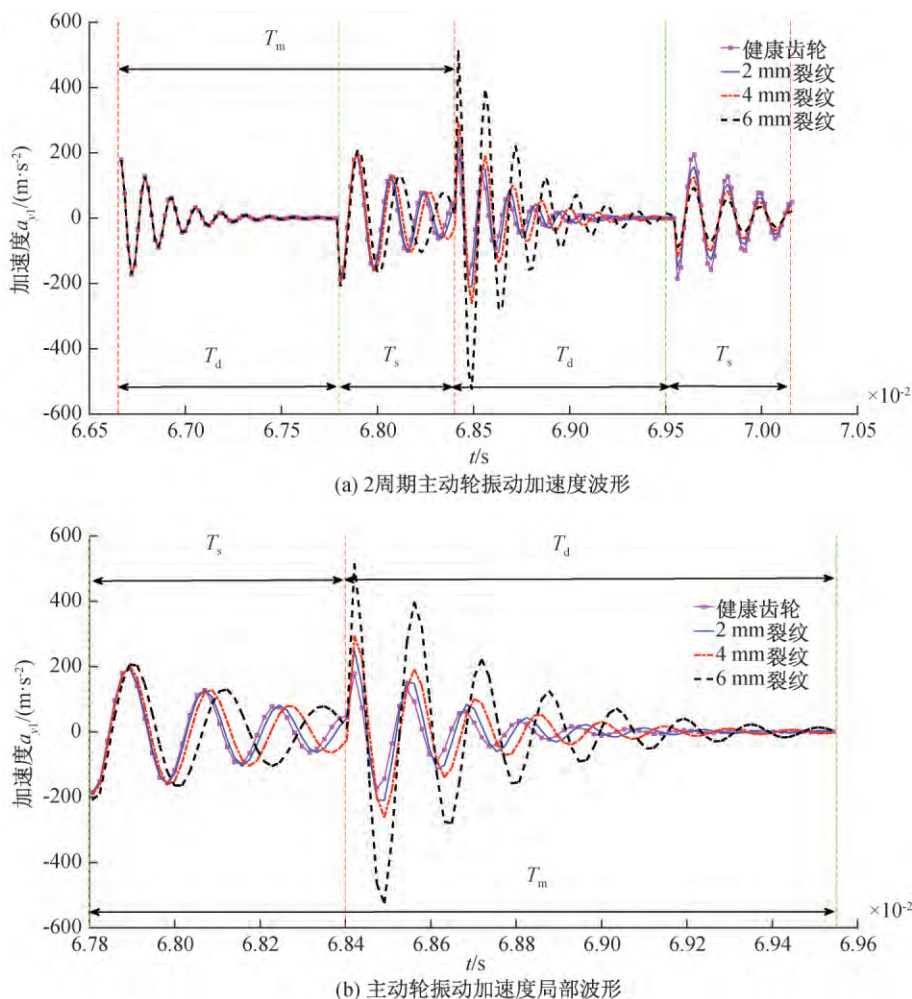


图9 沿啮合线方向振动加速度时域波形对比

图9(b)可见,随着裂纹的增长,时域振动信号波峰增大。

通过将含不同长度齿根裂纹的主动轮在沿啮合线方向的振动加速度信号进行FFT转换,得到了如图10所示的加速度频谱图。

由图10可知,随着裂纹的扩展,在频域内的振动信号中570 Hz各倍频的峰值基本不变。从信号的频率成分上分析,振动的总频带由啮合基频、倍频以及因齿根裂纹导致的异常频率构成,作为正常响应信号,基频和倍频是运行过程中所有轮齿啮合响应的平均结果,含裂纹齿在一个啮合周期中只参与一次啮合,所以对倍频的贡献只有 $1/z$ (z 为齿数),因而裂纹扩展导致的信号异常不会在倍频中体现出来。4000~7000 Hz范围内的边频幅值也逐渐增大,整体的边频幅值的范围由高频域向低频域范围扩张。在频域局部放大图中,各特征频率差值 $\Delta f=30$ Hz,即主动轮的转频。

将本文中含齿根裂纹的齿轮副振动信号的仿真结果同文献[6]中相应的仿真结果进行比较,可知在

两者的研究当中,裂纹对相应时域区间内振幅的影响是类似的,对频域范围内的倍频和边频特征的影响也一致。该对比结果为本文进一步研究齿根疲劳裂纹扩展致传动系统振动异常特征提供了理论支持。

4 结论

本文将齿根疲劳裂纹扩展的数值模拟、齿轮的动态啮合刚度计算以及齿轮传动系统的动力学分析相结合,计算得到了齿根疲劳裂纹的扩展与齿轮动态啮合刚度之间的关联性,进而得到了随着齿根疲劳裂纹的扩展,齿轮系统振动特性的变化规律。主要结论如下:

a) 含裂纹轮齿的啮合刚度比健康轮齿的啮合刚度小且随着齿根裂纹扩展的加深,刚度下降幅度增大,后对双齿啮合刚度下降幅度最大。

b) 含单个齿根裂纹轮齿啮合振动时域信号异常范围可分为前对单齿啮合、中间双齿啮合以及后对单齿啮合三个连续区间,其中双齿啮合区域振动冲击响应最为明显。

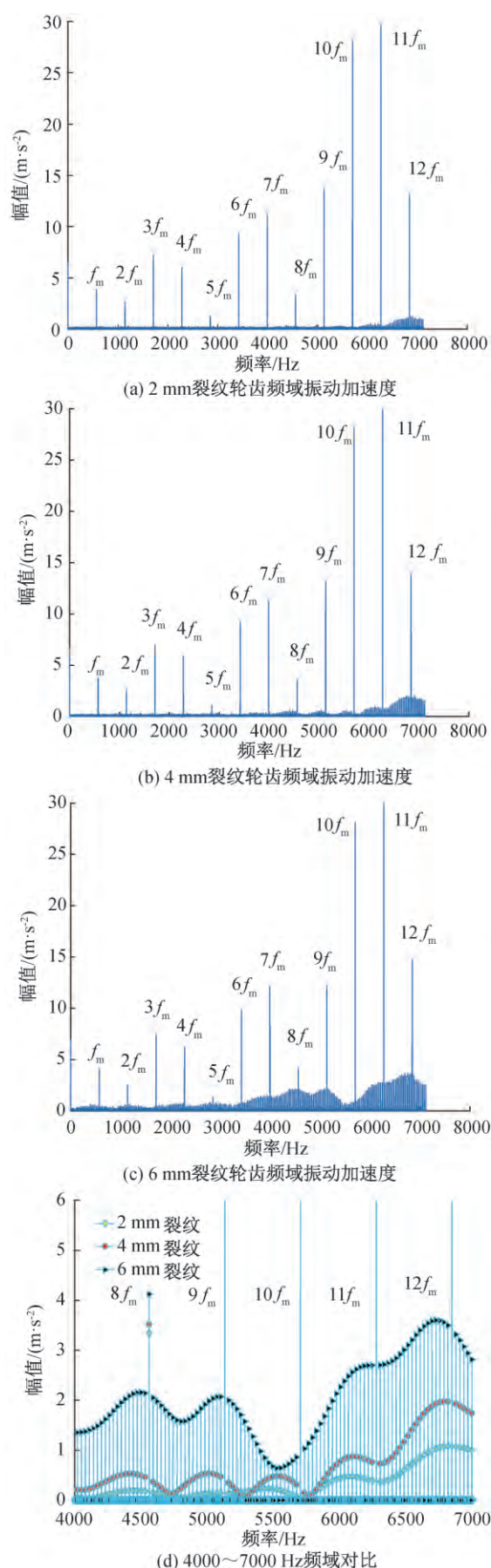


图10 频域振动加速度图

c)随着齿根裂纹的扩展,该齿时域振动信号振幅显著增大;频域内的振动信号中各倍频的峰值基本不变,高频区域最先出现边频带并向低频区域扩展且边频带幅值也逐渐增大。

参考文献:

- [1] 祝赫锴, 杨建伟, 李欣. 某地铁齿轮箱齿轮弯曲疲劳裂纹分析[J]. 机械传动, 2018, 42(10):172-176.
- [2] 万志国, 訾艳阳, 曹宏瑞. 直齿圆柱齿轮齿根裂纹扩展仿真及齿轮时变啮合刚度分析[J]. 应用数学和力学, 2015, 36(s1):14-20.
- [3] 唐进元, 王志伟, 伊洪丽, 等. 齿根裂纹与轮齿啮合刚度关联规律研究[J]. 机械传动, 2014, 38(2):1-4.
- [4] Wang Q B, Zhao B, Fu Y, et al. An improved time-varying mesh stiffness model for helical gear pairs considering axial mesh force component[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2018, 106:413-429.
- [5] 吴家腾, 杨宇, 程军圣. 基于解析有限元的齿根裂纹时变啮合刚度计算方法[J]. 机械工程学报, 2018, 54(23):56-62.
- [6] 胡信鹏. 含齿根裂纹缺陷的齿轮系统动态特性分析[D]. 长春:吉林大学, 2015:12-18.
- [7] Liang X H, Zuo M J, Liu L B. A windowing and mapping strategy for gear tooth fault detection of a planetary gearbox[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2016, 80:445-459.
- [8] Xue S, Howard I. Torsional vibration signal analysis as a diagnostic tool for planetary gear fault detection[J]. Mechanical Systems & Signal Processing, 2018, 100:706-728.
- [9] 高云. 齿根裂纹扩展数值仿真与齿轮副时变啮合刚度的计算[D]. 杭州:浙江理工大学, 2018:21-25.
- [10] Erdoga F, Sih G C. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear[J]. Journal of Basic Engineering Transactions ASME, 1963, 85(4):519-525.
- [11] 常乐浩, 刘更, 郑雅萍. 一种基于有限元法和弹性接触理论的齿轮啮合刚度改进算法[J]. 航空动力学报, 2014, 29(3):682-688.
- [12] 李亚鹏, 孙伟, 魏静, 等. 齿轮时变啮合刚度改进计算方法[J]. 机械传动, 2010, 34(5):22-26.
- [13] Tian X H. Dynamic simulation for system response of gearbox including localized gear faults[D]. Edmonton: University of Alberta, 2004:74-76.
- [14] 张微才. 齿轮传动系统弯扭耦合振动的动态特性研究[D]. 武汉:华中科技大学, 2011:28-29.
- [15] 乔田田, 李维国. 计算周期解时出现刚性问题的一种处理方法[J]. 计算物理, 2007, 24(3):367-372.

(责任编辑:康 锋)