浙江理工大学学报，2019，41(2)：239-242
Journal of Zhejiang Sci-Tech University
DOI：10.3969/j.issn.1673－3851(n).2019.02.015

具有小秩 Sylow-子群的有限可解群

肖玲玲，孙芬芬，易小兰
（浙江理工大学理学院，杭州 310018）

摘　要：设 G 是有限 p-群，$r(G)=\max\{\log_p|E|, E\leqslant G\}$，其中 E 为 G 的初等交换子群，称为 G 的秩。再令 $r_n(G)=\max\{\log_p|E|, E\leqslant G, E\lhd G\}$，其中 E 为 G 的初等交换子群，称为 G 的正规秩。研究 Sylow-子群的正规秩 $\leqslant 3$ 的可解群的结构问题，运用极小阶反例法，证明了若 G 为有限可解群且 G 的 Sylow-子群的正规秩 $\leqslant 3$，则 $G\in N_2N_2N_2U$。更进一步，群 G 的幂零长不超过 5，且对所有的素数 p，G 的 p-长不超过 2。

关键词：正规秩；可解群；Sylow-子群；正规子群
中图分类号：O152.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-3851 (2019) 03-0239-04

On finite solvable groups with Sylow-subgroups of small rank

XIAO Lingling, *SUN Fenfen*, *YI Xiaolan*
(School of Sciences, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: We assume G is a finite p-group, $r(G)=\max\{\log_p|E|, E\leqslant G\}$. Wherein, E is an elementary exchange subgroup of G, called rank of G. We make $r_n(G)=\max\{\log_p|E|, E\leqslant G, E\lhd G\}$, where E is an elementary called normal rank of G. The structure problem of solvable groups of normal rank of Sylow－subgroups $\leqslant 3$ was studied. The method of minimal counterexample was used to prove If G is a finite soluble group and the normal rank of Sylow-subgroup of $G\leqslant 3$, then $G\in N_2N_2N_2U$. Moreover, the nilpotent length of G is no more than 5 and for every prime numbe p, the p-length of G is no more than 2.

Key words: normal rank; soluble group; Sylow-subgroup; normal subgroup

0　引　言

本文所有的群均为有限群。设 G 是有限 p-群，E 为 G 的初等交换子群，称 $r(G)=\max\{\log_p|E|, E\leqslant G\}$ 为 G 的秩。若 E 为 G 的初等交换子群，则称 $r_n(G)=\max\{\log_p|E|, E\leqslant G, E\lhd G\}$ 为 G 的正规秩。有关学者利用正规秩研究有限 p-群的结构，已经取得一系列的结果：Blackburn[1] 对 $r_n(G)=1$ 的有限 p-群进行了分类，Blackburn[2] 在 $p\neq 2$ 的条件之下对 $r_n(G)=2$ 的有限 p-群进行了分类。

如果有循环正规子群 N，使得商群 G/N 也是循环群，则称有限 p-群 G 为亚循环群，显然亚循环 p-群的正规秩也不超过 2。Janko[3] 得到了有限 p-群 G 为亚循环群的一些重要结果，如：假设有限 2-群 G 恰有三个对合，则 G 有一指数至多为 4 的亚循环子群。Chillag 等[4] 研究了 Sylow 子群为亚循环的有限群结构，证明了 Sylow-子群为亚循环的有限可解群，则其总有一个正规的 $\{2,3\}'$-Hall 子群。文献[5]中定理 IV.2.11 证明：如果群 G 有循环的 Sylow-子群，则 G 的导群 G' 是 G 的循环的 Hall-子群，其商群 G/G' 也是循环群，故群 G 幂零长不超过 2。

收稿日期：2018－11－01　　网络出版日期：2019－01－02
基金项目：国家自然科学基金项目(11471055)；浙江省自然科学基金项目(LY18A010028)
作者简介：肖玲玲(1992－)，女，安徽铜陵人，硕士研究生，主要从事有限群方面的研究。
通信作者：易小兰，E-mail：yixiaolan2005@126.com

本文采用极小阶反例法，研究 Sylow-子群的正规秩$\leqslant 3$ 的结构问题，分析了可解群的正规秩、幂零长、p-长之间的一些关系。

1 预备知识

本文用 A 表示所有交换群构成的群系，N 表示幂零群系，U 表示超可解群系，$\mathrm{N}_{2'}$ 表示奇数阶幂零群类，N_2 幂零 2－群。$n(G)$ 表示群 G 的幂零长，$d(G)$ 表示群 G 的导列长，$l_p(G)$ 表示 G 的 p-长。$A_G=\bigcap_{x\in G}A^x$ 表示子群 A 在 G 中的核，$G=[A]B$ 表示 A 与 B 的半直积，其中 A 正规于 G。如果存在 G 的极大子群 M，使得 $M_G=1$，则称 G 为本原群，称极大子群 M 为 G 的本原子。$O_p(G)$ 为 G 的极大正规 p-子群，$O_{p'}(G)$ 为 G 的极大正规 p'-子群，当 $p=2$ 时，用 $O(G)$ 来表示 $O_{p'}(G)$，显然 $O_{p',p}(G)/O_{p'}(G)=O_p(G/O_{p'}(G))$。

本文所用符号和概念皆为标准的，未说明的概念与符号参见文献[4,7]。

引理1 若 F 为饱和群系，G 为可解群，如果 G 本身不包含在 F 中，但是对 G 的所有不等于 1 的正规子群 N，都有 $G/N\in\mathrm{F}$，则 G 为本原群。

证明：反证法。若 $M_G\neq 1$，则 $G/M_G\in\mathrm{F}$，又因为 $M_G\in\Phi(G)$，所以 $G/\Phi(G)\in\mathrm{F}$。又因为 F 是饱和群系，故 $G\in\mathrm{F}$。假设矛盾，表明 G 为本原群。

引理2[6]定理Ⅶ 如果 G 为本原群，M 为群 G 的本原子，则下列结论成立：

a) $\Phi(G)=1$；

b) $F(G)=C_G(F(G))=O_p(G)$ 且 $F(G)$ 是阶为 p^n 的初等交换 p－群，对某个素数 p 成立；

c)群 G 有唯一的极小正规子群，等于 $F(G)$；

d) $G=[F(G)]M$ 且 $O_p(M)=1$；

e) M 同构于 $GL(n,p)$ 的某个子群。

引理3 下列结论成立：

a) $\mathrm{N}_2\mathrm{N}_{2'}\mathrm{N}_2\mathrm{U}$ 是饱和群系；

b)如果 X 和 H 是群系，则 $\mathrm{H}\subseteq\mathrm{X}_\mathrm{H}$；

c)如果 X_1，X_2 和 H 是群系，且 $\mathrm{X}_1\subseteq\mathrm{X}_2$，$\mathrm{X}_1\mathrm{H}\subseteq\mathrm{X}_2\mathrm{H}$。

证明：由文献[6]定理 VII.3 和定理 VII.6 可以证得。

引理4[2] 如果 H 是 $GL(2,p)$ 的可解子群，则 $H\in\mathrm{N}_2\mathrm{U}$。此外，如果 H 是 $3'$-群，则 $H\in\mathrm{U}$。

引理5[2] 如果 H 是 $GL(3,p)$ 的可解子群，则 $H\in\mathrm{AU}\cup\mathrm{N}_3\mathrm{N}_2\mathrm{U}$。

引理6 如果 H 是 $GL(3,2)$ 的子群，则 $H\in\{E,GL(3,2),Z_2,Z_3,Z_7,Z_2\times Z_2,D_8,A_4,S_4,Z_3[Z_7]\}$。

证明：由文献[5]定理Ⅱ.6.14 知，$GL(3,2)\simeq PSL(2,7)$，再由文献[4]定理Ⅱ.8.27 可知结论成立。

引理7 如果 N 为 p-群 P 的正规子群，则 $\log_p|N/\Phi(N)|\leqslant r_n(P)$。

引理8 如果 N 是 p-群 P 的正规子群，则 $r_n(P/N)\leqslant r_n(P)$。

证明：假设 $r_n(P/N)=m$，则存在 P/N 的正规子群 K/N，满足 $p^m=|(K/N)/\Phi(K/N)|$，其中 K 是 P 的正规子群。由文献[5]引理Ⅲ3.4 得 $\Phi(K)N/N\leqslant\Phi(K/N)$。因此：

$$(K/N)/\Phi(K/N)\simeq((K/N)/(\Phi(K)N/N))/(\Phi(K/N)/(\Phi(K)N/N)),$$

且 $(K/N)/(\Phi(K)N/N)\simeq K/\Phi(K)N$。所以

$$p^m=|(K/N)/\Phi(K/N)|\leqslant|K/\Phi(K)/N|\leqslant|K/\Phi(K)|\leqslant p^{r_n(P)},$$

从而 $m\leqslant r_n(P)$。

引理9 对任意的可解群 G 和任意素数 p，总有 $O_{p',p}(G/\Phi(G))=O_{p',p}(G)/\Phi(G)$。

证明：因为 $\Phi(G)$ 是幂零的，所以 $\Phi(G)\leqslant O_{p',p}(G)$ 且 $O_{p',p}(G)/\Phi(G)\leqslant O_{p',p}(G/\Phi(G))$。

假设 $O_{p',p}(G/\Phi(G))=K/\Phi(G)$，且 H 为 K 的 p'-Hall 子群。因为 $H\Phi(G)/\Phi(G)$ 是 $K/\Phi(G)$ 的 p'-Hall 子群，所以 $H\Phi(G)\lhd G$；由 Frattini 引理，可知 $G=(H\Phi(G))N_G(H)$，故 $H\lhd G$ 且 $K\leqslant O_{p',p}(G)$ 成立。

引理10 假设 G 为可解群，其 Sylow 2-子群的正规秩 $\leqslant 3$，则商群 $G/O_{2',2}(G)$ 同构于下列群之一：$E,Z_3,Z_7,[Z_7]Z_3,S_3$。并且当 $G/O_{2',2}(G)\cong S_3$ 时 $l_2(G)=2$；其它情形，都有 $l_2(G)\leqslant 1$。

证明：对 G 的阶进行归纳。由文献[5]引理 VI.6.9，知 $O(G)=1$，得到 $O_2(G)=F(G)=F$ 为群 G 的 Fitting 子群。由引理 9 可知 $O_{2',2}(G/\Phi(G))=O_{2',2}(G)/\Phi(G)$，得 $\Phi(G)=1$。由引理 7 可知，子群 $F(G)$ 为阶 $\leqslant 8$ 的初等交换 2－群。由于 G 可解，所以 $F=C_G(F)$，且商群 G/F 同构于 F 的自同构群，即 $G/F\leqslant GL(n,2)$，$n\leqslant 3$，且 $O_2(G)=1$。

若 $|F|=2$，则 $G=F$。若 $|F|=4$，则 $G/F\leqslant GL(2,2)\simeq S_3$，故商群 G/F 的阶为 1 或者 3，或者同构于 S_3。如果 $|F|=8$，则 $G/F\leqslant GL(3,2)$。由引理 6 知结论成立。

引理11 若素数 p 为奇数，p-可解群 G 的

Sylow p-子群的正规秩 $\leqslant 2$，则 $l_p(G)\leqslant 1$。

证明：对群 G 的阶进行归纳。不妨假设 $O_{p'}(G)=\Phi(G)=1$ 且 $F=F(G)=C_G(F)=O_p(G)$ 为 G 的唯一的极小正规子群，且 G/F 同构于 F 的自同构群。由引理 7 知 $|F|=p$ 或者 $|F|=p^2$。如果 $|F|=p$，则商群 G/F 为循环群，且其阶整除 $p-1$，因此，$l_p(G)\leqslant 1$。如果 $|F|=p^2$，则 G/F 同构于 $GL(2,p)$ 的 $p-$可解子群。又因 $GL(2,p)$ 的 Sylow p-子群的阶为 p，故群 G 的 Sylow p-子群的阶为 p^2 或者 p^3。其中 Sylow p-子群是阶 $\leqslant p^3$ 的 p-可解群，故对奇数 p 而言 p-长 $\leqslant 1$。证毕。

引理 12　若群 G 为 p-可解群，其 Sylow$p$-子群的正规秩 $\leqslant 3$，则 $l_p(G)\leqslant 2$。

证明：对群 G 的阶进行归纳。不妨假设 $O_{p'}(G)=\Phi(G)=1$ 且 $F=F(G)=C_G(F)=O_p(G)$ 为群 G 的唯一的极小正规子群，则 G/F 同构于 F 的自同构群。由引理 7 知 $|F|$ 为 p，p^2 或者 p^3。由引理 10，不妨假设 $p>2$。若 $|F|=p$ 或者 $|F|=p^2$，则群 G 的 Sylow p-子群的阶 $\leqslant p^3$，从而 $l_p(G)\leqslant 1$。如果 $|F|=p^3$，则商群 G/F 同构于 $GL(3,p)$ 的子群，但是 $GL(3,p)$ 的 Sylow p-子群的阶 $\leqslant p^3$，故 $l_p(G/F)\leqslant 1$ 或者 $l_p(G/F)\leqslant 2$。证毕。

2　主要定理

定理 1　若群 G 为有限可解群且群 G 的 Sylow-子群的正规秩 $\leqslant 3$，则 $G\in \mathrm{N}_2\mathrm{N}_2\mathrm{N}_2\mathrm{U}$。进一步，群 G 的幂零长不超过 5，且对所有的素数 p，群 G 的 p-长不超过 2。

证明：假设此定理不真，且 G 为极小阶反例。若 N 为群的不唯一的极小正规子群，则由引理 8，商群 $G/N\in \mathrm{N}_2\mathrm{N}_2\mathrm{N}_2\mathrm{U}$。由引理 3 得群系的乘积 $\mathrm{N}_2\mathrm{N}_2\mathrm{N}_2\mathrm{U}$ 是继承群系，再由引理 1 知群 G 为本原群。故群 G 满足引理 2 的条件，即引理 2 中 a)— e) 对群 G 成立。此时，对某个素数 p，$F(G)$ 是初等交换群。

如果 P 是群 G 的 Sylow p-子群，则 $F(G)\leqslant P$。又 $F(G)\lhd P$，故由引理 7 知 $|F(G)|=p^k$ 且 $k\leqslant 3$。当 $k=1$ 时，商群 G/F 为循环群，群 G 为超可解群，即：$G\in \mathrm{U}$。当 $k=2$ 时，若 $p=2$，则 $GL(2,2)\simeq S_3$ 且 $G\in \mathrm{N}_2\mathrm{U}$；当 $k=3$ 时，且 $p=2$，则商群 G/F 是 $GL(3,2)$ 的子群，且商群 G/F 的正规 $2-$子群等于 1。

若 $p>2$ 时，则由引理 4 可知 $G/F\in \mathrm{N}_2\mathrm{U}$ 且 $G\in \mathrm{N}_2\mathrm{N}_2\mathrm{U}$。由引理 6 知商群 $G/F\in\{Z_3,Z_7,S_3,Z_3[Z_7]\}$，从而，$G/F\in \mathrm{U}$ 且 $G\in \mathrm{N}_2\mathrm{U}$。由引理 3 可知总有 $\mathrm{G}\in \mathrm{N}_2\mathrm{N}_2\mathrm{U}$。

若 $p>2$，由引理 5 得商群 $G/F\in \mathrm{AU}\cup \mathrm{N}_3\mathrm{N}_2\mathrm{U}$。又因 $\mathrm{A}\subseteq \mathrm{N}_2\mathrm{N}_2$，故 $G/F\in \mathrm{N}_2\mathrm{N}_2\mathrm{U}$。又由引理 3 知 $G\in \mathrm{N}_2\mathrm{N}_2\mathrm{N}_2\mathrm{U}$。总之，$G\in \mathrm{N}_2\mathrm{N}_2\mathrm{N}_2\mathrm{U}$ 成立。由于超可解群是亚幂零群，故 G 的幂零长不超过 5。由引理 10 和引理 12 可知对所有的素数 p，$l_p(G)\leqslant 2$ 成立。

推论 1　如果群 G 为正规秩 $\leqslant 3$ 的 Sylow $2-$子群的可解群，而对所有的素数 $p>2$，Sylow p-子群的正规秩 $\leqslant 2$，则 $G\in \mathrm{N}_2\mathrm{N}_2\mathrm{U}$ 且 $G_{\{2,3,7\}'}\lhd G$。

证明：由定理 1 得 $G\in \mathrm{N}_2\mathrm{N}_2\mathrm{U}$，且 $n(G)\leqslant 4$。由引理 10 和引理 11 知 G 的 Hall π-子群 G_π 正规于 G，当 $\pi=\pi(G)\{2,3,7\}$ 时。又 π-闭的群类是继承群系，由归纳可知 $O_\pi(G)=1$。而 $F(G)$ 是初等交换 p-群，阶为 2^3，3^2 或 7^2。当 $p=2$ 且 $n\leqslant 3$ 或者 $p\in\{3,7\}$ 且 $n\leqslant 2$，商群 G/F 同构于 $GL(n,p)$ 的子群。由于 n 和 p，$\pi(GL(n,p))\subseteq\{2,3,7\}$，故群 G 是 π'-群。

由两个循环群生成的群称为双循环群。显然，亚循环群是双循环群。文献[5]定理Ⅲ.11.5 证明了双循环 2-群的正规秩 $\leqslant 3$。由文献[2]引理 6，具有双循环 Sylow-子群的可解群的 $\{2,3\}'$-Hall-子群也是正规的。从而可以得到推论 2。

推论 2　如果 G 为具有双循环的 Sylow-子群的可解群，$G\in \mathrm{N}_2\mathrm{N}_2\mathrm{U}$ 且 $G_{\{2,3\}'}\lhd G$。则有：$n(G)\leqslant 4$，$l_2(G)\leqslant 2$；且对所有的素数 $p>2$，有 $l_p(G)\leqslant 1$ 成立。

3　结　语

本文利用有限群的 Sylow-子群的正规秩研究了可解群的性质，分析了可解群的正规秩、幂零长、p-长之间的一些关系。在后续研究中，可将定理中的某些条件加以推广，研究其对有限群 G 的可解性、幂零性、超可解性的一些其他影响。例如重点研究有限 p-中的公开问题：决定秩或正规秩为 2 的有限 2 群的构造，给出完全分类。

参考文献：

[1] Blackburn S R. Enumeration within isoclinism classes of groups of prime power order[J]. Journal of the London Mathematical Society, 1994, 50(2):293-304.

[2] Blackburn N. Generalizations of certain elementary theoerms on *p-groups* [J]. London Math, 1961, 11(3): 1-22.

[3] Janko Z. A classification of finite 2－groups with exactly three involutions [J]. Algebra, 2006, 291(2), 505-533.

[4] Chillag D, Sonn J. Sylow－metacyclic groups and Q-admissibility [J]. Israel J. Math, 1981, 40 (3/4): 307-323.

[5] Huppert B. Endliche Gruppen: I [M]. Berlin － Heidelberg: Springer-Verlag, 1967.

[6] Gaschutz W. Lectures on subgroups of Sylow type in finite soluble groups [M]. Canberra: Australian National University, 1979.

[7] Shemetkov L A. Formations of Finite Groups [M]. Moscow: Nauka, 1978.

[8] Mazurov V D. Finite groups with metacyclic Sylow 2－subgroups [J]. Siberian Mathematical Journal, 1967, 8 (4): 733-733.

[9] Janko Z. Elements of order at most 4 in finite 2－groups [J]. Journal of Group Theory, 2004, 7(4): 431-436.

(责任编辑:康 锋)