

一类网络控制系统数据包乱序的补偿控制

陈俊,郑梦娜,高金凤

(浙江理工大学自动化研究所,杭州 310018)

摘要:针对一类网络控制系统中出现的数据包乱序问题,提出了一种补偿控制方法以消除数据包乱序对系统的不利影响。首先利用时间戳(time-stamp)方法对从源节点发送的数据包时间序列进行标记,再在控制器和执行器端分别设置一个比较器,结合两者判断数据包是否发生乱序,若乱序则对数据包做相应处理,这使得用于被控对象的控制信号总保持最新,将闭环系统建模成一个 Markov 跳变系统。运用 Lyapunov 稳定性理论得到了系统随机稳定的充要条件,并采用一组具有逆约束的线性矩阵不等式(LMIs)表示该充要条件。对于控制器设计问题转化为线性矩阵不等式的凸优化问题,利用锥补线性化算法(CCL)得到了状态反馈控制器的增益。最后给出的数值仿真示例验证了所提方法的有效性。

关键词:网络控制系统;数据包乱序;补偿控制;Markov 跳变系统;锥补线性化

中图分类号: TP273

文献标志码: A

文章编号: 1673-3851 (2017) 05-0691-08

0 引言

随着网络技术在军事、工业、商业领域不断渗透与发展,传统点对点专线的控制模式已经不能满足日益发展的需求,因此需要一种新的控制系统来弥补传统控制系统的不足,进而促进了网络控制系统的发展。网络控制系统(networked control systems, NCSs)是一种将分布在空间中不同位置的系统元件如传感器、控制器、执行器等,通过实时网络连接的反馈控制系统^[1-4]。这种基于网络的控制模式具有成本低、接线少、安装维护方便、可远程操作和控制等优势。但是,由于在控制回路中加入了通信网络,给系统带来了许多新的问题和挑战,如网络诱导时延、数据包丢失与乱序、量化误差等,这些问题会不同程度地影响系统的控制性能,甚至破坏系统的稳定性。所以需充分考虑通信网络的特性,设计先进的控制算法。

针对时延和丢包问题,已有大量研究。其中,Li 等^[5]提出了一种改进的依赖时延上界和丢包上界的

稳定性判据,具有较小的保守性;Kim 等^[6]研究了带有时延的网络控制系统的调度方法,通过求解一组线性矩阵不等式(LMIs),得到了系统的最大允许时延上界,与现有方法相比,该方法具有较小的保守性;Xu 等^[7]将不稳定的通信网络建模成两段独立的时齐 Markov 链,然后根据循环调度(RRS)的周期性特性,得到了具有增广 Markov 链辅助系统的均方指数稳定性条件;Yue 等^[8]讨论了同时受网络诱导时延和丢包影响的网络控制系统,通过引进一些松散的矩阵变量并利用网络诱导时延下界的信息,求解线性矩阵不等式,得到了无记忆型 H_∞ 控制器。在实际应用中,数据包在通信网络中的传输并不总是遵循“先发先到”的原则,有时先发送的数据包比后发送的数据包反而后到达目的节点,导致在源节点数据包的先后顺序和目的节点的不一样,即“数据包乱序”,这在许多研究中并没有考虑,使得研究结果具有较大的保守性,所以必须考虑网络控制系统的数据包乱序问题。其中,Zhao 等^[9]采用了补偿方法来处理乱序对系统的影响;Li 等^[10]分析了同时受

收稿日期:2017-01-06 网络出版日期:2017-05-24

基金项目:国家自然科学基金项目(61374083);浙江省科学技术厅项目(2014C31082)

作者简介:陈俊(1991-),男,江苏扬州人,硕士研究生,主要从事网络控制系统方面的研究。

通信作者:高金凤,E-mail:gaojf163@163.com

长时延和乱序影响的网络控制系统,通过矩阵理论,将具有多步时延的系统转变成参数不确定的离散系统,提出了一种改进的 Lyapunov-Krasovskii 函数,并得到了具有较小保守性的 H_∞ 控制器;Liu 等^[11]对乱序的数据包进行重新排序并且选择最新的控制输入信号,给出了两个连续采样间隔内数据包重排的关系,最后利用平均驻留时间 (average dwell time) 方法得到了系统指数稳定的充分条件;Chen 等^[12]分别在传感器与控制器和控制器与执行器之间设置逻辑数据包处理器(DPP)来处理数据包的乱序问题。

本文研究了一类具有数据包乱序问题的网络控制系统的状态反馈控制问题,提出了一种补偿控制方法来消除乱序对系统的不利影响。首先利用时间戳方法对某一段时间的数据包序列进行标记,再在控制器端和执行器端分别设置一个比较器来处理接收到的数据包,使得作用于被控对象的控制信号都保持最新,最后闭环系统被建模成一个 Markov 跳变系统,进而运用 Lyapunov 稳定性理论、线性矩阵不等式(LMIs)和锥补线性化算法对系统进行稳定性分析和控制器设计。

1 问题描述

典型的网络控制系统结构包括五部分组成:通信网络、被控对象、传感器、控制器、执行器,其结构如图 1 所示。

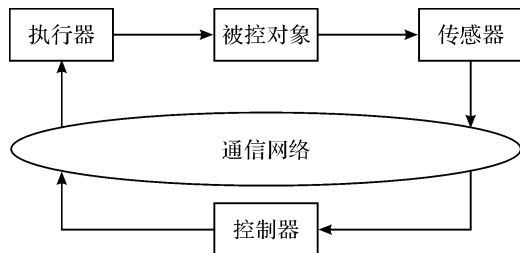


图 1 典型的网络控制系统结构

为方便研究,设定传感器为时钟驱动,而控制器和执行器都为事件驱动,即控制器和执行器一旦接收到数据就立即对其进行处理并发送到下一个节点,数据处理的时间忽略不计。从图 1 中可以看出传感器到控制器通道(反馈通道)和控制器到执行器通道(正向通道)都存在通信网络,所以在这两个通道中都会发生数据包乱序。具有数据包乱序的网络控制系统的数据传输时序如图 2 所示。图 2 中,关于 t 的变量都表示某个时刻, $k1$ 、 $k2$ 、 $k21$ 等表示不同的数据包, s 表示传感器、 c 表示控制器、 a 表示执行器。

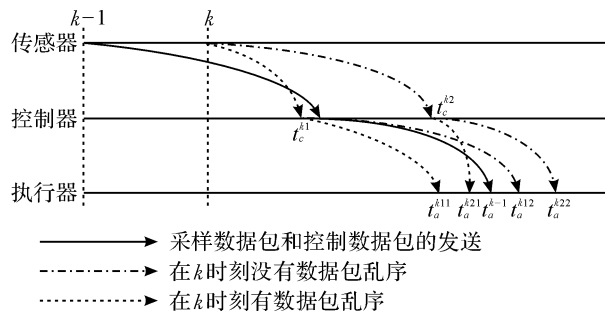


图 2 具有数据包乱序的网络控制系统的数据传输时序

从图 2 中可以看出,有两种数据包会发生乱序:一种是在传感器到控制器通道中传输的采样数据包;另一种是在控制器到执行器通道中传输的控制数据包。如采样数据包在 t_s^k 时刻发送而到达控制器是在 t_c^{k1} 时刻,这表明发生了数据包乱序;同样地,当控制数据包在 t_c^{k2} 时刻发送而在 t_a^{k21} 时刻到达执行器,也发生了数据包乱序。当采样数据包发生乱序时,控制数据包发生乱序的可能性将会变大,从某种程度上来说,控制数据包的乱序是由时变的往返时延引起的。

当网络诱导时延是时变的,数据包的传输都会出现乱序问题,如后一步发送的数据包和前一步发送的数据包同时到达甚至早一步到达目的节点。其中,依次发送的数据包同时到达目的节点是数据包乱序的一种特殊情况。两种数据包乱序对系统性能有不同的影响:a) 采样数据包的乱序:通常不管数据包是否乱序,采样数据包一旦到达控制器,控制器立即处理并计算出控制信号。但是,由于数据包的乱序使得新到达的采样数据包并不一定是最新的,一般采用的方法是将“旧”的采样数据包计算后再发送到执行器,但这加重了控制器的计算负担和控制器到执行器的通信负担。b) 控制数据包的乱序:正常情况下,控制信号一旦到达被控对象就被利用。但是,由于控制数据包的乱序使得新到达的信号并不一定是最新的,如果利用了这个乱序的信号将对系统的实时性产生不利的影响。为了降低这些不利因素,本文提出了一种补偿控制方法。

要对数据包乱序使用补偿控制方法,首先要确定数据包乱序发生的时间,本文利用时间戳方法和一个专门设计的比较器确定该时间。时间戳方法是给每个发送的数据包添加时间标签,以获得数据包从源节点发送的时间和数据包到达目的节点的时延。比较器通过比较新到达的数据和上一次到达目的节点数据的时间标签,判断数据是否发生乱序,如果新到达数据的时间标签比上一次到达目的节点的

数据包时间标签要早,说明发生了数据包乱序。针对不同形式的数据包乱序,补偿分为两部分组成:a) 对采样数据包乱序的补偿:在控制器端设置缓冲器用来存储上一次被利用的采样数据包的时间标签,比较器比较两者的时间标签,如果新到达的采样数据包是最新的,控制器正常工作产生控制信号发送到执行器,否则控制器不工作处于空闲状态。b) 对控制数据包乱序的补偿:同样地,在执行器端设置缓冲器存储上一次被利用的控制数据包的时间标签和控制信号,再经过比较器的比较,如果新到达的控制数据包是最新的,缓冲器进行更新,否则保持不变。上述补偿控制方法用算法说明主要有以下几步:

a) 传感器对被控对象的输出进行采样。

b) 设置在传感器端的时间戳标签器对采样数据包添加时间标签并发送到控制器。

c) 在控制器端的比较器判断接收到的采样数据包是否是最新的,如果是,更新缓冲器里的数据,否则不变。

d) 如果控制器端的缓冲器里的数据被更新了,控制器立即处理并计算出控制信号,时间标签器对其添加上时间标签,并以控制数据包的形式发送到执行器。

e) 在执行器端的比较器判断接收到的控制数据包是否是最新的,如果是,更新缓冲器里的数据,否则不变。这一步跟第 c) 步的功能一样。

f) 由于在执行器端缓冲器里的控制信号总是最新的,执行器直接将这最新信号用于被控对象。

网络控制系统的数据包乱序补偿控制结构如图 3 所示。

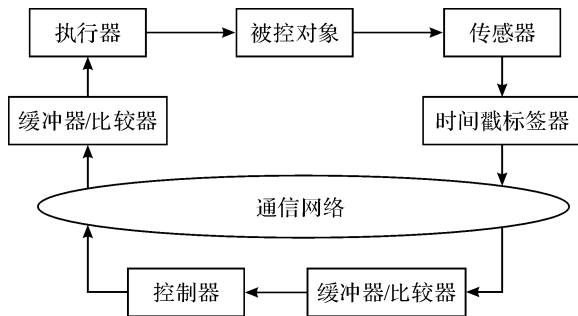


图 3 网络控制系统的数据包乱序补偿控制结构

从图 3 中可以看出,本文对数据包乱序的补偿控制方法主要是在系统中加入额外的控制节点而不影响如传感器、控制器、执行器这些基本的控制节点,所以以前对系统的分析设计方法在这里同样适用。当执行器在 k 时刻时,如果新到达的控制数据包的时间标签是 k_s^1 ,储存在执行器端缓冲器里的数

据的时间标签是 k_s^2 ,实际被利用的控制信号为 k_s^* ,根据上面的补偿控制方法,三者关系为:

$$k_s^* = \begin{cases} k_s^1, k_s^1 > k_s^2 \\ k_s^2, k_s^1 \leq k_s^2 \end{cases} \quad (1)$$

所以控制数据包相应的往返时延为:

$$\tau_k^* = k - k_s^* \quad (2)$$

很容易发现,利用补偿控制方法,只有最新的控制信号才能被用于被控对象,因此数据包乱序对系统的不利影响可以被有效地消除。

2 系统建模与稳定性分析

考虑如下线性时不变系统:

$$\dot{x}(t) = A_p x(t) + B_p u(t) \quad (3)$$

其中: $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 表示被控系统的状态向量; $u(t) \in \mathbf{R}^m$ 表示控制输入; A_p 和 B_p 为给定的具有适当维数的常数矩阵。采用离散化方法,式(3)的离散化系统模型可表示为:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (4)$$

其中: $A = e^{A_p h}$, $B = \int_0^h e^{A_p \theta} B_p d\theta$, h 为传感器端数据的采样周期。

假定被控系统的状态都是可观测的,则可以使用闭环状态反馈控制器:

$$u(k) = Kx(k) \quad (5)$$

其中: K 为状态反馈增益。根据式(1)、(2)和(5)可得:

$$u(k) = Kx(k - \tau_k^*), \quad k \geq 1 \quad (6)$$

由式(1)和式(2)可知,由于利用了补偿控制方法,系统的状态 $x(k - \tau_k^*)$ 用于计算出的控制信号总保持最新。

定义一个新的状态变量 $z(k) = [x^T(k), x^T(k-1), \dots, x^T(k-\tau)]^T$, $z(k) \in \mathbf{R}^{(\tau+1)n}$, 其中 τ 为往返时延的上界,于是式(4)可写成如下增广形式:

$$z(k+1) = \Phi(\tau_k^*) z(k) \quad (7)$$

其中:

$$\Phi(\tau_k^*) = \begin{pmatrix} A & \cdots & BK & \cdots & \cdots \\ \mathbf{I}_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \mathbf{I}_n & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{I}_n & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

\mathbf{I}_n 为秩是 n 的单位矩阵。

考虑到网络诱导时延 τ_k^* 的特性,先引进一组往返时延序列 $\{\tau_k; k = 0, 1, \dots\}$, 此序列包含所有依次发送的采样数据包的时间标签,不管这些数据包是

否丢失、乱序等。显然实际用于被控对象的控制信号的往返时延序列 $\{\tau_k^*; k = 0, 1, \dots\}$ 是 $\{\tau_k; k = 0, 1, \dots\}$ 的子集, 即 $\{\tau_k^*; k = 0, 1, \dots\} \subset \{\tau_k; k = 0, 1, \dots\}$ 。类似以往的方法^[13], 将 $\{\tau_k; k = 0, 1, \dots\}$ 建模成一条时齐马尔科夫链, 在有限状态空间集 $\mathbf{M} = \{0, 1, 2, \dots, \tau, \infty\}$ 中取值, 其中 $\tau_k = \infty$ 表示在传感器到控制器通道或控制器到执行器通道中至少有一个通道发生了数据包丢失。其状态转移概率矩阵为 $\Pi = [\pi_{ij}]$, π_{ij} 表示 τ_k 从模态 i 跳转到模态 j 的概率,

$$\pi_{ij} = Pr\{\tau_{k+1} = j \mid \tau_k = i\}, \forall i, j \in \mathbf{M} \quad (9)$$

其中: $\pi_{ij} \geq 0$, 对所有的 $i, j \in \mathbf{M}$ 有

$$\sum_{j \in \mathbf{M}} \pi_{ij} = 1, \forall i \in \mathbf{M} \quad (10)$$

对于 $\{\tau_k; k = 0, 1, \dots\}$ 初始分布:

$$P_i = Pr\{\tau_0 = i\}, i \in \mathbf{M} \quad (11)$$

因为 $\{\tau_k; k = 0, 1, \dots\}$ 是时齐马尔科夫链, 又因为 $\{\tau_k^*; k = 0, 1, \dots\} \subset \{\tau_k; k = 0, 1, \dots\}$, 根据引理 1 和引理 2 可知, $\{\tau_k^*; k = 0, 1, \dots\}$ 也是一条马尔科夫链。

引理 1^[14] 对于一个有任意初始分布的时齐遍历马尔科夫链 $\{\tau_k; k = 0, 1, \dots\}$, 其转移概率极限分布 $\rho = \{\rho_i; \rho_i > 0, i \in \mathbf{M}\}$ 存在的条件是对于任意模态 $j \in \mathbf{M}$ 都有

$$\sum_{i \in \mathbf{M}} \pi_{ij} \rho_i = \rho_j, \sum_{i \in \mathbf{M}} \rho_i = 1 \quad (12)$$

$$|\rho_i(k) - \rho_i| \leq \mu \omega^k \quad (13)$$

其中: $\mu \geq 0, 0 < \omega < 1$ 。

引理 2 $\{\tau_k^*; k = 0, 1, \dots\}$ 是一条非齐次马尔科夫链, 其状态空间为 $\mathbf{M}^* = \{0, 1, 2, \dots, \tau\}$, 状态转移概率矩阵为 $\Pi^*(k) = [\pi_{ij}^*(k)]$, 定义成:

$$\pi_{ij}^*(k) = \begin{cases} \frac{\sum_{\ell 1 \in \mathbf{M}, \ell 1 \geq i} \rho_{\ell 1}(k) \pi_{\ell 1 j}}{\sum_{\ell 1 \in \mathbf{M}, \ell 1 \geq i} \rho_{\ell 1}(k)}, & j \leq i \\ \frac{\sum_{\ell 1 \in \mathbf{M}, \ell 1 \geq i, \ell 2 \in \mathbf{M}, \ell 2 > i} \rho_{\ell 1}(k) \pi_{\ell 1 \ell 2}}{\sum_{\ell 1 \in \mathbf{M}, \ell 1 \geq i} \rho_{\ell 1}(k)}, & j = i + 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (14)$$

其中: $\rho_j(k) = \sum_{i \in \mathbf{M}} P_i \pi_{ij}^{(k)}, \pi_{ij}^{(k)}$ 表示 τ_k 从模态 i 跳转到模态 j 的 k 步转移概率。 $\Pi^* = \{\pi_{ij}^*; i, j \in \mathbf{M}\}$ 转移概率极限分布存在的条件是存在一个足够大的正整数 N , 同时满足 $\mu^* > 0, 0 < \omega < 1$, 使得不等式(15)成立:

$$|\pi_{ij}^*(k) - \pi_{ij}^*| \leq \mu^* \omega^k, k > N \quad (15)$$

证明: 由式(1)、(2)可知, $\{\tau_k^* = i\} \in \varphi(\tau_k, \tau_{k-1}, \tau_{k-2}, \dots, \tau_1, \tau_0)$, 因此 τ_k 是以马尔科夫链分布变化时, τ_k^* 同样是一条马尔科夫链。显然 τ_k^* 不可能是

∞ , 其状态空间是 $\mathbf{M}^* = \{0, 1, 2, \dots, \tau\}$ 且 $\{\tau_k^* = i\} = \{\tau_{k-1}^* = i-1, \tau_k > i-1\} \cup \{\tau_{k-1}^* \geq i, \tau_k = i\}$, 得到:

$$\text{当 } j \leq i \text{ 时, } Pr\{\tau_{k+1}^* = j \mid \tau_k^* = i\} = Pr\{\tau_{k+1} = j \mid \tau_k^* = i\} = Pr\{\tau_{k+1} = j \mid \tau_k \geq i\} = \frac{\sum_{\ell 1 \in \mathbf{M}, \ell 1 \geq i} \rho_{\ell 1}(k) \pi_{\ell 1 j}}{\sum_{\ell 1 \in \mathbf{M}, \ell 1 \geq i} \rho_{\ell 1}(k)};$$

$$\text{当 } j = i+1 \text{ 时, } Pr\{\tau_{k+1}^* = j \mid \tau_k^* = i\} = Pr\{\tau_{k+1} > i \mid \tau_k^* = i\} = Pr\{\tau_{k+1} > i \mid \tau_k \geq i\} = \frac{\sum_{\ell 1 \in \mathbf{M}, \ell 1 \geq i, \ell 2 \in \mathbf{M}, \ell 2 > i} \rho_{\ell 1}(k) \pi_{\ell 1 \ell 2}}{\sum_{\ell 1 \in \mathbf{M}, \ell 1 \geq i} \rho_{\ell 1}(k)};$$

其他情况都为 0。

所以 $\{\tau_k^*; k = 0, 1, \dots\}$ 的转移概率矩阵式(14)得证。

再根据式(14)和引理 1 容易得到式(15)。

要给出系统(7)的稳定性分析先引出系统的随机稳定性概念, 下面给出其定义。

定义 1^[15] 给定增广系统式(7)和式(8), 对于系统的任意初始状态 $z_0 = z(0)$, 初始模态 $\tau_0 = \tau(0) \in \mathbf{M}$, 如果存在一个正定矩阵 $W > 0$, 使得不等式(16)成立,

$$E\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \|z(k)\|^2 \mid z_0, \tau_0\right\} < z_0^T W z_0 \quad (16)$$

则系统是随机稳定的。

定理 1 如果闭环系统(7)是随机稳定的, 当且仅当存在 $P(i) > 0, i \in \mathbf{M}^*$, 使得下列不等式成立,

$$L(i) = \sum_{j \in \mathbf{M}^*} \pi_{ij}^* \Phi^T(j) P(j) \Phi(j) - P(i) < 0, i \in \mathbf{M}^* \quad (17)$$

证明:

充分性。

选取一个二次型函数如下形式:

$$V(z(k), k) = z^T(k) P(\tau_k^*) z(k) \quad (18)$$

通过式(15)和式(17)可知当存在足够大的正整数 N_1 且 $k > N_1$ 时, 可以得到

$$\begin{aligned} E\{\Delta V(z(k), k)\} &= E\{z^T(k+1) P(\tau_k^*) z(k+1) \mid z(k), \tau_k^* = j\} - z^T(k) P(i) z(k) = \\ &= \sum_{j \in \mathbf{M}^*} [\pi_{ij}^*(k+1) (z(k) \Phi(j))^T P(j) \Phi(j) z(k)] - z^T(k) P(i) z(k) \\ &= z^T(k) \left[\sum_{j \in \mathbf{M}^*} \pi_{ij}^*(k+1) \Phi^T(j) P(j) \Phi(j) - P(i) \right] z(k) \\ &\leq z^T(k) \sum_{j \in \mathbf{M}^*} |\pi_{ij}^*(k+1) - \pi_{ij}^*| \Phi^T(j) P(j) \Phi(j) z(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + z^T(k) \left[\sum_{j \in \mathbf{M}^*} \pi_{ij}^* \Phi^T(j) P(j) \Phi(j) - P(i) \right] z(k) \\
& \leq \mu^* \omega^{k+1} z^T(k) \sum_{j \in \mathbf{M}^*} \Phi^T(j) P(j) \Phi(j) z(k) - \sigma \|z(k)\|^2 \\
& \leq (\gamma \mu^* \omega^{k+1} - \sigma) \|z(k)\|^2
\end{aligned}$$

其中: $\gamma = \sup\{\lambda_{\max}(\Phi^T(j)P(j)\Phi(j)); j \in \mathbf{M}^*\} > 0$, $\sigma = \inf\{\lambda_{\min}(-L(i)); i \in \mathbf{M}^*\} > 0$ 。令 $N_2 = \inf\{\chi; \chi > \max\{N_1, \log_{\omega} \frac{\sigma}{\gamma \mu^*} - 1\}, \chi \in \mathbf{N}^+\}$, 对于任意 $k \geq N_2$, 都能得到

$$E\{\Delta V(z(k), k)\} \leq -\sigma^* \|z(k)\|^2 \quad (19)$$

其中: $\sigma^* = \sigma - \gamma \mu^* \omega^{N_2+1} > 0$ 。从 N_2 到 $N(N > N_2)$ 求和, 可以得到

$$\begin{aligned}
& E\{V(z(N+1), N+1)\} - E\{V(z_0, N_2)\} \leq \\
& -\sigma^* E\left\{\sum_{k=N_2}^N \|z(k)\|^2\right\}
\end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned}
& E\left\{\sum_{k=N_2}^N \|z(k)\|^2\right\} \leq \frac{1}{\sigma^*} (E\{V(z(N_2), N_2)\} - \\
& E\{V(z(N+1), N+1)\}) \leq \\
& \frac{1}{\sigma^*} E\{V(z(N_2), N_2)\}
\end{aligned}$$

于是可知,

$$\begin{aligned}
& E\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \|z(k)\|^2\right\} \leq \frac{1}{\sigma^*} E\{V(z(N_2), N_2)\} + \\
& E\left\{\sum_{k=0}^{N_2-1} \|z(k)\|^2\right\} \quad (20)
\end{aligned}$$

根据定义1可知, 闭环系统(7)是随机稳定的。充分性得证。

必要性。

首先假设闭环系统(7)是随机稳定的, 显然可以得到

$$E\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \|z(k)\|^2 \mid z_0, \tau_0\right\} < z_0^T W z_0 \quad (21)$$

定义以下函数:

$$\begin{aligned}
& z^T(n) \hat{P}(N-n, \tau_n^*) z(n) \triangleq \\
& E\left\{\sum_{k=n}^N z^T(k) \xi(\tau_k^*) z(k) \mid z_n, \tau_n^*\right\} \quad (22)
\end{aligned}$$

其中: $\xi(\tau_k^*)$ 是正定的, 即 $\xi(\tau_k^*) > 0$ 。假设 $z(k) \neq 0$, 由于 $\xi(\tau_k^*) > 0$, 所以当 N 增加时, 函数 $z^T(n) \hat{P}(N-n, \tau_n^*) z(n)$ 也随着单调增加直到

$$E\{z^T(k) \xi(\tau_k^*) z(k) \mid z_n, \tau_n^*\} = 0, \forall k \geq N \geq n$$

从式(21)可知函数 $z^T(n) \hat{P}(N-n, \tau_n^*) z(n)$ 是有上界的, 其极限值表示为

$$\begin{aligned}
& z^T(n) P(i) z(n) \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} z^T(n) \hat{P}(N-n, \tau_n^* = i) z(n) = \\
& \lim_{N \rightarrow \infty} E\left\{\sum_{k=n}^N z^T(k) \xi(\tau_k^*) z(k) \mid z_n, \tau_n^* = i\right\} \quad (23)
\end{aligned}$$

由于对于任意 $z(n)$ 都成立, 于是可以得到

$$P(i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \hat{P}(N-n, \tau_n^* = i) \quad (24)$$

从式(23)可知, 由于 $\xi(\tau_k^*) > 0$, 所以 $P(i) > 0$ 。考虑到

$$\begin{aligned}
& E\{z^T(n) \hat{P}(N-n, \tau_n^*) z(n) - z^T(n+1) \hat{P}(N- \\
& n-1, \tau_{n+1}^*) z(n+1) \mid z(n), \tau_n^* = i\} = \\
& z^T(n) \xi(i) z(n) \quad (25)
\end{aligned}$$

又因为 $E\{z^T(n+1) \hat{P}(N-n-1, \tau_{n+1}^*) z(n+1) \mid z(n), \tau_n^* = i\} = z^T(n) \sum_{j \in \mathbf{M}^*} \pi_{ij}^* (n+1) \Phi^T(j) \hat{P}(N-n-1, j) \Phi(j) z(n)$

所以有 $z^T(n) \left[\hat{P}(N-n, i) - \sum_{j \in \mathbf{M}^*} \pi_{ij}^* (n+1) \Phi^T(j) \hat{P}(N-n-1, j) \Phi(j) \right] z(n) = z^T(n) \xi(i) z(n)$

根据式(25)可知, 对于任意 $z(n)$ 都成立, 可以得到

$$\begin{aligned}
& \hat{P}(N-n, i) - \sum_{j \in \mathbf{M}^*} \pi_{ij}^* (n+1) \Phi^T(j) \\
& \hat{P}(N-n-1, j) \Phi(j) = \xi(i) > 0 \quad (26)
\end{aligned}$$

当 $N \rightarrow \infty$ 时, 对所有的 n 都存在

$$\begin{aligned}
& P(i) - \sum_{j \in \mathbf{M}^*} \pi_{ij}^* (n+1) \Phi^T(j) P(j) \Phi(j) > 0 \\
& \quad (27)
\end{aligned}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有式(28)成立

$$P(i) - \sum_{j \in \mathbf{M}^*} \pi_{ij}^* \Phi^T(j) P(j) \Phi(j) > 0 \quad (28)$$

结合式(26)-(28)可得 $L(i) = \sum_{j \in \mathbf{M}^*} \pi_{ij}^* \Phi^T(j) P(j) \Phi(j) - P(i) < 0$ 。必要性得证。

证毕。

3 控制器设计

定理1给出了闭环系统(7)状态反馈增益 K 存在的充分必要条件, 但是条件(17)是以非线性的形式给出的, 难以直接求解, 所以对定理1中给出的稳定性条件先定义 $\Omega(i) = P(i)^{-1}$, 再运用 Schur 补引理容易得到定理2。

定理2 若存在 $P(i) > 0, \Omega(i) > 0, i \in \mathbf{M}^*$ 和状态反馈增益 $K \in \mathbf{R}^{m \times n}$, 使得下列线性矩阵不等式(LMIs)成立,

$$\begin{pmatrix} -P(i) & \Theta(i) \\ * & -\xi \end{pmatrix} < 0, i \in \mathbf{M}^* \quad (29)$$

$$P(i) \Omega(i) = \mathbf{I} \quad (30)$$

其中: $\Theta(i) = [(\pi_{i0}^*)^{1/2} \Phi^T(0), \dots, (\pi_{i\tau}^*)^{1/2} \Phi^T(\tau)]$, $\xi = \text{diag}\{\Omega(0), \dots, \Omega(\tau)\}$, 则控制器(5)使得闭环网络控制系统(7)随机稳定。

证明:定理2的条件实际上是一组具有逆约束的线性矩阵不等式,虽然它们具有非凸性,但可以通过迭代线性矩阵不等式方法即锥补线性化(CCL)算法^[16-18]求解出增益矩阵 K ,将原问题转化为具有线性矩阵不等式限制的凸优化问题:

$$\min \left\{ \text{tr} \left[\sum_{j=0}^{\tau} P(i) \Omega(i) \right] \right\} \quad (31)$$

并且满足下列矩阵不等式:

$$\begin{pmatrix} P(i) & \mathbf{I} \\ * & \Omega(i) \end{pmatrix} \geq 0 \quad (32)$$

锥补线性化算法如下:

Step 1: 寻找一组矩阵变量满足式(29)、(32)的可行解 $(P(i), \Omega(i), K)^0$, 记为 $k = 0$ 。

Step 2: 求解如下最优化问题:

$$\min \left\{ \text{tr} \left[\sum_{j=0}^{\tau} (P^k(i) \Omega(i) + P(i) \Omega^k(i)) \right] \right\}, \text{ 并且满足}$$

下列矩阵不等式

$$\begin{pmatrix} -P(i) & \Theta(i) \\ * & -\xi \end{pmatrix} < 0, i \in \mathbf{M}^*,$$

$$\begin{pmatrix} P(i) & \mathbf{I} \\ * & \Omega(i) \end{pmatrix} \geq 0.$$

求出的最优解记为 $(P(i), \Omega(i), K)^{k+1}$ 。

Step 3: 将 $(P(i), \Omega(i), K)^{k+1}$ 代入式(29)后若有解,表明条件(29)、(32)都满足,那么输出可行解 $(P(i), \Omega(i), K)$, 并退出。

Step 4: 如果 $k > N$, N 为指定的最大的迭代次数,退出。

Step 5: 否则令 $k = k + 1$, $(P(i), \Omega(i), K)^{k+1} = (P(i), \Omega(i), K)$, 回到 Step 2 继续执行。

4 数值仿真

例 1: 考虑如下线性时不变连续系统:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 17.3 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \end{pmatrix} u(t).$$

假设传感器端数据的采样周期为 $h = 0.03$ s, 采用离散化方法,则离散化系统模型可表示为:

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 1.0078 & 0.0301 \\ 0.5202 & 1.0078 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} -0.0001 \\ -0.0053 \end{pmatrix} u(k),$$

由于系统矩阵的特征值分别为 1.1329、0.8827, 因此离散系统是不稳定的,但是系统是可控的。假设

往返时延的上界 $\tau = 8$, 则时变的往返时延分布如图4所示。

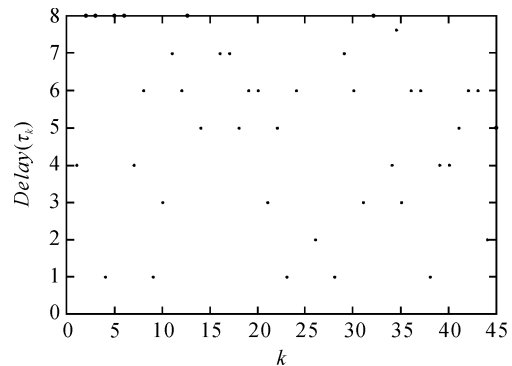


图4 时变的往返时延分布

利用定理2中的锥补线性化算法可得系统的状态反馈增益为 $K = [102.9100 \quad 80.7916]$, 通过对数据包乱序的补偿控制可知,被用于被控对象的控制信号总是最新的,而不利用“旧”的信号。从图5所示数据包乱序有无补偿控制的状态响应图的比较可以看出该补偿控制方法有效。

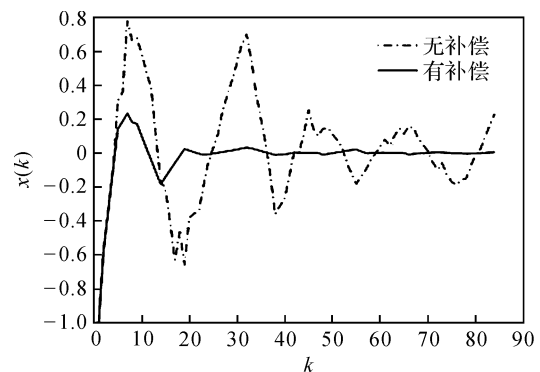


图5 数据包乱序有无补偿控制的状态响应的比较

例 2: 考虑如下线性时不变连续系统:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 9.8 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0.67 \end{pmatrix} u(t).$$

假设传感器端数据的采样周期为 $h = 0.1$ s, 采用离散化方法,则离散化系统模型可表示为:

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.1000 & -0.0166 & -0.0005 \\ 0 & 1.0000 & -0.3374 & -0.0166 \\ 0 & 0 & 1.0996 & 0.1033 \\ 0 & 0 & 2.0247 & 1.0996 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0.0045 \\ 0.0896 \\ -0.0068 \\ -0.1377 \end{pmatrix} u(k).$$

由于系统矩阵的特征值分别为 1.0000、1.0000、1.5569、0.6423,因此离散系统是不稳定的,但是系统是可控的。此例中假设往返时延的上界为 $\tau = 4$,则往返时延的取值集合为 $\mathbf{M} = \{0, 1, 2, 3, 4, \infty\}$,其转移概率矩阵为

$$\pi_{ij} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.24 & 0.06 & 0.48 & 0.12 & 0.1 & 0 \\ 0.15 & 0.25 & 0.3 & 0.15 & 0.1 & 0.05 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.15 & 0.15 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}.$$

根据引理 2 可知,考虑到数据包乱序的存在, π_{ij}^* 也是一条 Markov 链,可以得到:

$$\pi_{ij}^* = \begin{pmatrix} 0.1982 & 0.8018 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2224 & 0.1767 & 0.6008 & 0 & 0 \\ 0.2290 & 0.1699 & 0.3612 & 0.2398 & 0 \\ 0.2186 & 0.2729 & 0.2501 & 0.1313 & 0.1271 \\ 0.3000 & 0.3000 & 0.1909 & 0.1091 & 0.1000 \end{pmatrix}.$$

利用定理 2 中的锥补线性化算法可得系统的状态反馈增益 $K = [0.0173, 0.1593, 15.9568, 5.2069]$,从图 6 所示可以看出,对数据包乱序进行补偿控制并设计相应的控制器可以使得闭环系统随机稳定。

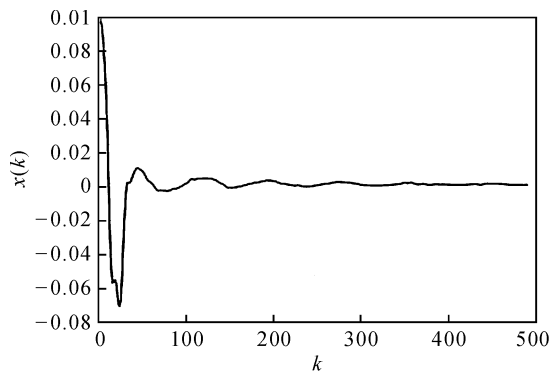


图6 数据包乱序补偿控制下的状态响应

5 结论

本文主要对一类网络控制系统中由于时变的网络诱导时延引起的数据包乱序问题作了研究,并提出一种有效的补偿控制方法来消除数据包乱序对系统的影响。文中利用时间戳方法和设置了比较器,两者结合来判断数据包是否发生时序错乱,这使得用于被控对象的控制信号都是最新的,以保证系统的实时性,最后闭环系统被建模成一个 Markov 跳变系统。运用 Lyapunov 稳定性理论得到了系统随机稳定的充要条件,此条件用一组具有逆约束的线性矩阵不等式(LMIs)表示,利用锥补线性化算法

(CCL)将状态反馈控制器增益的求解问题转化成具有线性矩阵不等式限制的凸优化问题。后续研究将协同考虑通信和控制,这也是将来研究网络控制系统的一个重要方向。

参考文献:

- [1] HESPANHA J P, NAGHSHTABRIZI P, XU Y. A survey of recent results in networked control systems[J]. Proceedings of the IEEE, 2007, 95(1): 138-162.
- [2] ISHIDO Y, TAKABA K, QUEVEDO D E. Stability analysis of networked control systems subject to packet-dropouts and finite-level quantization [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 59(5): 194-198.
- [3] XIA Y Q, GAO Y L, YAN L P, et al. Recent progress in networked control systems: A survey [J]. International Journal of Automation and Computing, 2015, 12(4): 343-367.
- [4] HU S L, YUE D. Event-triggered control design of linear networked systems with quantizations [J]. ISA Transactions, 2012, 51(1): 153-162.
- [5] LI H B, YANG H J, SUN F C, et al. A network-bound-dependent stabilization method of networked control systems [J]. Automatica, 2013, 49(8): 2561-2566.
- [6] KIM D S, LEE Y S, KWON W H, et al. Maximum allowable delay bounds of networked control systems [J]. Control Engineering Practice, 2003, 11(11): 1301-1313.
- [7] XU Y, SU H Y, PAN Y J, et al. Stability analysis of networked control systems with round-robin scheduling and packet dropouts [J]. Journal of the Franklin Institute, 2013, 350(8): 2013-2027.
- [8] YUE D, HAN Q L, JAMES L. Network-based robust H_∞ control of systems with uncertainty [J]. Automatica, 2005, 41(6): 999-1007.
- [9] ZHAO Y B, KIM J, LIU G P, et al. Compensation and stochastic modeling of discrete-time networked control systems with data packet disorder [J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2012, 10(5): 1055-1063.
- [10] LI J N, YU H B, ZHANG Q L, et al. H_∞ control of networked control systems with packet disordering [J]. Iet Control Theory and Applications, 2009, 3(11): 1463-1475.
- [11] LIU A D, ZHANG W A, YU L, et al. New results on stabilization of networked control systems with packet disordering [J]. Automatica, 2015, 52(C): 255-259.

- [12] CHEN H F, GAO J F, SHI T, et al. H_∞ control for networked control systems with time delay, data packet dropout and disorder [J]. *Neurocomputing*, 2016, 179(8): 211-218.
- [13] XIONG J L, JAMES L. Stabilization of linear systems over networks with bounded packet loss [J]. *Automatica*, 2007, 43(1): 80-87.
- [14] PATRICK B. *Probability and Measure* [M]. 3rd ed. New York: Wiley-Interscience, 1995: 116-123.
- [15] WU J, CHEN T W, XU S Y. Stochastic stabilization and H_∞ control for discrete jumping systems with time delays[J]. *Asian Journal of Control*, 2005, 7(3): 223-230.
- [16] ZHANG L Q, HUANG B, JAMES L. H_∞ model reduction of Markovian jump linear systems [J]. *Systems & Control Letters*, 2003, 50(2): 103-118.
- [17] ZHANG L, SHI Y, TIAN C, et al. A new method for stabilization of networked control systems with random delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(8): 1177-1181.
- [18] OLIVEIRA M C D, GEROMEL J C. Numerical comparison of output feedback design methods [C]// *Proceedings of the American Control Conference*, Albuquerque, New Mexico, 1997: 72-76.

Compensate Control for a Class of Networked Control Systems with Packet Disordering

CHEN Jun, ZHENG Mengna, GAO Jinfeng

(Institute of Automation, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: This paper is concerned with the problem of packet disordering in a class of networked control systems. By proposing a compensation control method to eliminate the adverse effect of packet disordering on the system. First of all, utilizing the time-stamp method to label the time sequence of the data packets sent from the source node, and set a comparator in the controller and actuator side separately, the combination of above is determine whether the data packet is disorder, if the occurrence of confusion on the corresponding data processing, as a result, the close-loop system is modeled as a Markov jump system. By using the Lyapunov stability theory to obtain the necessary and sufficient conditions for the stochastic stability of system. This condition is described by a set of linear matrix inequalities(LMIs) with inverse constraints. Finally, the problem of controller design is converted into linear matrix inequality convex optimization problem, and cone complementary linearization(CCL) algorithm is applied to obtain the state feedback controller gain. Finally, a numerical example is given to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: networked control systems(NCSs); packet disordering; compensate control; Markov jump systems; cone complementary linearization

(责任编辑: 康 锋)