

最大熵方法在计算二维不变测度中的应用

张茹,徐春伟,靳聪明

(浙江理工大学理学院,杭州 310018)

摘 要:在最大熵方法中采用三角单元上的分片线性基函数作为矩函数,用于二维映射的不变测度计算。有限元单元上分片线性基函数有局部支集和单位分割性质,因此最大熵方法得到的非线性方程组的 Jacobi 矩阵是正定的带状矩阵,保证了非线性方程组解的唯一性和稳定性。文中从理论上给出该方法的收敛阶,并且数值实验结果与理论一致。

关键词:有限元单元;不变测度;分片线性基函数;最大熵

中图分类号: O242.21

文献标志码: A

文章编号: 1673-3851 (2017) 04-0569-06

0 引言

很多科学和工程问题,都可以归纳为对离散动力系统渐近性质的研究。例如在分子动力学模拟^[1]中可得到每个原子任意时刻的位置和速度,但原子的运动轨迹和速度是杂乱无章的,只有通过统计平均才能有效预测分子的温度、压力等热力学性质和结构性质。映射的不变测度^[2]反映了动力系统的统计性质,因此对映射不变测度的研究非常重要。

假设映射 S 具有绝对连续不变测度,它的密度函数是映射 S 对应的 Frobenius-Perron 算子的不动点。关于不变密度的计算,Ulam^[3] 首先提出了分片常数逼近法,Ding 等^[4] 提出了分片线性 Markov 方法,Boyarsky 等^[5] 利用 Markov 变化将不变密度问题等价为一个矩阵特征值问题。最大熵方法由 Jaynes^[6] 首先提出,已广泛应用于物理、化学、生物等领域,如一维映射的不变测度计算^[7-8]、物种分布分析^[9]、Fredholm 积分方程求解^[10-11]、化学反应能量依赖关系分析^[12]、图像处理^[13-14]、光谱分析^[15] 等。在传统的最大熵方法中,用标准单项基底 $1, x, x^2, \dots, x^n$ 作为矩函数,会产生病态非线性方程组。近年来,对一维映射的不变测度计算,Ding 等^[8] 提

出了基于分片线性基函数的最大熵方法。这种方法克服了产生病态方程组的缺陷,理论和数值结果表明该方法收敛。

高维映射的不变测度可用于研究分子构象变化^[1] 等问题。本文基于有限元方法中的三角元上的分片线性基函数,用最大熵方法计算二维映射的不变测度。分片线性基函数满足单位分割性质和支集性质,因此由最大熵方法得到的非线性方程组的 Jacobi 矩阵是正定的带状矩阵。该方法简化了非线性方程组的计算,保证了解的唯一性和稳定性。

1 基于分片线性基函数的最大熵方法

1.1 不变测度及最大熵原理

定义 1^[16] 设 (X, Σ, μ) 是一个有限测度空间,可测映射 $S: X \rightarrow X$ 为非奇异变换,即由 $\mu(S^{-1}(B)) = 0$, 有 $\mu(B) = 0$ 。若对于所有的 $B \in \Sigma$, 有 $\mu(S^{-1}(B)) = \mu(B)$, 则 μ 是 S 的不变测度。

定义 2^[16] 令 (X, Σ, μ) 为一个测度空间,可测变换 $S: X \rightarrow X$ 是非奇异变换。由公式

$$\int_A P_S f d\mu = \int_{S^{-1}(A)} f d\mu, \forall A \in \Sigma, \forall f \in L^1(X),$$

收稿日期: 2016-11-14 网络出版日期: 2017-03-28

基金项目: 国家自然科学基金项目(11571314); 浙江省自然科学基金项目(LY13A010014); 浙江理工大学 521 人才培养计划项目

作者简介: 张茹(1990-), 女, 河北石家庄人, 硕士研究生, 主要从事动力系统和分子模拟等方面的研究。

通信作者: 靳聪明, E-mail: jincm@lsec.cc.ac.cn

定义的算子 $P_S: L^1(\mathbf{X}) \rightarrow L^1(\mathbf{X})$ 称为对应于 S 的 Frobenius-Perron(F-P) 算子。

定理 1^[16] 令 P_S 是可测变换 S 的 F-P 算子, 并且 $f \in L^1$. 则对于绝对连续有限测度

$$\mu_{f^*}(A) = \int_A f^* d\mu, \forall A \in \Sigma,$$

在 S 下不变, 当且仅当 f^* 是 P_S 的一个不动点。

定义 3 设 $f(x)$ 是 \mathbf{X} 上的密度函数, 即 $\int_{\mathbf{X}} f(x) dx = 1$, 函数 $f(x)$ 的玻尔兹曼熵定义为:

$$H(f) = - \int_{\mathbf{X}} f(x) \ln f(x) dx \quad (1)$$

其中, 当 $f(x) = 0$ 时, 有 $f \ln f = 0$ 。

对于密度函数 $f(x)$, 若矩

$$m_i = \int_{\mathbf{X}} f(x) g_i(x) dx, i = 1, \dots, n \quad (2)$$

已知 $g_i (i = 1, \dots, n)$ 是矩函数, 密度函数 $f(x)$ 的解并不唯一。考虑如下约束优化问题:

$$\begin{aligned} \max \{ H(f) : f \in D, \int_{\mathbf{X}} f(x) g_i(x) dx = m_i, \\ i = 1, \dots, n \} \end{aligned} \quad (3)$$

其中, $D = \{ f : f \geq 0, \int_{\mathbf{X}} f(x) dx = 1 \}$ 是 \mathbf{X} 上所有密度函数的集合。最大熵问题(3)的解是密度函数的极大似然估计。

命题 1^[16] 约束优化问题(3)的解为:

$$f_n(x) = \frac{\exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x)\right)}{\int_{\mathbf{X}} \exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x)\right) dx} \quad (4)$$

其中, $\lambda_i (i = 1, \dots, n)$ 满足

$$\frac{\int_{\mathbf{X}} g_i(x) \exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x)\right) dx}{\int_{\mathbf{X}} \exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x)\right) dx} = m_i \quad (5)$$

1.2 二维映射不变测度的计算

Ding 等^[8] 将最大熵方法用于一维映射的不变测度计算, 本文把该方法推广到二维映射。为了记号简单, 考虑集合 $\mathbf{X} = [0, 1] \times [0, 1]$ 和映射 $S: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$, 映射 S 的不变测度为 f^* 。将集合 \mathbf{X} 剖分成 $2n^2$ 个直角边为 $h = \frac{1}{n}$ 的等腰直角三角形, 如图 1。对每个 $i, j = 0, 1, \dots, n$, 令 $\varphi_{i,j}(x, y)$ 是片线性连续函数, 且 $\varphi_{i,j}(x_i, y_j) = 1, \varphi_{i,j}(x_l, y_m) = 0 (l \neq i \text{ 或者 } m \neq j)$ 。则对应顶点 $(x_i, y_i), (x_i, y_{j+1}), (x_{i+1}, y_j)$ 的基函数为:

$$\begin{cases} \varphi_{i+1,j}(x, y) = w\left(\frac{x - x_i}{h}\right) \\ \varphi_{i,j+1}(x, y) = w\left(\frac{y - y_i}{h}\right), \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, n, \\ \varphi_{i,j}(x, y) = 1 - w\left(\frac{x - x_i}{h}\right) - w\left(\frac{y - y_i}{h}\right) \end{cases}$$

其中,

$$w(x) = \begin{cases} 1 + x, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

对任意 $(x, y) \in \mathbf{X}$, 基函数 $\{\varphi_{i,j}(x, y)\}$ 满足单位分割性质, 即:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \varphi_{i,j}(x, y) \equiv 1 \quad (6)$$

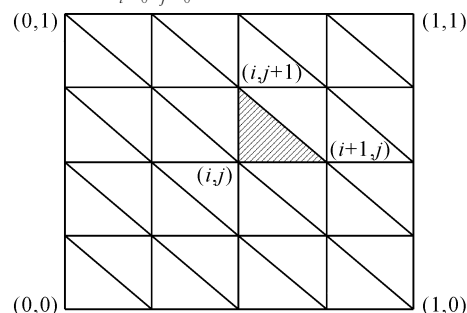


图 1 \mathbf{X} 的三角剖分

在最大熵方法中, 选择 $\varphi_{i,j}(x, y), (i, j = 0, 1, \dots, n)$ 为矩函数, 则矩为

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \iint_{\mathbf{X}} f^*(x, y) \varphi_{i,j}(x, y) dx dy \\ &= \iint_{\text{supp} \varphi_{i,j}(x, y)} f^*(x, y) \varphi_{i,j}(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (7)$$

其中, $\text{supp} \varphi_{i,j} = \{(x, y) | \varphi_{i,j}(x, y) \neq 0\}$ 是 $\varphi_{i,j}(x, y)$ 的支集。由式(6)及 $\iint_{\mathbf{X}} f^*(x, y) dx dy = 1$ 可得:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n m_{ij} = 1 \quad (8)$$

由式(8)可得命题 2。

命题 2 若 $f \in L^1(\mathbf{X})$ 是一个非负函数, 且满足

$$\iint_{\mathbf{X}} f(x, y) \varphi_{i,j}(x, y) dx dy = m_{ij}, i, j = 0, 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

则 f 是概率密度, 即 $\iint_{\mathbf{X}} f(x, y) dx dy = 1$ 。

证明: 由式(6)和式(8)知,

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \iint_{\mathbf{X}} f(x, y) \varphi_{i,j}(x, y) dx dy \\ &= \iint_{\mathbf{X}} f(x, y) dx dy \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \varphi_{i,j}(x, y) dx dy \end{aligned}$$

$$= \iint_X f(x, y) dx dy = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m m_{ij} = 1.$$

由命题2和最大熵方法知,若 $\lambda_{i,j}(i, j = 0, 1, \dots, n)$ 满足

$$\begin{aligned} & \iint_X \varphi_{i,j}(x, y) \exp\left(\sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^n \lambda_{m,l} \varphi_{m,l}(x, y)\right) dx dy \\ &= m_{ij}, i, j = 0, 1, \dots, n \end{aligned} \quad (10)$$

则

$$f_n(x, y) = \exp\left(\sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^n \lambda_{m,l} \varphi_{m,l}(x, y)\right) \quad (11)$$

是近似不变测度。这里原最大熵方法式(5)简化为式(10),基函数的单位分割性质使计算变得简单。

对于方程(10)的求解,考虑等式左边,则有

$$\begin{aligned} & \iint_X \varphi_{i,j}(x, y) \exp\left(\sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^n \lambda_{m,l} \varphi_{m,l}(x, y)\right) dx dy \\ &= \iint_{\text{supp} \varphi_{i,j}} \varphi_{i,j}(x, y) \exp\left(\sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^n \lambda_{m,l} \varphi_{m,l}(x, y)\right) dx dy \\ &= \sum_{\triangle_k} \iint_{\triangle_k} \varphi_{i,j}(x, y) \exp\left(\sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^n \lambda_{m,l} \varphi_{m,l}(x, y)\right) dx dy \end{aligned} \quad (12)$$

\triangle_k 的一个顶点为 (x_i, y_j) 。在本文的三角剖分中,可能存在两种情况:

$$\begin{aligned} & \iint_{\triangle_k} \varphi_s(x, y) \exp\left(\sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^n \lambda_{m,l} \varphi_{m,l}(x, y)\right) dx dy \\ &= \iint_{\triangle_k} \varphi_s(x, y) \exp(\lambda_{i,j} \varphi_{i,j}(x, y) + \lambda_{i+1,j} \varphi_{i+1,j}(x, y) + \\ & \quad \lambda_{i,j+1} \varphi_{i,j+1}(x, y)) dx dy \end{aligned} \quad (13)$$

其中 s 取下标 $(i, j), (i+1, j), (i, j+1)$;或者

$$\begin{aligned} & \iint_{\triangle_k} \varphi_s(x, y) \exp\left(\sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^n \lambda_{m,l} \varphi_{m,l}(x, y)\right) dx dy \\ &= \iint_{\triangle_k} \varphi_s(x, y) \exp(\lambda_{i,j} \varphi_{i,j}(x, y) + \\ & \quad \lambda_{i-1,j} \varphi_{i-1,j}(x, y) + \lambda_{i,j-1} \varphi_{i,j-1}(x, y)) dx dy \end{aligned} \quad (14)$$

其中 s 取下标 $(i, j), (i-1, j), (i, j-1), (i, j)$,是三角形 \triangle_k 的直角顶点。此积分可用数值积分方法计算,得到一个关于 $\lambda_{i,j}(i, j = 0, 1, 2, \dots, n)$ 的非线性方程组。

若 $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^2$ 被分割成任意三角形单元,假设任意三角形单元的顶点分别是 $(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k)$,如图2。采用有限元方法中的坐标变换

$$\begin{cases} x = x_i(1-\xi-\eta) + x_j\xi + x_k\eta, \\ y = y_i(1-\xi-\eta) + y_j\xi + y_k\eta, \\ 0 \leq \xi, \eta \leq 1 \end{cases} \quad (15)$$

则任意三角形单元就可以转换为标准三角形单元(如图3),其顶点关系为:

$$\begin{aligned} (x_i, y_i) &\leftrightarrow (0, 0), (x_j, y_j) \leftrightarrow (1, 0), \\ (x_k, y_k) &\leftrightarrow (0, 1). \end{aligned}$$

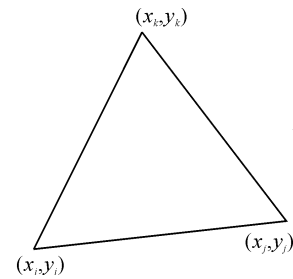


图2 任意三角形单元

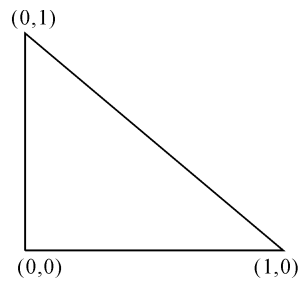


图3 标准三角形单元

考虑标准三角形单元上的积分,顶点 $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$ 对应的分片线性基函数分别表示为

$$\begin{cases} \phi_0(x, y) = 1 - x - y \\ \phi_1(x, y) = x \\ \phi_2(x, y) = y \end{cases} \quad (16)$$

那么三角形 \triangle_k 上的积分可以表示为:

$$\begin{aligned} & \iint_{\triangle_k} \varphi_s(x, y) \exp\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(x, y)\right) dx dy \\ &= h^2 \iint_{\triangle} \phi_l(\xi, \eta) \exp\left(\sum_{l=0}^2 \lambda_s \phi_l(\xi, \eta)\right) J(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (17)$$

其中: $s = (i, i), l = 0; s = (j, j), l = 1; s = (k, k), l = 2$, Jacobi 行列式是

$$\begin{aligned} J(\xi, \eta) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_j - x_i & x_k - x_i \\ y_j - y_i & y_k - y_i \end{vmatrix} \\ &= (x_j - x_i)(y_k - y_i) - (x_k - x_i)(y_j - y_i) \end{aligned} \quad (18)$$

利用数值积分可以得到关于 $\lambda_{i,j}(i, j = 0, 1, 2, \dots, n)$ 的非线性方程组(10),可以用牛顿法或拟牛顿法迭代求解。

令 $\mathbf{G}: \mathbf{R}^{(n+1)^2} \rightarrow \mathbf{R}^{(n+1)^2}$, 它的元素定义为:

$$\begin{aligned} G_{ij}(\lambda_{0,0}, \lambda_{0,1}, \dots, \lambda_{n,n}) &= \iint_X \varphi_{i,j}(x, y) \\ & \exp\left(\sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^n \lambda_{m,l} \varphi_{m,l}(x, y)\right) dx dy - m_{ij} \end{aligned} \quad (19)$$

其中, $i, j = 0, 1, 2, \dots, n$. 则方程组(10)可以写为

$$G_{ij}(\lambda_{0,0}, \lambda_{0,1}, \dots, \lambda_{n,n}) = 0 \quad (20)$$

G 的 Jacobi 矩阵

$$\frac{\partial G_{ij}}{\partial \lambda_{m,l}} = \iint_X \varphi_{i,j}(x,y) \exp\left(\sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^n \lambda_{m,l} \varphi_{m,l}(x,y)\right) \varphi_{m,l}(x,y) dx dy \quad (21)$$

其中, i, j, m, l 均从 $0, 1, \dots, n$ 取值。与一维问题类似, 很容易证明该 Jacobi 矩阵是正定的, 由于 $\varphi_{i,j}(x,y)$ 只在以 (x_i, y_j) 为顶点的三角形单元上非零, 所以 Jacobi 矩阵是带状矩阵。这些性质保证了非线性方程组可以用拟牛顿方法有效求解。

2 收敛性分析

本节采用矩问题的收敛理论^[17-18] 分析了计算二维映射不变测度的最大熵方法的收敛性, 并给出误差分析。

设 X 是凸拓扑向量空间, 令 $W: L^1(X) \rightarrow [-\infty, \infty)$ 是 X 上具有紧水平集的泛函, $\{D_n\}$ 是 $L^1(X)$ 上的闭集序列, 且对于所有的 n 都有 $D_{n+1} \subset D_n$ 。考虑最大值问题

$$\max\{W(f): f \in D_n\} \quad (22)$$

和极限问题

$$\max\{W(f): f \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n\} \quad (23)$$

设对于每个 n , f_n 是式(22) 的解。

引理 1^[18] 如果 f^* 是式(23) 的唯一解且满足 $W(f^*) > -\infty$ 。那么在拓扑 X 下, 函数序列 f_n 收敛到 f^* , 序列 $W(f_n)$ 收敛到 $W(f^*)$ 。

熵 $H(f) = -\iint_X f(x,y) \ln f(x,y) dx dy$ 满足一般理论的所有条件。如果将 X 剖分成 2×2^n ($n = 1, 2, \dots$), 如图 1 中的嵌套直角三角形即 $D_{n+1} \subset D_n$, 式(10) 的可行集对于包含关系是单调递减的。根据引理 1 有下列性质:

性质 1 若 $H(f^*) > -\infty$, 那么对于 D_n 的最大熵的解 f_n 有

- 当 $n \rightarrow \infty$ 时, f_n 弱收敛到 f^* 。
- 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $H(f_n) \rightarrow H(f^*)$ 。

表 1 $S(x,y)$ 和 $T(x,y)$ 不变测度 f_n 的 L^1 - 误差

节点个数	9	25	81	289	1089
$S(x,y)$	4.1×10^{-2}	6.0×10^{-3}	1.1×10^{-3}	2.3×10^{-4}	5.5×10^{-5}
$T(x,y)$	4.0×10^{-1}	2.6×10^{-1}	1.8×10^{-1}	1.2×10^{-1}	0.8×10^{-2}

对于大多数映射, 其不变测度是未知的, 则假设映射是遍历的, 由 Birkhoff 的逐点遍历定理^[20] 有:

定理 2 假设 $H(f^*) > -\infty$, 将 X 进行 2×2^n 的三角剖分, 令 f_n 是方程(10) 的解, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_1^*\| = 0$ 。

此方法的收敛率依赖于函数 $\ln f^*$ 到由所有 φ_i 张成的子空间的最小距离^[19]

$$d_n = \inf\left\{\left\|\ln f^* - \sum_{i=1}^{2 \times 2^n} \alpha_i \varphi_i\right\|_{\infty} : \forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2 \times 2^n}\right\} \quad (24)$$

由收敛理论和二维空间中连续函数的分片线性插值理论, 可以得到下面的误差估计。

定理 3 假设 X 上的 $f^*(x) \geq c$, c 是一个正数, f^* 在 $[a, b]$ 上是连续可微的。则

$$\|f_n - f_1^*\| = O(\delta^2) = O\left(\frac{1}{4^n}\right) \quad (25)$$

其中, δ 是三角形的最大直径。

3 数值实验结果

本节把基于三角单元的分片线性最大熵方法应用到具体例子。数值结果表明收敛阶与理论估计一致。

例 1 考虑二维映射

$$S(x,y) = (S_1(x), S_2(y)),$$

其中:

$$S_1(x) = \begin{cases} \frac{2x}{1-x^2}, & 0 \leq x \leq \sqrt{2}-1 \\ \frac{1-x^2}{2x}, & \sqrt{2}-1 \leq x \leq 1 \end{cases},$$

$$S_2(y) = \begin{cases} \frac{2y}{1-y}, & 0 \leq y \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1-y}{2y}, & \frac{1}{3} \leq y \leq 1 \end{cases}.$$

$S(x,y)$ 的不变测度是 $f^*(x,y) = \frac{8}{\pi(1+x^2)(1+y)^2}$ 。

将区域 $[0,1] \times [0,1]$ 分割为三角元, 有 $(n+1)^2$ 个基函数, 如图 1, 由式(7) 可得 $(n+1)^2$ 个矩。对方程(10) 利用三点高斯数值积分方法计算积分得非线性方程组。实验结果见表 1。数值结果与式(25) 给出的收敛估计一致。

$$m_{ij} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \varphi_{i,j}(S^m(x,y)), \forall (x,y) \in [0,1] \times [0,1].$$

选择一个足够大的正整数 M , 可得矩的近似值为:

$$m_{ij} \approx \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \varphi_{i,j}(S^m(x, y)).$$

例2 考虑二维映射

$$T(x, y) = (T_1(x), T_2(y)),$$

其中:

$$T_1(x) = \begin{cases} \frac{2x}{1-x^2}, & 0 \leq x \leq \sqrt{2}-1 \\ \frac{1-x^2}{2x}, & \sqrt{2}-1 \leq x \leq 1 \end{cases},$$

$$T_2(y) = 4y(1-y).$$

则 $T(x, y)$ 的不变测度是 $f^*(x, y) =$

$$\frac{4}{\pi^2(1+x^2)\sqrt{(x(1-x))}}.$$

与例1进行类似的三角剖分和计算。实验结果见表1。由于不变密度在端点趋于无穷, 数值结果收敛慢一些。

4 结论

本文将基于有限元中分片线性三角元基函数的最大熵方法进行推广, 用于计算二维映射的不变测度。选用三角单元上的分片线性基函数作为矩函数, 其满足单位分割性质和支集性质, 使得非线性方程组的 Jacobi 矩阵是正定的带状矩阵, 简化了方程组的求解, 提高了解的精度, 保证了非线性方程组解的稳定性。数值实验结果表明, 用基于分片线性基函数的最大熵方法计算二维映射的不变测度是有效并且收敛的。按照同样的思路, 可把此方法推广到高维问题, 但计算量会随之增大。

参考文献:

- [1] FRENKEL D, SMIT B. Understanding molecular simulation: from algorithms to applications[J]. 2nd ed. Physics Today, 1996, 50(7):66.
- [2] GORA P, BOYARSKY A, PROPPE H. On the number of invariant measures for higher-dimensional chaotic transformations [J]. Journal of Statistical Physics, 1991, 62(3):709-728.
- [3] Ulam S M. Book reviews: A collection of mathematical problems[J]. Science, 1960, 132(3428):665-666.
- [4] DING J, ZHOU A H. Constructive approximations of Markov operators[J]. Journal of Statistical Physics, 2001, 105(5):863-878.
- [5] BOYARSKY A, GORA P. Laws of Chaos [M]. Boston: Birkhäuser Boston, 1997:45-50.
- [6] JAYNES E T. Information theory and statistical mechanics[J]. Physical Review, 1957, 106(4):620-630.
- [7] PEYMAN ESLAMI, MICAL MISIUREWICZ. Singular limits of absolutely continuous invariant measures for families of transitive maps[J]. Journal of Difference Equations & Applications, 2012, 18(4):739-750.
- [8] DING J, NOAH H RHEE. Birkhoff's ergodic theorem and the piecewise-constant maximum entropy method for Frobenius-Perron operators[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2012, 89(8):1-9.
- [9] BARNHART P R, GILLAM E H. The impact of sampling method on maximum entropy species distribution modeling for bats [J]. Acta Chiropterologica, 2015, 16(8):241-248.
- [10] JIN C M, DING J. Solving Fredholm integral equations via a piecewise linear maximum entropy method [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2016, 304:130-137.
- [11] MEAD L R. Approximate solution of Fredholm integral equations by the maximum entropy method[J]. Journal of Mathematical Physics, 1986, 27(12):2903-2907.
- [12] GALLIS M A, HARVEY J K. Maximum entropy analysis of chemical reaction energy dependence [J]. Journal of Thermophysics & Heat Transfer, 2015, 10(2):217-223.
- [13] SIDDIQI M H, ALAM M G R, HONG C S, et al. A novel maximum entropy Markov model for human facial expression recognition[J]. Plos One, 2016, 11(9):3-8.
- [14] GULL S F, SKILLING J. Maximum entropy method in image processing [J]. Communications Radar & Signal Processing Iee Proceedings F, 1984, 131(6):646-659.
- [15] FERNANDEZ J E, SCOT V, GIULIO E D. Spectrum unfolding in X-ray spectrometry using the maximum entropy method[J]. Radiation Physics & Chemistry, 2014, 95(4):154-157.
- [16] 文兰. 动力系统简介(迎接 ICM2002 特约文章)[J]. 数学进展, 2002, 31(4):293-294.
- [17] TEBOULLE M, VAJDA I. Convergence of best φ -entropy estimates [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1993, 39(1):297-301.
- [18] LEWIS A S. The convergence of entropy-based approximations for moment problems [J]. Optimization, 2010, 28(3):383-395.
- [19] MACKEY, MICHAEL C. Chaos, Fractals, and Noise [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1994:97-100.
- [20] BISWAS P, SHIMOYAMA H, MEAD L R.

Lyapunov exponents and the natural invariant density
determination of chaotic maps; an iterative maximum

entropy ansatz[J]. Journal of Physics A Mathematical
& Theoretical, 2009, 43(12): 835-842.

Application of Maximum Entropy Method in Calculating Two-Dimensional Invariant Measure

ZHANG Ru, XU Chunwei, JIN Congming

(School of Sciences, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: The piecewise linear basis function on the triangle unit is used as the moment function in maximum entropy method to calculate invariant measure of two-dimensional mapping. Since the piecewise linear basis function on the finite element unit has local support set and unit partition property, Jacobi matrix of nonlinear equations obtained from the maximum entropy method is positive band matrix, which guarantees the uniqueness and stability of the solution. In theory, this paper gives convergence degree of this method, and numerical experiment results are consistent with the theory.

Key words: finite element unit; invariant measure; piecewise linear basis function; maximum entropy

(责任编辑: 康 锋)