

不确定语言 Hero 平均算子及其 在多属性群决策中的应用

姬欢,裴道武

(浙江理工大学理学院,杭州 310018)

摘要:基于 Hero 平均算子,提出一些适合不确定语言环境的聚合算子,即不确定语言 Hero 平均(ULHA)算子和不确定语言广义 Hero 平均(ULGHA)算子,并且讨论了它们的基本性质,如单调性、有界性、幂等性、置换性等,以及它们的一些特殊情形。在 ULHA 算子的基础上,提出了不确定语言几何 Hero 平均(ULGHA)算子和不确定语言加权几何 Hero 平均(ULWGHA)算子。最后给出了基于 ULWGHA 算子的多属性群决策方法,并且将之应用到教师选拔问题中。

关键词:多属性群决策;不确定语言变量;Hero 平均算子;不确定语言 Hero 平均算子;不确定语言加权几何 Hero 平均算子

中图分类号: O221;F272.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-3851 (2016) 02-0317-05 **引用页码:** 030803

0 引言

多属性决策问题就是从有限可行方案中选出最优的,决策者会针对不同的方案及不同的属性给出自己的偏好信息,通常以实数表示这些偏好信息。然而在实际生活中,主观和客观因素的不确定性使得偏好信息不能用实数简单地表示,故需要用语言变量,2 元语言变量,模糊数,直觉模糊数等代替实数。当给出的语言偏好表示值并不是语言术语集中的某个语言值,而是介于两个语言术语之间,许多学者给出了新的定义,如徐泽水^[1-2]给出了不确定语言变量的定义,并定义了不确定语言变量之间的运算法则。近年来,许多学者研究不确定语言多属性群决策问题,如:徐泽水^[1,3]提出了不确定语言加权平均(ULWA)算子,不确定语言有序加权平均(ULOWA)算子和不确定语言混合平均(ULHA)算子,诱导的不确定语言有序加权平均(IULOWA)算子,以及不确定语言几何平均(ULGA)算子,并且讨论了它们的性质,并且将其应用到实际多属性决策

问题中;Wei^[4]提出了不确定语言混合几何平均(ULHGA)算子及其在多属性群决策中的应用。

自从 Beliakov 于 2007 年提出 Hero 平均算子^[5]以来,由于该算子可以反映输入值之间的相互关系,它已在决策分析等多个领域得到广泛的应用和推广^[6-10]。基于 Hero 平均算子和不确定语言环境,本文提出了不确定 Hero 平均算子,不确定语言几何 Hero 平均算子,不确定语言加权几何 Hero 平均算子,讨论了它们满足的一些性质和特殊类,并且考虑了它们的实际应用。

1 预备知识

定义 1^[1] 令 $\tilde{s} = [s_\alpha, s_\beta]$, $s_\alpha, s_\beta \in S$, $S = \{s_i \mid i = 1, 2, \dots, t\}$ 为语言术语集, s_α 和 s_β 分别为 \tilde{s} 的下限和上限,则称 \tilde{s} 为不确定语言变量。不确定语言变量的全体用 \tilde{S} 表示。

针对 3 个任意的不确定语言变量:

$$\begin{aligned}\tilde{s} &= [s_\alpha, s_\beta], \tilde{s}_1 = [s_{\alpha_1}, s_{\beta_1}], \\ \tilde{s}_2 &= [s_{\alpha_2}, s_{\beta_2}], \tilde{s}, \tilde{s}_1, \tilde{s}_2 \in \tilde{S}, \lambda \in [0, 1],\end{aligned}$$

徐泽水^[1] 给出不确定语言变量之间的运算法则:

$$a) \tilde{s}_1 \oplus \tilde{s}_2 = [s_{\alpha_1}, s_{\beta_1}] \oplus [s_{\alpha_2}, s_{\beta_2}] = [s_{\alpha_1 + \alpha_2}, s_{\beta_1 + \beta_2}];$$

$$b) \lambda \tilde{s} = \lambda [s_\alpha, s_\beta] = [\lambda s_\alpha, \lambda s_\beta] = [s_{\lambda\alpha}, s_{\lambda\beta}];$$

$$c) \tilde{s}_1 \otimes \tilde{s}_2 = [s_{\alpha_1}, s_{\beta_1}] \otimes [s_{\alpha_2}, s_{\beta_2}] = [s_{\alpha_1\alpha_2}, s_{\beta_1\beta_2}];$$

$$d) (\tilde{s})^\lambda = [s_\alpha, s_\beta]^\lambda = [(s_\alpha)^\lambda, (s_\beta)^\lambda] = [s_{\alpha^\lambda}, s_{\beta^\lambda}].$$

为了对任意两个不确定语言变量 $\tilde{s}_1 = [s_{\alpha_1}, s_{\beta_1}]$ 和 $\tilde{s}_2 = [s_{\alpha_2}, s_{\beta_2}]$ 进行比较, 徐泽水^[1] 给出了一个简洁的公式:

$$p(\tilde{s}_1 \geq \tilde{s}_2) = \min\{\max(\frac{\beta_1 - \alpha_2}{\text{len}(\tilde{s}_1) + \text{len}(\tilde{s}_2)}, 0), 1\},$$

其中: $\text{len}(\tilde{s}_1) = \beta_1 - \alpha_1$, $\text{len}(\tilde{s}_2) = \beta_2 - \alpha_2$, $p(\tilde{s}_1 \geq \tilde{s}_2)$ 是 $\tilde{s}_1 \geq \tilde{s}_2$ 的可能度。

定义 2^[5] 令 $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是非负数, 算子

$$\text{HA}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n (a_i a_j)^{1/2}$$

称为 Hero 平均算子。

算子 HA 满足单调性、幂等性、有界性和交换性^[5]。

定义 3^[6] 令 $I = [0, 1]$, $p, q \geq 0$, 且 p, q 不同时为 0, $\text{HA}^{p,q}: I^n \rightarrow I$, 称算子 $\text{HA}^{p,q}$, 即:

$$\text{HA}^{p,q}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left(\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_i^p a_j^q \right)^{\frac{1}{p+q}},$$

为广义 Hero 平均算子。

算子 $\text{HA}^{p,q}$ 是有界的、单调的、幂等的^[6]。

定义 4^[6] 令 $p, q > 0$, $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是非负数, 称函数

$$\text{GHA}^{p,q}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{p+q} \left(\prod_{i=1}^n \prod_{j=i}^n (pa_i + qa_j) \right)^{\frac{2}{n(n+1)}},$$

为几何 Hero 平均算子。

该算子满足下面的性质:

a) 如果 $a_i = a$, 则 $\text{GHA}^{p,q}(a_1, a_2, \dots, a_n) = a$;

b) 如果 $a_i \geq b_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 则 $\text{GHA}^{p,q}(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq \text{GHA}^{p,q}(b_1, b_2, \dots, b_n)$;

c) $\min_i \{a_i\} \leq \text{GHA}^{p,q}(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \max_i \{a_i\}$ 。

2 不确定语言 Hero 平均算子

定义 5 设 $\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_n \in \tilde{S}$ 且 $\tilde{s}_i = [s_{\alpha_i}, s_{\beta_i}]$, 我们称算子 $\text{ULHA}: \tilde{S}^n \rightarrow \tilde{S}$

$$\text{ULHA}(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_n) = \frac{2}{n(n+1)} \bigoplus_{i=1}^n \bigoplus_{j=i}^n (\tilde{s}_i \otimes \tilde{s}_j)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left[s_{\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n (\alpha_i \alpha_j)^{1/2}}, s_{\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n (\beta_i \beta_j)^{1/2}} \right],$$

为不确定语言 Hero 平均算子。

不难看出, 经过算子 ULHA 聚合后的值还是不确定语言变量。

定理 1 (有界性) 设:

$$\tilde{s}^- = \min_i \{\tilde{s}_i\} = [\min_i \{s_{\alpha_i}\}, \min_i \{s_{\beta_i}\}],$$

$$\tilde{s}^+ = \max_i \{\tilde{s}_i\} = [\max_i \{s_{\alpha_i}\}, \max_i \{s_{\beta_i}\}],$$

$$i = (1, 2, \dots, n),$$

则 $\tilde{s}^- \leq \text{ULHA}(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_n) \leq \tilde{s}^+$ 。

定理 2 (单调性) 设 $\tilde{s}_i = [s_{\alpha_i}, s_{\beta_i}]$, $\tilde{s}_i' = [s_{\alpha_i'}, s_{\beta_i'}]$, $\tilde{s}_i \leq \tilde{s}_i' (i = 1, 2, \dots, n)$, 且 $\alpha_i \leq \alpha_i', \beta_i \leq \beta_i'$, 则:

$$\text{ULHA}(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_n) \leq \text{ULHA}(\tilde{s}_1', \tilde{s}_2', \dots, \tilde{s}_n').$$

定理 3 (幂等性) 设 $\tilde{s}_i = \tilde{s} = [s_\alpha, s_\beta] (i = 1, 2, \dots, n)$, 则:

$$\text{ULHA}(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_n) = \tilde{s} = [s_\alpha, s_\beta].$$

定理 4 (置换性) 设 $\tilde{s}_i = [s_{\alpha_i}, s_{\beta_i}]$, $\tilde{s}_i' = [s_{\alpha_i'}, s_{\beta_i'}]$ 是 \tilde{s}_i 的任意置换, 则:

$$\text{ULHA}(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_n) = \text{ULHA}(\tilde{s}_1', \tilde{s}_2', \dots, \tilde{s}_n').$$

以上 4 个定理的证明由 Hero 平均算子的性质可直接得出。

定义 6 设 $\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_n \in \tilde{S}$ 且 $\tilde{s}_i = [s_{\alpha_i}, s_{\beta_i}]$, 则称算子 $\text{ULHA}: \tilde{S}^n \rightarrow \tilde{S}$

$$\text{ULHA}^{p,q}(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_n) =$$

$$\left(\frac{2}{n(n+1)} \bigoplus_{i=1}^n \bigoplus_{j=i}^n (\tilde{s}_i)^p \otimes (\tilde{s}_j)^q \right)^{\frac{1}{p+q}} =$$

$$\left[s_{\left(\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n (\alpha_i)^p (\alpha_j)^q \right)^{\frac{1}{p+q}}}, s_{\left(\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n (\beta_i)^p (\beta_j)^q \right)^{\frac{1}{p+q}}} \right],$$

为不确定语言广义 Hero 平均算子。

注 1: $\text{ULHA}^{p,q}$ 算子是单调的、有界的、幂等的。

下面讨论针对参数 p, q 的不同取值所得到的一些特殊情形。

特例 1: 若 $q \rightarrow 0$, 则有:

$$\begin{aligned} & \text{ULHA}^{p,q}(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_n) \\ &= \lim_{q \rightarrow 0} \left[s_{\left(\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n (\alpha_i)^p (\alpha_j)^q \right)^{\frac{1}{p+q}}}, s_{\left(\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n (\beta_i)^p (\beta_j)^q \right)^{\frac{1}{p+q}}} \right] \\ &= \left[s_{\left(\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n (\alpha_i)^p (n-i+1) \right)^{\frac{1}{p}}}, s_{\left(\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n (\beta_i)^p (n-i+1) \right)^{\frac{1}{p}}} \right]. \end{aligned}$$

特例 2: 若 $p \rightarrow 0$, 则有:

$$\begin{aligned} & \text{ULHA}^{p,q}(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_n) \\ &= \left[s_{\left(\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n (\alpha_j)^q \right)^{\frac{1}{q}}}, s_{\left(\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n (\beta_j)^q \right)^{\frac{1}{q}}} \right]. \end{aligned}$$

特例 3: 若 $p = q = 1$, 则 $\text{ULHA}^{p,q}(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_n) = \text{ULHA}(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_n)$ 。

特例 4: 若 $p = 1, q \rightarrow 0$, 则有:

$$\text{ULHA}^{p,q}(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_n) = \left[s_{\left(\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n (n-i+1)\beta_i^q\right)}, s_{\left(\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n (n-i+1)\beta_i\right)} \right].$$

特例 5: 若 $q = 1, p \rightarrow 0$, 则有:

$$\text{ULHA}^{p,q}(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_n) = \left[s_{\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n \alpha_i}, s_{\frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n \beta_i} \right].$$

定义 7 设 $\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_n \in \tilde{S}$, 则称算子 $\text{ULGHA}^{p,q}: \tilde{S}^n \rightarrow \tilde{S}$,

$$\begin{aligned} & \text{ULGHA}^{p,q}(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_n) \\ &= \frac{1}{p+q} \left(\bigotimes_{i=1}^n \bigotimes_{j=i}^n (p\tilde{s}_i \oplus q\tilde{s}_j) \right)^{\frac{2}{n(n+1)}} \\ &= \left[s_{\frac{1}{p+q} \prod_{i=1}^n \prod_{j=i}^n (p\alpha_i + q\alpha_j)^{\frac{2}{n(n+1)}}}, s_{\frac{1}{p+q} \prod_{i=1}^n \prod_{j=i}^n (p\beta_i + q\beta_j)^{\frac{2}{n(n+1)}}} \right], \end{aligned}$$

为不确定语言几何 Hero 平均算子。

由几何 Hero 平均算子的性质可知, $\text{ULGHA}^{p,q}$ 算子是单调的、有界的、幂等的, 但它不满足置换性。

定理 5 若 $p = q$, $\text{ULGHA}^{p,q}$ 算子满足单调性。

证明: 设 $\tilde{s}_i' = [s_{\alpha_i'}, s_{\beta_i'}]$ 是 \tilde{s}_i 的任意置换, 且 $p = q$, 则:

$$\begin{aligned} & \text{ULGHA}^{p,q}(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_n) \\ &= \left[s_{\frac{1}{2p_i} \prod_{j=i}^n (p\alpha_i + p\alpha_j)^{\frac{2}{n(n+1)}}}, s_{\frac{1}{2p_i} \prod_{j=i}^n (p\beta_i + p\beta_j)^{\frac{2}{n(n+1)}}} \right] \\ &= \left[s_{\frac{1}{2p_i} \prod_{j=i}^n (p\alpha_i' + p\alpha_j')^{\frac{2}{n(n+1)}}}, s_{\frac{1}{2p_i} \prod_{j=i}^n (p\beta_i' + p\beta_j')^{\frac{2}{n(n+1)}}} \right] \\ &= \text{ULGHA}^{p,q}(\tilde{s}_1', \tilde{s}_2', \dots, \tilde{s}_n'). \end{aligned}$$

以上所提出的不确定语言平均算子的输入值的权重是相等的, 然而, 在实际应用中输入值的权重一般是不同的, 因此本文提出了不确定语言加权几何 Hero 平均算子。它不仅考虑了输入值的权重, 而且还考虑了输入值之间的相互关系。

定义 8 设 $\tilde{s}_i = [s_{\alpha_i}, s_{\beta_i}] \in \tilde{S} (i = 1, 2, \dots, n)$, 且 $p, q > 0, w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ 是 $\tilde{s}_i = [s_{\alpha_i}, s_{\beta_i}]$ 的加权向量, 且满足 $w_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^n w_i = 1$, 则称算子

$$\begin{aligned} & \text{ULWGH}^{p,q}(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_n) \\ &= \frac{1}{p+q} \left(\bigotimes_{i=1}^n \bigotimes_{j=i}^n (p(\tilde{s}_i)^{w_i} \oplus q(\tilde{s}_j)^{w_j}) \right)^{\frac{2}{n(n+1)}} \\ &= \left[s_{\frac{1}{p+q} \left(\prod_{i=1}^n \prod_{j=i}^n (p(\alpha_i)^{w_i} + q(\alpha_j)^{w_j}) \right)^{\frac{2}{n(n+1)}}}, \right. \\ & \quad \left. s_{\frac{1}{p+q} \left(\prod_{i=1}^n \prod_{j=i}^n (p(\beta_i)^{w_i} + q(\beta_j)^{w_j}) \right)^{\frac{2}{n(n+1)}}} \right], \end{aligned}$$

为不确定语言加权几何 Hero 平均算子。

可以直接证明 $\text{ULWGH}^{p,q}$ 算子满足单调性, 但它不满足幂等性。

注 2: 当 $w_i = \frac{1}{n} (i = 1, 2, \dots, n)$ 时, $\text{ULWGH}^{p,q}$ 算子成了 $\text{ULGHA}^{p,q}$ 算子, 也可以说 $\text{ULGHA}^{p,q}$ 算子

是 $\text{ULGHA}^{p,q}$ 算子的一种特殊情形。

3 基于 ULWGHA 算子的实际应用

假设现在需要从 4 个教师 x_1, x_2, x_3, x_4 中选出一个最优秀的, 可以从 4 个方面 c_1, c_2, c_3, c_4 来评价他们, 其中: c_1 代表综合素质, c_2 代表教学质量, c_3 代表科研情况, c_4 代表其他(健康等), 且相对应的权重向量为 $w = (0.2, 0.5, 0.2, 0.1)^T$, 记 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ 。

现有 3 个评选专家 e_1, e_2, e_3 , 其中 e_1 来自学生, e_2 来自同事, e_3 是教师本人, 且相对应的权重向量为 $v = (0.5, 0.3, 0.2)^T$ 。

评价教师利用下面的语言术语表示:

$S = \{s_1 = \text{很差}, s_2 = \text{差}, s_3 = \text{一般}, s_4 = \text{好}, s_5 = \text{很好}, s_6 = \text{极好}\}$ 。

三位决策者分别给出了下面的决策矩阵 $A^{(k)} = (r_{ij}^{(k)})_{4 \times 4} (k = 1, 2, 3)$, 其中 $r_{ij}^{(k)} \in \tilde{S}$, 如表 1—表 3 所示:

表 1 决策矩阵 $A^{(1)}$

x_i	c_1	c_2	c_3	c_4
x_1	$[s_4, s_5]$	$[s_3, s_4]$	$[s_3, s_4]$	$[s_2, s_3]$
x_2	$[s_2, s_3]$	$[s_4, s_5]$	$[s_2, s_3]$	$[s_3, s_4]$
x_3	$[s_3, s_5]$	$[s_2, s_5]$	$[s_3, s_5]$	$[s_1, s_2]$
x_4	$[s_4, s_6]$	$[s_3, s_5]$	$[s_1, s_4]$	$[s_3, s_4]$

表 2 决策矩阵 $A^{(2)}$

x_i	c_1	c_2	c_3	c_4
x_1	$[s_3, s_5]$	$[s_1, s_4]$	$[s_4, s_6]$	$[s_2, s_3]$
x_2	$[s_3, s_4]$	$[s_2, s_4]$	$[s_5, s_6]$	$[s_3, s_4]$
x_3	$[s_1, s_4]$	$[s_3, s_4]$	$[s_3, s_5]$	$[s_4, s_5]$
x_4	$[s_4, s_5]$	$[s_2, s_4]$	$[s_2, s_4]$	$[s_5, s_6]$

表 3 决策矩阵 $A^{(3)}$

x_i	c_1	c_2	c_3	c_4
x_1	$[s_4, s_5]$	$[s_3, s_5]$	$[s_4, s_5]$	$[s_4, s_6]$
x_2	$[s_5, s_6]$	$[s_4, s_6]$	$[s_3, s_4]$	$[s_2, s_5]$
x_3	$[s_3, s_5]$	$[s_5, s_6]$	$[s_2, s_4]$	$[s_4, s_5]$
x_4	$[s_4, s_5]$	$[s_4, s_5]$	$[s_5, s_6]$	$[s_4, s_6]$

要选出最优秀的教师, 基于 $\text{ULWGH}^{p,q}$ 算子 (取 $p = q = 1$) 的评选步骤如下:

第 1 步: 利用 $\text{ULWGH}^{1,1}$ 算子得到整体决策矩阵 $A = (r_{ij})_{4 \times 4}$, 由

$$r_{ij} = \text{ULWGH}^{1,1}(r_{ij}^{(1)}, r_{ij}^{(2)}, r_{ij}^{(3)}) =$$

$$\frac{1}{2} \left(\bigotimes_{k=1}^3 \bigotimes_{m=k}^3 ((r_{ij}^{(k)})^{3v_k} \oplus (r_{ij}^{(m)})^{3v_m}) \right)^{\frac{1}{6}},$$

得到表 4 的矩阵 $A = (r_{ij})_{4 \times 4}$ 。

表4 决策矩阵A

x_i	C_1	C_2	C_3	C_4
x_1	$[s_{3.8755}, s_{5.3928}]$	$[s_{2.3365}, s_{4.3545}]$	$[s_{3.5355}, s_{4.9049}]$	$[s_{2.3098}, s_{3.5010}]$
x_2	$[s_{2.7135}, s_{3.7911}]$	$[s_{3.4921}, s_{5.1619}]$	$[s_{2.9103}, s_{4.1049}]$	$[s_{2.8949}, s_{4.3545}]$
x_3	$[s_{2.3365}, s_{5.0097}]$	$[s_{2.7135}, s_{5.1619}]$	$[s_{2.8949}, s_{5.1491}]$	$[s_{2.0986}, s_{3.1889}]$
x_4	$[s_{4.1972}, s_{5.9949}]$	$[s_{2.9150}, s_{5.0097}]$	$[s_{1.7488}, s_{4.4916}]$	$[s_{3.7868}, s_{5.0514}]$

第2步:利用 ULWGH^{1,1} 算子得到 r_i , 则:

$$r_1 = [s_{2.9332}, s_{5.2248}], r_2 = [s_{3.5177}, s_{5.4338}], r_3 = [s_{2.8007}, s_{5.8504}], r_4 = [s_{3.1609}, s_{5.9586}].$$

第3步:针对 $r_i (i=1,2,3,4)$ 利用 徐泽水^[1] 给出的可能度公式得到可能度矩阵 $P = (p_{ij})_{4 \times 4}$,

$$P = \begin{pmatrix} 0.5000 & 0.4057 & 0.4538 & 0.4055 \\ 0.5943 & 0.5000 & 0.5320 & 0.4822 \\ 0.5462 & 0.4698 & 0.5000 & 0.4599 \\ 0.5945 & 0.5718 & 0.5401 & 0.5000 \end{pmatrix}.$$

第4步:利用文献[9] $\zeta_i = \frac{1}{n(n-1)} (\sum_{j=1}^n p_{ij} + \frac{n}{2} - 1)$ 得到可能度矩阵 P 的排序向量:

$$\zeta = (0.2304, 0.2589, 0.2480, 0.2627)^T.$$

第5步:根据排序向量 ζ 对不确定语言变量 $r_i (i=1,2,3,4)$ 进行排序得:

$$r_4 > r_2 > r_3 > r_1.$$

第6步:选出最优教师为 x_4 。

注3:利用文献[1]中不确定语言加权平均 (ULWA) 算子得到的排序结果也是 $r_4 > r_2 > r_3 > r_1$ 。与提出的新方法得到的结果是相同的,验证了新方法的实用性和可靠性,但是与 ULWA 算子相比较,ULWGH^{p,q} 算子不仅考虑了被聚合值的权重信息,同时还考虑了被聚合值之间的相互关系。相对来说,ULWGH^{p,q} 算子具有明显的优势。

4 总 结

本文把 Hero 平均算子和几何 Hero 平均算子推广到不确定语言环境中,提出了不确定语言 Hero 平均算子,不确定语言几何 Hero 平均算子,以及不确定语言加权几何 Hero 平均算子,并且讨论了它们的幂等性,有界性,单调性,置换性。本文提出的算子主要优势是它们考虑了被聚合值之间的相互关系。最后给出基于不确定语言几何 Hero 平均算子的多属性群决策方法,并将其应用到教师选拔问题中。

在后续的研究中,我们计划将这些算子应用到其他领域,如智能信息处理、图像处理、供应链选择等。

参考文献:

- [1] XU Z S. Uncertain linguistic aggregation operators based approach to multiple attribute group decision making under uncertain linguistic environment [J]. Information Sciences, 2004, 168(3): 171-184.
- [2] 徐泽水. 不确定多属性决策方法及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004: 1-34.
- [3] XU Z S. Induced uncertain linguistic OWA operators applied to group decision making [J]. Information Fusion, 2006, 7(2): 231-238.
- [4] WEI G W. Uncertain linguistic hybrid geometric mean operator and its application to group decision making under uncertain environment [J]. International Journal of Uncertainty Fuzziness and Knowledge-based Systems, 2009, 17(2): 251-267.
- [5] BELIAKOV G, PRADER A, CALVO D. Aggregation Functions: A Guide for Practitioners [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2007: 40-76.
- [6] YU D J. Intuitionistic fuzzy geometric Heronian mean aggregation operators [J]. Applied Soft Computing, 2013, 13(2): 1235 - 1246.
- [7] 刘焕章, 裴道武. H-OWA 算子及其在多属性决策中的应用[J]. 浙江理工大学学报, 2012, 29(1): 138-142.
- [8] LIU P D, LIU Z G, ZHANG X. Some intuitionistic uncertain linguistic Heronian mean operators and their application to group decision making [J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 230(1): 570-586.
- [9] 徐泽水. 模糊互补判断矩阵排序的一种算法[J]. 系统工程学报, 2001, 16(4): 311-314.
- [10] WEI G W, ZHAO X F, LIN R, et al. Uncertain linguistic Bonferroni mean operators and their application to multiple attribute decision making [J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(7): 5277-5285.

Uncertain Linguistic Hero Averaging Operators and Its Application in Multi-attribute Group Decision Making

Ji Huan, PEI Daowu

(School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 31800, China)

Abstract: Based on the famous Hero averaging (HA) operator, some new aggregation operators are proposed for some uncertain linguistic environments. These operators conclude the uncertain linguistic Hero averaging (ULHA) operator and the uncertain linguistic generalized Hero averaging (ULGHA) operator. The monotonicity, boundedness, idempotence and commutativity and other basic properties as well as some special circumstances are discussed. Also, based on ULHA operator, the uncertain linguistic geometric Hero averaging (ULGHA) operator and the uncertain linguistic weighted geometric Hero averaging (ULWGHA) operator are proposed. Finally, a multi-attribute group decision-making method based on the proposed ULWGHA operator is given and applied in teacher selection.

Key words: multi-attribute group decision making; uncertain linguistic variables; Hero averaging operator; uncertain linguistic Hero averaging operator; uncertain linguistic weighted geometric Hero averaging operator

(责任编辑: 康 锋)