

3-PRRU 并联机构自由度分析

柴馨雪,李秦川

(浙江理工大学机械与自动控制学院,杭州 310018)

摘要: 3-PRRU 并联机构具有 2 个转动和 1 个移动自由度,是少自由度并联机构中的一个重要分支,具有较大的应用潜力。运用几何代数对 3-PRRU 并联机构进行自由度分析。首先用几何代数表示了分支和动平台的运动空间;然后通过分支运动空间求交得到动平台的运动空间,该运动空间的基给出了 3-PRRU 并联机构自由度的符号表达式。使用几何代数方法所得结果具有几何直观性,且不需要对机构进行约束分析,运算更为简捷。

关键词: 并联机构;自由度分析;几何代数

中图分类号: TP24 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-3851 (2016) 02-0192-06 **引用页码:** 030401

0 引言

两转一移(2R1T)三自由度并联机构是少自由度并联机构中重要的一类,自 Hunt^[1]于 1983 年提出 3-RPS 并联机构以来(R:转动副,P:移动副,S:球铰),2R1T 三自由度并联机构已被用于许多领域,如基于 3-PRS 并联机构的 Z3 主轴头^[2]、Exechon 混联机器人^[3]、望远镜姿态控制器^[4]、运动模拟器^[5]、微操作机器人^[6]以及坐标测量机等^[7]。各国研究者对该类并联机构开展了大量研究,在运动学分析^[8]、尺寸综合^[9]、奇异分析^[10]、伴随运动^[11]等方面取得了重要进展。

自由度指确定机构或运动链位形所需要的独立坐标数^[12]。自由度分析是机构应用的前提和基础。少自由度并联机构中多存在冗余约束,其自由度的计算十分困难,各国学者在此方面做了大量工作。黄真等^[13]提出了基于约束螺旋理论的自由度分析方法和修正 G-K 公式,其原理是对各分支施加于动平台的约束系求并,以得到动平台被约束的自由度。该方法适用于全部 9 类少自由度并联机构。Herve^[14]采用基于群论方法的并联机构位移子群求

交方法来分析自由度。Staffetti^[15]提出一种基于 Grassmann-Cayley 代数的分支运动空间的交集计算方法。

几何代数又被称为 Clifford 代数,是一种几何应用方面极具潜力的计算方法,由 Clifford^[16]在 1876 年首次提出,故又被称作 Clifford 代数。Hestenes^[17]将 Clifford 代数进行几何意义上的解释,从而称它为几何代数。在处理几何应用问题时,几何代数在几何解释方面具有其他方法无法比拟的优势,已被广泛应用到物理^[18-19]、神经计算^[20]、信号及图像处理^[21]、机器视觉^[22]、计算机图形学^[23]和机器人学^[24-25]等领域。Hildenbrand 和 Zamora 等^[26-27]用共形几何代数方法对机器人的运动学逆解等问题进行了分析。Aristidou 和 Lasenby^[28-29]用几何代数方法求解运动学逆解,并且提出了一种有效的运动学逆解迭代求解器 Fabrik。Lasenby 等^[30]提出了一种基于几何代数的机器视觉结构与运动评估方法。Tanev^[31]用几何代数方法对四自由度并联机构进行了奇异分析。

本文运用几何代数对 3-PRRU 并联机构自由度进行分析。首先用利用几何代数中的外积表达了

收稿日期: 2015-12-31

基金项目: 国家自然科学基金项目(51525504)

作者简介: 柴馨雪(1988-),女,内蒙古赤峰人,博士研究生,主要从事并联机器人方面的研究。

通信作者: 李秦川, E-mail: lqchuan@zstu.edu.cn

分支和动平台的运动空间,然后通过对分支运动空间求交得到动平台的运动空间,该运动空间的基给出了 3-PRRU 并联机构自由度的符号表达式。

1 几何代数基础

在 n 维实数向量空间 \mathcal{V}_n 中,由几何积产生的集合被称为几何代数 $\mathcal{G}_n = \mathcal{G}(\mathcal{V}_n)$ 。本文选用一个 6 维向量空间的几何代数 \mathcal{G}_6 进行分析。 \mathcal{G}_6 的基底为 $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ 。这组基底满足如下条件:

$$e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1, i=j \\ 0, i \neq j \end{cases}, \text{且 } e_i \wedge e_i = 0 \quad (1)$$

已知向量 a 和 b ,则 a 和 b 的几何积可以定义为:

$$ab = a \cdot b + a \wedge b \quad (2)$$

其中: $a \cdot b$ 是向量 a 和 b 的内积, $a \wedge b$ 是向量 a 和 b 的外积。

2 个向量 a 和 b 的外积表示一个有方向的平面度量,具体表示为向量 b 沿着向量 a 扫过而形成的平行四边形,如图 1(a) 所示。外积具有反对称性,即 $a \wedge b = -b \wedge a$ 。

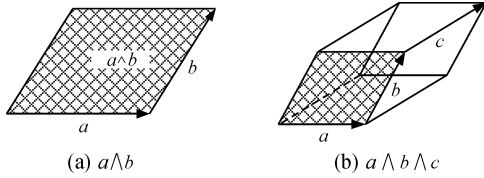


图1 几何积的几何表达

3 个向量 a, b 和 c 的外积表示一个有方向的空间度量,具体表示为面度量 $a \wedge b$ 沿着向量 c 扫过而形成的空间,如图 1(b) 所示。外积运算满足结合律,即 $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ 。

k 个向量 a_1, a_2, \dots, a_k 的外积组成一个 k 维的片积(blade):

$$\langle A \rangle_k = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_k \quad (3)$$

其中 k 是片积的阶(grade)。 k 阶片积的几何意义为一个由 k 个向量张成的子空间。

在几何代数 \mathcal{G}_n 中,单位伪标量 I_n 由 n 个单位基底的几何积组成:

$$I_n = e_1 e_2 e_3 \dots e_n \quad (4)$$

k 阶片积 A 的对偶空间为这个 k 维子空间的正交补空间:

$$D = AI_6^{-1} \quad (5)$$

其中 I_6^{-1} 是 \mathcal{G}_6 的单位伪标量的逆, $I_6^{-1} = e_6 e_5 e_4 e_3 e_2 e_1$ 。

几何代数可以表示螺旋理论,螺旋理论与几何代数的关系在文献[32]中有详细阐述。本文将螺旋

理论与几何代数运算之间关系用表格形式列出,如表 1 所示。

表1 螺旋理论与几何代数的关系

运算	螺旋理论	几何代数
螺旋	$\$ = (s; s_0) = (v_1 v_2 v_3; b_1 b_2 b_3)$	$S = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3 + b_1 e_4 + b_2 e_5 + b_3 e_6$
对偶	$\$ \circ \$ = s_j \cdot s_r + s_r \cdot s_j = 0$	$D = AI_6^{-1} = (-1)^{k(6-k)} I_6^{-1} A$
互易变换	—	$\Delta S = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 + v_1 e_4 + v_2 e_5 + v_3 e_6$

积 A 和 B 的并集 $A \dot{\wedge} B$ 是由子空间 A 和 B 的和张成的空间的伪标量。如果 A 和 B 是线性无关的,则他们的并集可以表示为:

$$A \dot{\wedge} B = A \wedge B \quad (6)$$

在 \mathcal{G}_6 中,片积 A 和 B 的交集 $A \vee B$,在 A, B 阶的和大于等于 6 时可以表示为:

$$A \vee B = (AI_6^{-1}) \cdot B \quad (7)$$

交集可以看作是向量空间交集的代数表达形式。

A 和 B 的交集还满足德摩根定律,即:

$$(A \vee B) I_6^{-1} = (AI_6^{-1}) \wedge (BI_6^{-1}) \quad (8)$$

2 自由度分析方法

串联运动链的运动空间可以表示为组成该串联运动链的每个关节的运动子空间的并集。因此第 i 个分支上的运动空间可以表示为分支上 m_i 个关节运动子空间的并集:

$$A_i = S_{i1} \wedge \dots \wedge S_{ij} \wedge \dots \wedge S_{m_i} \quad (9)$$

其中 S_{ij} 表示并联机构第 i 个分支上第 j 个运动螺旋。

m_i 阶的片积 A_i 表示第 i 个分支上所有 m_i 个关节张成的运动空间。如果式(9)中的向量 S_{ij} 和 S_{ij+1} 线性相关,需要在移除线性相关项后再进行计算。

相反地,并联机构动平台的运动空间是所有分支运动链的运动空间的交集。根据式(7)可得到分支运动子空间 A_i 和 A_{i+1} 的交集为:

$$A_i \cap A_{i+1} = A_i \vee A_{i+1} = (A_i I_6^{-1}) \cdot A_{i+1} \quad (10)$$

如果机构的分支数目为 n ,则动平台的运动空间 M 为所有 n 个分支运动子空间的交集,即:

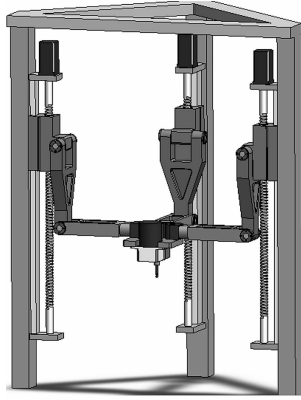
$$M = A_1 \vee \dots \vee A_i \vee \dots \vee A_n \quad (11)$$

其中动平台的运动空间 M 的阶数即为机构自由度的数目。

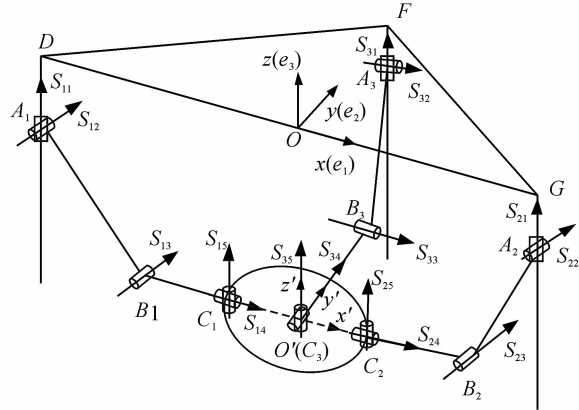
3 3-PRRU 并联机构自由度分析

图 2 为一个 3-PRRU 并联机构,其中 U 表示虎

克铰。分支一及分支二的 R 副轴线相互平行, 且与分支一及分支二上的 P 副轴线垂直。分支三上的 R 副轴线与前两个分支上的 R 副轴线相互垂直, 且与分支三上的 P 副轴线垂直。 R 副经过点 $A_i (i = 1, 2, 3)$



(a) 3-PRRU 并联机构三维图



(b) 3-PRRU 并联机构简图

图2 3-PRRU 并联机构

定平台是一个等腰三角形 $\triangle DEF$, 其形心为点 o , 且满足 $DF = FG$ 。固定坐标系 $axyz$ 如图2所示建立, 其中 x 轴沿着 OG , y 轴沿着 OF , z 轴朝上。一般位形下的结构参数如图3所示。

假设 3-PRRU 并联机构在一般位形下且未达到奇异位形。建立从动坐标系 $o'x'y'z'$ 相对于固定坐标系 $axyz$ 的 $Y-X-Z$ 欧拉角姿态变换, 即: 首先绕初始位形的 y 轴转 θ 角度, 其次绕着当前的 x 轴转过 ψ 角度, 最后绕着当前 z 轴转 ϕ 角度。旋转变换矩阵如下:

$$R = R_y(\theta)R_x(\psi)R_z(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\phi + \sin\psi\sin\theta\sin\phi & -\cos\theta\sin\phi + \sin\psi\sin\theta\cos\phi & \cos\psi\sin\theta \\ \cos\psi\sin\phi & \cos\psi\cos\phi & -\sin\psi \\ -\sin\theta\cos\phi + \sin\psi\sin\theta\sin\phi & \sin\theta\sin\phi + \sin\psi\cos\theta\cos\phi & \cos\psi\cos\theta \end{bmatrix} \quad (12)$$

机构中点 $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$ 的坐标及 U 副的转动轴线相对于固定坐标系的方向矢量如表2所示。

表2 3-PRRU 并联机构的结构参数

点	固定坐标系下的坐标	螺旋	固定坐标系下 S_{ij} 的方向矢量
A_1	$(-M, 0, -d_1)$	S_{14}	$R[1, 0, 0]^T$
A_2	$(M, 0, -d_2)$	S_{15}	$R[0, 0, 1]^T$
A_3	$(0, E, -d_3)$	S_{24}	$R[1, 0, 0]^T$
B_1	$(L_1 \cos\alpha - M, 0, -d_1 - L_1 \sin\alpha)$	S_{25}	$R[0, 0, 1]^T$
B_2	$(M - L_1 \cos\alpha, 0, -d_2 - L_1 \sin\alpha)$	S_{34}	$R[0, 1, 0]^T$
B_3	$(0, E - L_1 \cos\alpha_3, -d_3 - L_1 \sin\alpha_3)$	S_{35}	$R[0, 0, 1]^T$
C_1	$(-r \cos\theta, 0, P_z + r \sin\theta)$		
C_2	$(r \cos\theta, 0, P_z - r \sin\theta)$		
C_3	$(0, 0, P_z)$		

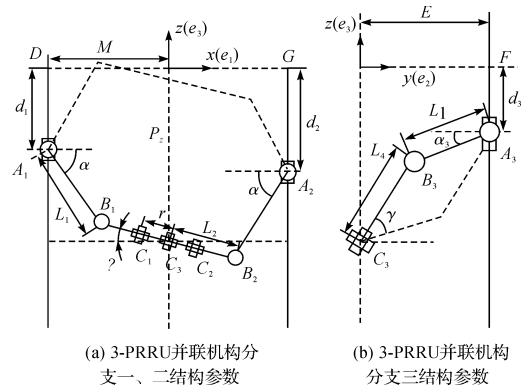


图3 3-PRRU 并联机构结构参数

分支一上的每个关节螺旋在 \mathcal{G}_6 中的表达式为:

$$\begin{cases} S_{11} = e_6 \\ S_{12} = e_2 + d_1 e_4 - M e_6 \\ S_{13} = e_2 + (d_1 + L_1 \sin\alpha) e_4 + (L_1 \cos\alpha - M) e_6 \\ S_{14} = \cos\theta e_1 - \sin\theta e_3 + P_z \cos\theta e_5 \\ S_{15} = \cos\psi \sin\theta e_1 - \sin\psi e_2 + \cos\phi \cos\theta e_3 + \\ \sin\phi (P_z + r \sin\theta) e_4 + \cos\phi (r + P_z \sin\theta) e_5 + \\ r \cos\theta \sin\phi e_6 \end{cases} \quad (13)$$

分支一上运动空间为组成该串联分支的所有关节运动子空间的并集:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_1 &= \mathbf{S}_{11} \dot{\wedge} \mathbf{S}_{12} \dot{\wedge} \mathbf{S}_{13} \dot{\wedge} \mathbf{S}_{14} \dot{\wedge} \mathbf{S}_{15} \\
&= \mathbf{S}_{11} \wedge \mathbf{S}_{12} \wedge \mathbf{S}_{13} \wedge \mathbf{S}_{14} \wedge \mathbf{S}_{15} \\
&= a(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_6 - r \cos \theta \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \\
&\quad \wedge \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_5 \wedge \mathbf{e}_6 + (r \sin \theta - P_z) \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \\
&\quad \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_5 \wedge \mathbf{e}_6) \quad (14)
\end{aligned}$$

其中 a 是一个非零标量系数,对自由度分析没有影响,可以忽略。

同理,分支二上的每个关节螺旋在 Γ_6 中的表达式为:

$$\begin{cases}
\mathbf{S}_{21} = \mathbf{e}_6 \\
\mathbf{S}_{22} = \mathbf{e}_2 + d_2 \mathbf{e}_4 + M \mathbf{e}_6 \\
\mathbf{S}_{23} = \mathbf{e}_2 + (d_2 + L_1 \sin \alpha) \mathbf{e}_4 + (M - L_1 \cos \alpha) \mathbf{e}_6 \\
\mathbf{S}_{24} = \cos \theta \mathbf{e}_1 - \sin \theta \mathbf{e}_3 + P_z \cos \theta \mathbf{e}_5 \\
\mathbf{S}_{25} = \cos \psi \sin \theta \mathbf{e}_1 - \sin \psi \mathbf{e}_2 + \cos \psi \cos \theta \mathbf{e}_3 + \\
\quad \sin \psi (P_z - r \sin \theta) \mathbf{e}_4 - \cos \psi (r - P_z \sin \theta) \mathbf{e}_5 - \\
\quad r \cos \theta \sin \psi \mathbf{e}_6
\end{cases} \quad (15)$$

分支二上运动空间为组成该串联分支的所有关节运动子空间的并集:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_2 &= \mathbf{S}_{21} \dot{\wedge} \mathbf{S}_{22} \dot{\wedge} \mathbf{S}_{23} \dot{\wedge} \mathbf{S}_{24} \dot{\wedge} \mathbf{S}_{25} \\
&= \mathbf{S}_{21} \wedge \mathbf{S}_{22} \wedge \mathbf{S}_{23} \wedge \mathbf{S}_{24} \wedge \mathbf{S}_{25} \\
&= b(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_6 + r \cos \theta \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \\
&\quad \wedge \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_5 \wedge \mathbf{e}_6 + (r \sin \theta - P_z) \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \\
&\quad \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_5 \wedge \mathbf{e}_6) \quad (16)
\end{aligned}$$

其中 b 是一个非零标量系数,对自由度分析没有影响,可以忽略。

分支三上的每个关节螺旋在 Γ_6 中的表达式为:

$$\begin{cases}
\mathbf{S}_{31} = \mathbf{e}_6 \\
\mathbf{S}_{32} = \mathbf{e}_1 - d_3 \mathbf{e}_4 - E \mathbf{e}_6 \\
\mathbf{S}_{33} = \mathbf{e}_1 - (d_3 + L_1 \sin \alpha_3) \mathbf{e}_5 + (L_1 \cos \alpha_3 - E) \mathbf{e}_6 \\
\mathbf{S}_{34} = \sin \psi \sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \psi \mathbf{e}_2 + \sin \psi \cos \theta \mathbf{e}_3 - \\
\quad P \cos \psi \mathbf{e}_4 + P_z \sin \theta \sin \psi \mathbf{e}_5 \\
\mathbf{S}_{35} = \cos \psi \sin \theta \mathbf{e}_1 - \sin \psi \mathbf{e}_2 + \cos \psi \cos \theta \mathbf{e}_3 + \\
\quad P \sin \psi \mathbf{e}_4 + P_z \sin \theta \cos \psi \mathbf{e}_5
\end{cases} \quad (17)$$

分支三上运动空间为组成该串联分支的所有关节运动子空间的并集:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_3 &= \mathbf{S}_{31} \dot{\wedge} \mathbf{S}_{32} \dot{\wedge} \mathbf{S}_{33} \dot{\wedge} \mathbf{S}_{34} \dot{\wedge} \mathbf{S}_{35} \\
&= \mathbf{S}_{31} \wedge \mathbf{S}_{32} \wedge \mathbf{S}_{33} \wedge \mathbf{S}_{34} \wedge \mathbf{S}_{35} \\
&= c(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_5 \wedge \mathbf{e}_6 + P_z \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \\
&\quad \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_5 \wedge \mathbf{e}_6) \quad (18)
\end{aligned}$$

其中 c 是一个非零标量系数,对自由度分析没有影响,可以忽略。

根据式(10)可以得到分支一和分支二的运动子空间的交集:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{12} &= \mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2 \\
&= (\mathbf{A}_1 \mathbf{I}_6^{-1}) \cdot \mathbf{A}_2 \\
&= d(P_z \cos \theta \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_5 \wedge \mathbf{e}_6 + \sin \theta \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \\
&\quad \wedge \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_6 + \cos \theta \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_6) \quad (19)
\end{aligned}$$

其中 d 是一个非零标量系数,对自由度分析没有影响,可以忽略。

根据式(11),可以得到分支一、分支二和分支三的运动子空间的交集,即:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \mathbf{A}_1 \vee \mathbf{A}_2 \vee \mathbf{A}_3 \\
&= \mathbf{A}_{12} \vee \mathbf{A}_3 \\
&= (\mathbf{A}_{12} \mathbf{I}_6^{-1}) \cdot \mathbf{A}_3 \\
&= \mathbf{M}_1 \wedge \mathbf{M}_2 \wedge \mathbf{M}_3 \\
&= f(\cos \theta \mathbf{e}_1 - \sin \theta \mathbf{e}_3 + P_z \cos \theta \mathbf{e}_5) \wedge (\mathbf{e}_2 - P_z \mathbf{e}_4) \wedge \mathbf{e}_6 \quad (20)
\end{aligned}$$

其中 f 是一个非零标量系数,对自由度分析没有影响,可以忽略不计。

式(20)表示分支一、分支二和分支三的运动子空间的交集是一个阶数为 3 的片积。这个 3 阶片积表示 3-PRRU 并联机构动平台上的运动空间,表明该机构具有 3 个自由度,分别为 $\mathbf{M}_1 = \cos \theta \mathbf{e}_1 - \sin \theta \mathbf{e}_3 + P_z \cos \theta \mathbf{e}_5$, $\mathbf{M}_2 = \mathbf{e}_2 - P_z \mathbf{e}_4$, $\mathbf{M}_3 = \mathbf{e}_6$ 。 \mathbf{M}_1 是一条与 $C_1 C_3$ 重合的直线,表示一个绕线 $C_1 C_3$ 的转动自由度。 \mathbf{M}_2 是一条经过点 C_3 且与 y 轴平行的直线,表示一个绕这条线的转动自由度。 \mathbf{M}_3 表示沿 z 轴移动的自由度。

4 结 论

本文运用几何代数对 3-PRRU 并联机构进行自由度分析,通过对 3 条 PRRU 支链的运动空间求交得到动平台运动空间的解析表达式。从该解析表达式中可以看出,该机构有 3 个自由度,分别为绕 $C_1 C_3$ 的转动、绕过点 C_3 且与 y 轴平行的直线的转动以及沿 z 轴移动。使用几何代数可直接对 3-PRRU 并联机构分支运动空间进行求交计算,这种方式更符合人对并联机构自由度的思维习惯,并且避免了约束方程的求解,使得计算过程更加简单。

参考文献:

- [1] HUNT K H. Structural kinematics of in-parallel-actuated robot arms[J]. Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation In Design, Transactions of the ASME, 1983, 105(4):705-712.
- [2] WAHI J. Articulated tool head: US6431802 B1 [P]. 2000-11-05.
- [3] BI Z M, JIN Y. Kinematic modeling of Exechon parallel kinematic machine original research article[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2011, 27(1):186-193.
- [4] CARRETERO J A, NAHON M, GOSSELIN C M, et al. Kinematic analysis of a three-dof parallel mechanism for telescope applications [C]//ASME Design Automation Conference, September 15-20, 1997, Sacramento, CA, California:1-8.
- [5] POULIOT N A, NAHON M A, GOSSELIN C M. Motion simulation capabilities of three-degrees-of-freedom flight simulators[J]. Journal of Aircraft, 1998, 35(1):9-17.
- [6] YU J J, HU Y D, BI S S, et al. Kinematics feature analysis of a 3 DOF in-parallel compliant mechanism for micro manipulation[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2004, 17(1):127-131.
- [7] LIU D, CHE R, LI Z, LUO X. Research on the theory and the virtual prototype of 3-DOF parallel-link coordinating-measuring machine [J]. IEEE Trans Instrum Meas, 2003, 52(1):119-25.
- [8] LEE K, SHAH D K. Kinematic analysis of a three degrees of freedom in-parallel actuated manipulator[J]. IEEE Journal of Robotics and Automation, 1988, 4(3): 354-360.
- [9] TSAI L W, KIM H S. Kinematic synthesis of a spatial 3-RPS parallel manipulator[J]. Journal of Mechanical Design, 2003, 125(1):92-97.
- [10] JOSHI S A, TSAI L W. Jacobian analysis of limited-DOF parallel manipulator[J]. Journal of Mechanical Design, 2002, 124(2):254-258.
- [11] CARRETERO J A, PODHODESKI R P, NAHON M A, et al. Kinematic analysis and optimization of a new three degree-offreedom spatial parallel manipulator [J]. Journal of Mechanical Design, 2000, 122(1):17-24.
- [12] IONESCU T G. Terminology for mechanisms and machine science[J]. Mechanism and Machine theory, 2003, 38(7-10): 819-825.
- [13] 黄真, 刘婧芳, 曾达幸. 基于约束螺旋理论的机构自由度分析的普遍方法[J]. 中国科学 技术科学, 2009, 39(1): 84-93.
- [14] HERVE J M. The Lie group of rigid body displacements, a fundamental tool for mechanism design[J]. Mechanism and Machine Theory, 1999, 34(5): 719-730.
- [15] STAFFETTI E. Kinestatic analysis of robot manipulators using the Grassmann-Cayley algebra[J]. Robotics and Automation, IEEE Transactions on, 2004, 20(2): 200-210.
- [16] CLIFFORD W K. Elements of Dynamic: an Introduction to the Study of Motion and Rest in Solid and Fluid Bodies [M]. London: MacMillan and Company, 1878.
- [17] HESTENES D. New Foundations for Classical Mechanics[M]. 2nd ed. Dordrecht: Springer, 1999.
- [18] BAYLIS W E. Clifford (Geometric) Algebras: with Applications in Physics, Mathematics, and Engineering [M]. Boston: Birkhuser Boston, 1996.
- [19] DE SABBATA V, DATTA B K. Geometric Algebra and Applications to Physics[M]. Florida: CRC Press, 2006.
- [20] BUCHHOLZ S. A Theory of Neural Computation with Clifford Algebras[D]. Kiel: University of Kiel, 2005.
- [21] TIRKKONEN O, HOTTINEN A. Square-matrix embeddable space-time block codes for complex signal constellations [J]. Information Theory, IEEE Transactions on, 2002, 48(2): 384-395.
- [22] SOMMER G. Applications of geometric algebra in robot vision[C]// LI H, OLVER P J, SOMMER G. Computer Algebra and Geometric Algebra with Applications. Berlin: Springer-Verlag, 2005: 258-277.
- [23] SOMMER G. Geometric Computing with Clifford Algebras: Theoretical Foundations and Applications in Computer Vision and Robotics[M]. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001.
- [24] HILDENBRAND D-I D. Geometric Computing in Computer Graphics and Robotics Using Conformal Geometric Algebra [D]. Tübingen: Universität Tübingen, 2006.
- [25] DORST L, LASENBY J. Guide to Geometric Algebra in Practice [M]. London: Springer-Verlag London, 2011.
- [26] HILDENBRAND D, ZAMORA J, BAYRO-CORROCHANO E. Inverse kinematics computation in computer graphics and robotics using conformal geometric algebra [J]. Advances in Applied Clifford Algebras, 2008, 18(3-4): 699-713.
- [27] ZAMORA J, BAYRO-CORROCHANO E. Inverse

- kinematics, fixation and grasping using conformal geometric algebra[C]// Proceeding of 2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Sendai, 2004: 3841-3846.
- [28] ARISTIDOU A, LASENBY J. Inverse kinematics solutions using conformal geometric algebra [M]// DORST L, LASENBY J. Guide to Geometric Algebra in Practice. London: Springer-Verlag London, 2011: 47-62.
- [29] ARISTIDOU A, LASENBY J. FABRIK: a fast, iterative solver for the inverse kinematics problem[J]. Graphical Models, 2011, 73(5): 243-260.
- [30] LASENBY J, FITZGERALD W J, LASENBY A N, et al. New geometric methods for computer vision: an application to structure and motion estimation [J]. International Journal of Computer Vision, 1998, 26(3): 191-213.
- [31] TANEV T K. Singularity analysis of a 4-DOF parallel manipulator using geometric algebra [M]// LENARCIC J, ROTH B. Advances in Robot Kinematics: Springer, 2006: 275-284.
- [32] Li Q, Chai X. Mobility analysis of limited-DOF parallel mechanisms in the framework of geometric algebra[J/OL]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2015. (2015-11-23) [2015-12-31]. <http://mechanismsrobotics.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=2475687>. DOI: 10.1115/1.4032210.

Mobility Analysis of a 3-PRRU Parallel Mechanism

CHAI Xinxue, LI Qinchuan

(Faculty of Mechanical Engineering and Automation, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: The 3-DOF parallel mechanism (PM) with one translational and two rotational (1T2R) DOFs is an important category of the lower-mobility PM. Mobility is a basic property of a mechanism. This paper analyzes the mobility of a 3-PRRU PM based on geometric algebra (GA). Firstly, the twist space of the limb and moving platform are represented by geometric algebra. Then, the twist space of the moving platform is obtained by taking the intersection of the twist space of all the limbs. Finally, the symbolic expression of mobility of a 3-PRRU PM is given by the basis of the twist space on the moving platform. Using GA-based method, geometric intuition is the advantage of this method. Without resorting constraint equation, the calculation is more convenient and fast.

Key words: parallel mechanism; mobility analysis; geometric algebra

(责任编辑: 康 锋)