浙江理工大学学报(社会科学版),第 34 卷,第 4 期,2015 年 8 月
Journal of Zhejiang Sci-Tech University (Social Sciences)
Vol. 34, No. 4, Aug. 2015

文章编号: 1673-3851 (2015) 04-0286-07

带预测的价格在线库存问题的竞争分析

张露萍, 韩曙光, 郭玖零
(浙江理工大学理学院, 杭州 310018)

摘　要: 对在线模型进行扩展,允许决策者提供预测并从中受益,即使预测失败,决策者也能控制风险,使得在线算法的性能相对于最优离线算法不会太差。研究分析了两种典型预测,第一种下方预测,即价格将会下降到某水平,第二种上方预测,即价格绝对不会下降到某水平。针对不同的预测设计不同的算法,并通过竞争分析的方法得到相应的竞争比。还考虑了在整个购买过程中允许进行多次预测情形,并进行敏感性分析。

关键词: 价格在线; 库存问题; 预测; 竞争分析
中图分类号: F224　　**文献标志码**: A

近年来,在经济优化领域中,在线问题与竞争分析是重要的研究方向。在线库存是传统库存与在线问题的结合,可以看作金融单向交易问题[1-4]的扩展。金融单向交易问题是寻找最高价格,尽可能把更多的货币在高价格处兑换,以获得最大利润。而价格在线的库存问题要尽可能在低价格时购买更多的货物,以最小化成本,且在线库存问题的参数更复杂。研究价格在线库存问题,改进在线问题的模型和算法,将扩展库存管理的应用范围,并增强竞争算法的理论性成果。价格在线库存问题具有一定的研究背景,如在股票基金市场也有一定的应用。在基金的建立阶段,基金经理的任务是基于股票价格在一定时期内的波动,确定购买什么股票、购买多少股票,且基金经理的目标是以最小的成本购买一定量的股票。

随着 Wilson[5] 在 1934 年提出经济批量(EOQ)模型,库存理论逐渐发展起来。在 EOQ 模型中,最优订货量通过权衡订货成本及库存成本获得。Webster 等[6]研究了在对价格敏感的随机需求情形下由生产商及销售商所组成的时尚产品供应链的订货及定价策略问题。Xie 等[7]研究了中国炼油厂的原油采购方法,在采购价格不确定性下,提出改进的采购政策。Firouzi 等[8]研究带有固定成本且供应是不确定下的两产品的库存管理问题。已有的在线库存问题的研究成果较少,Larsen 等[9]考虑了一个同时包含订购成本、库存成本及确定性需求的库存问题,根据包含的不同参数信息提出了四个模型,但只有第一个模型给出了算法竞争比,其余三个模型均只得到竞争比的上下界,且竞争比上下界的间隙随着模型复杂度的增加而增大。Ma 等[10]假设在线决策者已知价格的上界和下界,根据竞争比,提出基于单价威胁最优在线算法。然而,该算法可能过于保守。事实上,许多决策者通常会对未来做出一些假设,并愿意承担风险。Al-Binali[3]假设决策者可对价格进行预测,如果预测成功,那么会得到一个比最优保守算法更好的竞争比,否则会遭受损失,即得到一个比最优保守算法差的竞争比。Iwama 等[4]将预测的概念进行了推广,提出可以进行多次预测。Ding 等[11-12]研究了基于风险偏好的在线拍卖问题的策略,并建立风险回报框架。

同样的,在线库存问题中,决策者也会对未来价格信息做出一些预测,并愿意承担一定的风险。因此考虑带预测的在线库存问题很有必要。在设计算法时,本文在考虑利用现有经典在线算法的同时,将

收稿日期: 2014—12—19
基金项目: 国家自然科学基金项目(11201428,11471286);浙江理工大学研究生创新研究项目(YCX13005)
作者简介: 张露萍(1990—),女,浙江富阳人,硕士研究生,主要从事运筹优化与供应链管理方面的研究。
通信作者: 韩曙光,E-mail:zist001@163.com

对具体库存问题的诸多参数进行全面的考察分析，并在此基础上设计出尽量避免最坏情形的算法，以提高在线算法的性能。

一、问题描述与模型建立

（一）问题描述

价格在线库存问题中，价格是在线的，在整个购买过程中，决策者即零售商在不知道未来完全价格信息的情况下，决策何时购买、购买多少。不失一般性，库存容量设为 1，且在库存周期结束时必须达到库存容量。制定决策的目标是最小化总成本。当决策者有完整的未来价格信息时，库存问题可视为离线库存问题。在线库存问题可分为两种模型。一种称为连续模型，即决策者随时可以购买；另一种称为离散模型，即决策者只能在离散的时间步长购买。本文只考虑连续模型（类似的结果也适用于离散模型），假设决策者已知可能价格的上界 M、可能价格的下界 m 及初始价格 a。

对于价格在线库存问题，Ma 等[10] 提出基于单价威胁在线算法，虽然该算法得到最优竞争比（本文用 c_0^* 表示），但该算法可能过于保守，因为很多决策者可能会对未来价格采用一些预测。本文对在线模型进行扩展，允许决策者提供预测并从中受益，即使预测失败，决策者也能控制风险，使得在线算法的性能相对于离线最优算法而言不会太差。研究分析两种典型预测。第一种称为下方预测，即价格将至少下降到 m_1；第二种上方预测，即价格绝对不会下降到 m_1。预测价格 m_1 及风险容忍因子 $t(t>1)$ 作为算法的部分参数。如果预测成功，那么算法得到竞争比 $c_1^*(<c_0^*)$；如果预测失败，算法的竞争比不会比 tc_0^* 差，即保证最差的竞争比不会差于 tc_0^*。决策者采用预测同时承担一定风险，并能从风险中得到最优回报。此外，在整个购买过程中，允许进行多次预测。

竞争比即在线算法的性能与离线最优算法（决策者提前掌握所有信息并且能够得到最优解）的性能比，作为评估在线算法性能的指标，常用于在线决策问题。在竞争分析中，任意一个在线算法 ALG 的竞争比 c_{ALG} 定义为：$c_{ALG}=\sup\limits_{I\in\sigma}\dfrac{ALG(I)}{OPT(I)}$。其中：$\sigma$ 表示输入序列集，I 是一个任意的输入序列，$ALG(I)$ 表示 ALG 的成本，$OPT(I)$ 表示离线最优算法的成本。给定一个输入实例 I，在线决策者的目标是设计一个在线算法使得它的竞争比尽可能小。令 S 表示在线算法集，那么最优在线算法的竞争比定义为 $c^*=\inf\limits_{ALG\in S}c_{ALG}$。

（二）模型建立

对于价格在线库存问题，基于决策者所做的预测提出以下四种模型：

a）单下方预测：价格将至少下降到 m_1。

b）双下方预测：第一个下方预测为价格将至少下降到 m_1 且在第一个下方预测成功后即价格已经下降到 m_1，第二个下方预测为价格将至少下降到 m_2。

c）单上方预测：价格绝对不会下降到 m_1。

d）双上方预测：第一个上方预测为价格绝对不会下降到 m_1 且在第一个上方预测失败后即价格已经下降到 m_1，第二个上方预测为价格绝对不会下降到 m_2。

通过这些模型扩展，可以采取组合几种不同类型的灵活策略。例如，第一个上方预测失败后意味着价格已经下降到 m_1，如果第二个上方预测成功，则决策者可以再次获得 c_0^*。对于包含若干预测的价格在线库存问题，只需要对部分阶段设计最优在线算法而不是对整个购买周期。

二、基于单价威胁算法下，连续模型：已知 M、m 及 a 的竞争分析

（一）基于单价威胁策略

由单向交易的基于威胁策略得到启发，Ma 等[10] 提出基于单价威胁算法（DPTB），描述如下：

a）DPTB-1：购买结束时，确保库存容量已经达到。

b）DPTB-2：只有在当前价格为迄今为止最低时才购买物品。

c）DPTB-3：当价格达到一个新的最低点时，只购买最少的货物，使得即使以后的价格全部为最大可能的价格，竞争比 c_0 也能获得。其中 c_0 为通过某些算法可能获得的竞争比，一开始，假设在线决策者已知 c_0。

（二）连续模型的竞争分析

在这个模型中，在线决策者已知可能价格的上界值 M 和下界值 m 及初始价格 a，采用 DPTB 策略。本文假设在线决策者尽可能选择竞争比 c_0。由于离线最优算法和 DPTB 算法均在价格达到新的最低值时才购买，因此假设价格序列从 a 开始单调递减。基于 DPTB 算法，为了得到给定竞争比 c_0，决策者会针对价格在下一时刻可能会上升到 M 这个不利情况来降低风险。$q(x)$ 表示在价格 x 时购买的

总量,$v(x)$表示购买 $q(x)$数量的总成本,$d(x)$表示价格到达 x 后仍需购买的数量($d(x)=1-q(x)$)。DPTB 意味着方程 $d(x)$和 $v(x)$满足以下条件:

a) 当 $x\geqslant M/c_0$,$d(x)=1$ 且$v(x)=0$,此时不购买物品,竞争比 c_0 可以获得。

b) 当 $x<M/c_0$,

$$v(x)+Md(x)=c_0x \tag{1}$$

c) 对所有的 $x\in[m,M/c_0]$,

$$v'(x)=-xd'(x) \tag{2}$$

d) $d(m)=0$,因为当价格达到最小值时,库存将被填满。

情形 1:$a\geqslant M/c_0$

在这种情形下,对于 $x\in[a,M]$,$d(x)=1$ 且 $v(x)=0$。对于 $x\in[m,M/c_0]$,对等式(1)求导可得 $v'(x)+Md'(x)=c_0$,并结合等式(2),可得 $d'(x)=c_0/(M-x)$且 $v'(x)=-(c_0x)/(M-x)$。

$$d(x)=d\left(\frac{M}{c_0}\right)-\int_x^{\frac{M}{c_0}}\frac{c_0}{M-t}\mathrm{d}t= 1-c_0\ln\frac{c_0(M-x)}{c_0M-M} \tag{3}$$

$$v(x)=v\left(\frac{M}{c_0}\right)+\int_x^{\frac{M}{c_0}}\frac{c_0t}{M-t}\mathrm{d}t= c_0M\ln\frac{c_0(M-x)}{c_0M-M}+c_0x-M \tag{4}$$

由于 $q(x)=1-d(x)$,可得在价格 x 时购买的总量满足 $q(x)=c_0\ln\frac{c_0(M-x)}{c_0M-M}$。当且仅当 $c_0\ln\frac{c_0(M-x)}{c_0M-M}\leqslant 1$ 竞争比 c_0 可得。一般情形是初始价格未知,因此最坏的假设即 $a=M$。由条件 d)可知 $d(m)=0$,可得 $1-c_0\ln\frac{c_0(M-x)}{c_0M-M}=0$ 有根 c_0。令 $h(c_0)=1-c_0\ln\frac{c_0(M-x)}{c_0M-M}=0$,通过求导可得:

$$h'(c_0)=-\ln\left(1+\frac{M-c_0m}{M(c_0-1)}\right)+\frac{1}{c_0-1}.$$

因为 $\ln(1+x)<x$,

$$h'(c_0)>\frac{1}{c_0-1}-\frac{M-c_0m}{M(c_0-1)}=\frac{c_0m}{M(c_0-1)}>0.$$

因此 $h(c_0)$是关于 c_0 的严格单调递增函数,由于 $d(m)=0$,可得的最优竞争比 c_0^*,是以下等式唯一的根:

$$\frac{1}{c_0}-\ln\frac{c_0}{c_0-1}=\ln\frac{M-m}{M}.$$

情形 2:$a<M/c_0$

在这个情形下,由等式(1)及定义的基本特征,可得 $v(a)+Md(a)=c_0a$ 和 $v(a)=a(1-d(a))$。这便给出 $d(a)=\frac{c_0a-a}{M-a}$且 $v(a)=\frac{a(M-c_0a)}{M-a}$。因此,

$$d(x)=d(a)-\int_x^a\frac{c_0}{M-t}\mathrm{d}t= \frac{c_0a-a}{M-a}-c_0\ln\frac{M-x}{M-a} \tag{5}$$

$$v(x)=v(a)+\int_x^a\frac{c_0t}{M-t}\mathrm{d}t= \frac{a(M-c_0a)}{M-a}+c_0\left(M\ln\frac{M-x}{M-a}+x-a\right) \tag{6}$$

由于 $q(x)=1-d(x)$,可得 $q(a)=\frac{M-c_0a}{M-a}$。且在价格 x 时购买总量 $q(x)=\frac{M-c_0a}{M-a}+c_0\ln\frac{M-x}{M-a}$,当且仅当这个等式非负,竞争比 c_0 可得。显然,$d(m)=0$。

从以上结果的分析中可知如何决定可得的最优竞争比。第一步是决定竞争比 M/a 是否可得,即当且仅当 $1-\frac{M}{a}\ln\frac{M-m}{M-a}\geqslant 0$。如果这个竞争比不可得,那么属于情形 1,最优竞争比为 c_0^*。如果这个竞争比可得,属于情形 2,最优竞争比为 $c_0=\frac{1}{\left(1-\frac{M-a}{a}\ln\frac{M-m}{M-a}\right)}$。

三、带预测的多阶段购买

与上述分析类似,可假设价格序列从 a 开始单调递减。假定决策者采用下方预测 m_1,即价格将至少下降到 $m_1(m<m_1<M)$。当价格 x 处于 m_1 至 M 之间时,相比于基于单价威胁算法,决策者购买更少的物品,使得当价格到达 m_1(预测成功)可以购买更多的物品。从而决策者可以在相对较低的价格购买更多的物品,得到比基于单价威胁算法更好的竞争比。假定决策者采用上方预测 m_1,即价格将绝对不会下降至 $m_1(m<m_1<M)$。当价格 x 处于 m_1 至 M 之间时,相比于基于单价威胁算法,决策者购买更多的物品,使得当价格在下降到 m_1 之前就上升至 M 并在以后的购买周期均保持为 M(预测正确)后可以购买更少的物品,从而得到比基于单价威胁算法更好的竞争比。因此,基于预测的购买策略由两个或多个采用不同购买策略的阶段组成,并且当价格到达预测值时将这些阶段策略进行结合。令 $[N_2,N_1]$,$m\leqslant N_2<N_1\leqslant M$ 表示一个价格区间即一个购买阶段。假设在这个价格区间,采用的购买算法用 A 表示,当价格 x 属于此区间时,A 能确定 $d(x)$、$v(x)$以及竞争比 c。$d(N_1)$和 $v(N_1)$分别表示在价格区间开始前仍需购买的数量及产生的总成

本。$d(N_2)$和$v(N_2)$分别表示在价格区间结束后(如果价格到达N_2)仍需购买的数量及产生的总成本。

定理 1　假设一个算法A,满足$d(N_1)=d_1$,$v(N_1)=v_1$以及竞争比c。那么在决策者可以获得竞争比c且尽可能连续购买下,最优算法A唯一确定。

证明:从基于单价威胁算法的描述,不难看出,最优购买算法的设计可由下列基本策略得到。

a) 类似于前面的分析,当$x\geqslant M/c$,决策者不购买物品。

b) 无论何时价格上升到最大价格M,购买期间竞争比不大于c。

c) 在决定是否购买之前,如果当前仍需购买物品的数量d和已经产生的总成本v,对当前价格x及目标竞争比c满足$(Md+v)/x\leqslant c$时,决策者不购买物品。这意味着决策者可在更低的价格购买更多的物品。

情形 1:如果$N_1\geqslant M/c$,应用策略a),决策者不购买物品直到价格到达M/c。当价格到达M/c后,购买可按以下公式(与公式(3)和(4)完全相同,除了将c_0替换成c)进行:

$$d(x)=1-c\ln\frac{c(M-x)}{cM-M},$$

$$v(x)=cM\ln\frac{c(M-x)}{cM-M}+cx-M,$$

购买可连续进行直到$d(x)=0$,结束购买。

情形 2:如果$N_1<M/c$且$(Md_1+v_1)/N_1\geqslant c$,那么必须在开始时购买物品,否则如果此时价格上升,将得不到竞争比c。此时,购买物品的数量是确定的,因此仍需购买物品数量d'_1及购买后总成本v'_1满足$(Md'_1+v'_1)/N_1=c$。同时$v'_1-v_1=N_1(d_1-d'_1)$。通过计算可得$d'_1=(N_1c-v_1-N_1d_1)/(M-N_1)$且$v'_1=(Mv_1+MN_1d_1-N_1^2c)/(M-N_1)$。此后,购买可按以下公式(类似于公式(5)和(6))进行。

$$d(x)=d'_1-c\ln\frac{M-x}{M-N_1},$$

$$v(x)=v'_1+c\left(M\ln\frac{M-x}{M-N_1}+x-N_1\right).$$

情形 3:如果$N_1<M/c$且$(Md_1+v_1)/N_1<c$,应用策略c)。此时不得不等到价格下降到$\widetilde{N}_1(<N_1)$使得$(Md_1+v_1)/\widetilde{N}_1=c$,否则在价格区间$[N_2,N_1]$,不能获得一个确定的竞争比。此后,可按以下公式进行购买:

$$d(x)=d_1-c\ln\frac{M-x}{M-\widetilde{N}_1},$$

$$v(x)=v_1+c\left(M\ln\frac{M-x}{M-\widetilde{N}_1}+x-\widetilde{N}_1\right).$$

四、带预测的竞争分析

(一)单下方预测的竞争分析

在单下方预测模型中,决策者采用单下方预测m_1。运用这个单下方预测m_1设计一个最优算法A。如果价格在到达m_1之前上升至最高价格(预测失败),那么A会得到竞争比$tc_0^*$$(t>1)$(为了使购买成为可能,$m_1\leqslant M/(tc_0^*)$必须满足)。在这种情况下,设计算法$A$使得在价格下降到$m_1$后可得最优竞争比。假设初始价格$a$大于$M/c$(另一种情况的竞争分析类似,本文省略。下文对$a$做相同假设)。

定理 2　已知M、m,决策者采用单下方预测m_1且预测成功,最优竞争比c_1^*为:

$$c_1^*=\frac{1-tc_0^*\ln\dfrac{tc_0^*(M-m_1)}{tc_0^*M-M}-\dfrac{tc_0^*m_1}{M-m_1}}{\ln\dfrac{M-m}{M-m_1}-\dfrac{m_1}{M-m_1}}.$$

其中:t为风险容忍因子,c_0^*为 DPTB 算法的最优竞争比。

证明:单下方预测模型的竞争分析分以下两个阶段考虑。

a) 对于价格区间$[m_1,a]$,根据定理 1 的情形 1,本文设计竞争比为tc_0^*的最优算法。令$d_1(x)$和$v_1(x)$分别表示这个阶段下价格为x时仍需购买的物品数量及产生的总成本。那么

$$d_1(x)=1-tc_0^*\ln\frac{tc_0^*(M-x)}{tc_0^*M-M},$$

$$v_1(x)=tc_0^*M\ln\frac{tc_0^*(M-x)}{tc_0^*M-M}+tc_0^*x-M,$$

可以得到$d_1(m_1)$及$v_1(m_1)$。

b) 对于价格区间$[m,m_1]$,假设一个暂定竞争比c_1(一定比c_0^*好),很据定理 1 的情形 2,由$d_1(m_1)$、$v_1(m_1)$及c_1设计最优算法。令$d_2(x)$和$v_2(x)$表示这个阶段下价格为x时仍需购买的物品数量及产生的总成本。d和v分别表示在价格下降至m_1购买一定物品后仍需购买的物品数量及总成本。那么

$$d_2(x)=d-c_1\ln\frac{M-x}{M-m_1},$$

$$v_2(x)=v+c_1\left(M\ln\frac{M-x}{M-m_1}+x-m_1\right),$$

d和v必须满足$(Md+v)/m_1=c_1$及$v-v_1(m_1)=$

$m_1(d_1(m_1)-d)$。通过解方程,可得 d 和 v 为 $d=d_1(m_1)-(m_1tc_0^*-m_1c_1)/(M-m_1)$ 且 $v=v_1(m_1)+(m_1^2tc_0^*-m_1^2c_1)/(M-m_1)$。显然,$d_2(m)=0$,从而可得 c_1 的最优解 c_1^*。

(二)双下方预测的竞争分析

在这个模型中,为了在第一个下方预测成功后可以得到一个更好的竞争比,决策者采用两个下方预测 m_1 和 $m_2(m<m_2<m_1<M)$。在第一个下方预测成功后即价格已经下降到 m_1,第二个下方预测为价格将至少下降到 m_2。如果价格在到达 m_1 之前上升至最高价格(第一个下方预测失败),竞争比为 tc_0^*;如果价格下降至 m_1 且在到达 m_2 之前上升至最高价格(第一个下方预测成功且第二个下方预测失败),那么竞争比为 tc_1^*;如果第二个下方预测成功即价格会下降到 m_2,那么可以得到一个更好的竞争比 $c_2(c_2<c_1^*)$。整个设计过程和单下方预测是类似的,决策者通过设计每个阶段的购买策略即分别为$[m_1,a]$,$[m_2,m_1]$及$[m,m_2]$三个阶段设计相应策略从而设计整个购买过程的最优算法。

a) 第一阶段$[m_1,a]$和单下方预测的第一阶段完全相同,$d_1(m_1)$及 $v_1(m_1)$如之前所得。

b) 对于价格区间$[m_2,m_1]$,由定理 1 的情形 2,设计一个竞争比为 tc_1^* 的最优算法。可得 d 和 v 为 $d=d_1(m_1)-(m_1tc_0^*-m_1tc_1^*)/(M-m_1)$ 且 $v=v_1(m_1)+(m_1^2tc_0^*-m_1^2tc_1^*)/(M-m_1)$,同理可计算 $d_2(m_2)$及 $v_2(m_2)$。

c) 对于价格区间$[m,m_2]$,假设一个暂定竞争比 c_2(一定比 c_1^* 好),很据定理 1 的情形 2,由 $d_2(m_2)$,$v_2(m_2)$及 c_2 设计最优算法。令 $d_3(x)$表示这个阶段下价格为 x 时仍需购买的物品数量。d'和 v'分别表示在价格下降至 m_2 购买一定物品后仍需购买的物品数量及总成本。那么

$$d_3(x)=d'-c_2\ln\frac{M-x}{M-m_2},$$

d'和 v'必须满足$(Md'+v')/m_2=c_2$ 及 $v'-v_2(m_2)=m_2(d_2(m_2)-d')$,通过计算可以得到 d' 为 $d'=d_2(m_2)-(m_2tc_1^*-m_2c_2))/(M-m_2)$。显然,$d_3(m)=0$,现在可得 c_2 的最优解。

$$c_2^*=\frac{1-tc_0^*\ln\dfrac{tc_0^*(M-m_1)}{tc_0^*M-M}-\dfrac{m_1(tc_0^*-tc_1^*)}{M-m_1}-tc_1^*\ln\dfrac{M-m_2}{M-m_1}-\dfrac{m_2}{M-m_2}}{\ln\dfrac{M-m}{M-m_2}-\dfrac{m_2}{M-m_2}}.$$

(三)单上方预测的竞争分析

在这个模型中,决策者采用单上方预测 m_1 即价格将绝对不会下降到 m_1。如果价格在到达 m_1 之前上升(预测成功),决策者可以得到一个更好的竞争比 $c_1(<c_0^*)$。否则,最差竞争比为 tc_0^*。

定理 3 已知 M、m,决策者采用单上方预测 m_1 且预测成功,最优竞争比 c_1^* 为:

$$1-c_1^*\ln\frac{c_1^*(M-m_1)}{c_1^*M-M}-tc_0^*\ln\frac{M-m}{M-\dfrac{m_1c_1^*}{tc_0^*}}=0.$$

其中:t 为风险容忍因子,c_0^* 为 DPTB 算法的最优竞争比。

证明:单上方预测模型的竞争分析分以下两个阶段考虑。

a) 对于价格区间$[m_1,a]$,应用定理 1 的情形 1,c_1 为这个区间的竞争比,$d_1(x)$及 $v_1(x)$可由以下等式得到:

$$d_1(x)=1-c_1\ln\frac{c_1(M-x)}{c_1M-M},$$

$$v_1(x)=c_1M\ln\frac{c_1(M-x)}{c_1M-M}+c_1x-M,$$

可得 $d_1(m_1)$及 $v_1(m_1)$。

b) 由 $d_1(m_1)$,$v_1(m_1)$及 tc_0^* 可以设计第二阶段。因为在第一阶段,$\frac{Md_1(m_1)+v_1(m_1)}{m_1}=c_1$ 且 $c_1<c_0^*<tc_0^*$,这意味着$\frac{Md_1(m_1)+v_1(m_1)}{m_1}<tc_0^*$。在这种情况下,根据定理 1 的策略 c),应用情形 3。令 $\tilde{m}_1$ 为使$\frac{Md_1(m_1)+v_1(m_1)}{\tilde{m}_1}=tc_0^*$ 成立的价格。由于$\frac{Md_1(m_1)+v_1(m_1)}{m_1}=c_1$ 可得 $\tilde{m}_1=\frac{m_1c_1}{tc_0^*}$。因此,$d_2(x)$及 $v_2(x)$按照如下式子可得:

$$d_2(x)=d_1(m_1)-tc_0^*\ln\frac{M-x}{M-\tilde{m}_1},$$

$$v_2(x)=v_1(m_1)+tc_0^*\left(M\ln\frac{M-x}{M-\tilde{m}_1}+x-\tilde{m}_1\right).$$

显然,$d_2(m)=0$,可得 c_1 的最优值 c_1^*。

(四)双上方预测的竞争分析

在下方预测中,当价格在下降至 m_1 之前上升(预测失败),博弈结束。相反,在上方预测中,如果已知预测失败,由于价格还没有上升博弈仍然继续。在这个模型中,决策者为了在已知第一个上方预测失败后能够重新获得 c_0^*,采用两个上方预测 m_1 和 $m_2(m<m_2<m_1<M)$。第一个上方预测为价格绝对不会下降到 m_1,且在第一个上方预测失败后,即价格已经下降到 m_1,第二个上方预测为价格绝对不会下降到 m_2。如果价格在到达 m_1 之前上升(第一

个上方预测成功),决策者可以得到一个更好的竞争比 c_1^*。如果价格到达 m_1 并在到达 m_2 之前上升(第一个上方预测失败第二个上方预测成功),那么决策者可重新获得竞争比 c_0^*。如果第二个上方预测失败,假设竞争比为 c_2($>c_0^*$)。在这个模型中,预测成功的最优竞争比为 c_1^*。

a) 第一阶段$[m_1, a]$和单上方预测的第一阶段完全相同,$d_1(m_1)$及 $v_1(m_1)$如之前所得。

b) 由 $d_1(m_1)$,$v_1(m_1)$及 c_0^* 设计第二阶段,$d_2(x)$和 $v_2(x)$和单上方预测第二阶段类似,只是此时竞争比为 c_0^*,从而可得 $d_2(m_2)$及 $v_2(m_2)$。

c) 第三阶段保证竞争比为 c_2。由 $d_2(m_2)$,$v_2(m_2)$及 c_2 设计第三阶段。应用定理 1 的情形 3,令 $\tilde{m}_2$ 为使$\frac{Md_2(m_2)+v_2(m_2)}{\tilde{m}_2}=c_2$ 成立的价格。通过计算可得 $\tilde{m}_2=\frac{m_2 c_0^*}{c_2}$。从而 $d_3(x)=d_2(m_2)-c_2\ln\frac{M-x}{M-\tilde{m}_2}$。显然,$d_3(m)=0$ 可得 c_2 的最优解为:

$$c_2^*=\frac{1-c_1^*\ln\frac{c_1^*(M-m_1)}{c_1^* M-M}-c_0^*\ln\frac{M-m_2}{M-\tilde{m}_1}}{\ln\frac{M-m}{M-\tilde{m}_2}}.$$

五、敏感性分析

本节给出了数值实例来说明竞争分析的结果。取 $M=200$,$m=100$,$t=1.01$。在双下方预测及双上方预测中,均假设第一个预测 $m_1=145$。其中,DPTB 算法的最优竞争比为 $c_0^*=1.302$。

单下方预测中最优竞争比 c_1^* 与预测值 m_1 的关系如图 1(a)所示。由图 1(a)可知,随着 m_1 增大,c_1^* 几乎线性增长(变差)。如果决策者愿意冒更大的风险(选择较低的 m_1),那么如果预测成功,他将获得更多的回报。在图 1(b)显示的双下方预测中,c_2^* 小于 $c_1^*=1.2991$,说明在第一个下方预测成功后,决策者再进行下方预测可获得更好的竞争比。并且,随着 m_2 增大,c_2^* 几乎线性增长(变差)。在图 1(c)显示的单上方预测中,竞争比 c_1^* 与预测值 m_1 的关系可知,随着 m_1 增大,c_1^* 减小(变好)。显然,随着 m_1 减少,预测成功的可能性越大。在图 1(d)显示的双上方预测中,c_1 的最优值为 $c_1^*=1.2694$,即第一阶段竞争比为 $c_1^*=1.2694$,第二阶段竞争比为 $c_0^*=1.302$,第三阶段竞争比为 c_2^*。事实上,决策者已知第一个上方预测 m_1 失败后,很自然的会采用第二个上方预测 m_2 来尽量重新获得 c_0^*。

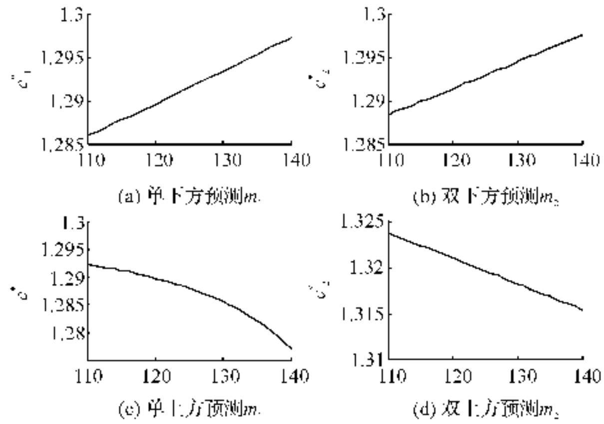

图 1　四个预测模型中预测值与竞争比相应的关系

六、结　论

本文研究了带预测的价格在线库存问题,允许决策者提供预测并从中受益(减小总成本),考虑了两种典型的预测并假设预测可进行多次,即使预测失败,总成本也能控制在一定范围之内,并通过敏感性分析得到四个预测模型中预测值与竞争比的关系。在后续研究中,可假设决策者制定更明确的预测,该预测将以一定的概率实现,这样预测成功率为该概率的函数,更符合实际。

参考文献:

[1] El-Yaniv R, Fiat A, Karp R M, et al. Optimal search and one-way trading online algorithms[J]. Algorithmica, 2001, 30(1): 101-139.

[2] Damaschke P, Ha P H, Tsigas P. Online search with time-varying price bounds[J]. Algorithmica, 2009, 55(4): 619-642.

[3] Al-Binali S. A Risk-Reward Framework for the competitive analysis of financial games[J]. Algorithmica, 1999, 25(1): 99-115.

[4] Iwama K, Yonezawa K. Using Generalized Forecasts for Online Currency Conversion[M]//Computing and Combinatorics. Springer Berlin Heidelberg, 1999: 409-421.

[5] Wilson R H. A scientific routine for stock control[J]. Harvard Business Review, 1934, 13(1): 116-129.

[6] Webster S, Kevin Weng Z. Ordering and pricing policies in a manufacturing and distribution supply chain for fashion products [J]. International Journal of Production Economics, 2008, 114(2): 476-486.

[7] Xie Z, Park C S, Zheng L. Procurement models under purchase price uncertainty for Chinese oil refineries [J]. International Journal of Production Research, 2013, 51(10): 2952-2968.

[8] Firouzi F, Baglieri E, Jaber M Y. Two-product inventory management with fixed costs and supply uncertainty[J]. Applied Mathematical Modeling, 2014, 38(23): 5635-5650.

[9] Larsen K S, Wohlk S. Competitive analysis of the online inventory problem[J]. European Journal of Operational Research, 2010, 207(2): 685-696.

[10] Ma W, Pan Y. Competitive analysis of price uncertainty inventory problem[C]//Software Engineering and Service Science (ICSESS), 2011 IEEE 2nd International Conference on. IEEE, 2011: 179-182.

[11] Ding L L, Xu Y F, Dong Y C. Strategies making for the online auction based on the risk-reward [J]. Systems Engineering, 2006, 24(7): 116-119.

[12] Ding L L, Xu Y F, Liu X M. On-line auction strategies on the internet based on risk preference[J]. Chinese Journal of Management Science, 2014, 22(3), 96-102.

Competitive Analysis of the Price Online Inventory Problem with Forecasting

ZHANG Lu-ping, *HAN Shu-guang*, *GUO Jiu-ling*

(School of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: The online model is extended to allow decision-makers to predict and benefit from it. Even if the forecast fails, decision-makers can control the risk and make the performance of the online algorithm is not too bad relative to the optimal offline algorithm. Two typical forecast models are considered in this research. The first model is below forecast, i. e. the price will drop to a certain level. The second model is above predict, i. e. the price will not drop to a certain level. Different algorithms are designed in allusion to different predictions, and the corresponding competitive ratios are gained by the competitive analysis method. The scenario of forecasting for several times allows in the entire purchase process and sensibility analysis is made.

Key words: price online; inventory problem; forecast; competitive analysis

(责任编辑: 康 锋)