

二阶多智能体系统的优化一致性协议研究

高金凤, 冯立晖, 张益波

(浙江理工大学机械与自动控制学院, 杭州 310018)

摘要: 收敛速度是衡量多智能体系统(MAS)一致性协议的重要指标,是影响系统动态性能的重要因素。将多跳式网络技术应用于多智能体系统的信息传递,使每个智能体获得自身的状态及其邻节点和邻节点的节点集的状态,由此构成的系统拓扑结构引入了虚拟连接网络。在此基础上运用线性系统理论与矩阵论,提出了二阶连续时间线性多智能体系统优化的一致性协议,并利用图的代数连通度性质说明了协议的有效性。数值仿真验证了该优化协议可使多智能体系统的状态快速达到一致,说明提出的协议具有较快的收敛速度。

关键词: 多智能体系统; 一致性; 收敛速度; 数值仿真

中图分类号: TP1 **文献标志码:** A

0 引言

一致性研究是多智能体系统的一个基础问题,设计多智能体控制协议时必须保证该协议能够使系统的状态达到一致。二十世纪六十年代,一致性理论首次被应用于统计学中。以此为起点,分布式计算在计算机领域开始得到发展。1987年 Reynolds^[1]出了 Boid 模型,该模型用简单的规则来描述自然群体的集体行为。1995年 Vicsek 等^[2]开创性地利用仿真模拟一群粒子的一致行为。Olfati-Saber 等^[3]则提出了多智能体系统一致性问题的理论框架,设计了经典的平均一致性协议,得出了收敛速度是一致性协议的一个重要指标的结论,该指标取决于系统拓扑结构的代数连通度,同时该平均一致性协议也被引入到对称时滞系统中。Ren 等^[4]针对二阶多智能体系统设计了一致性协议,应用于微飞行器的高度一致控制中。Song^[5]等设计了一种适用于非线性领导者-跟随者多智能体系统的一致性协议,并在多智能体系统的定位中得到应用。Li 等^[6]从考虑系统收敛率和稳态误差方面出发,研究了更为复杂的带有噪声测量的多智能体系统。

在实际应用中,多智能体系统应具有较快的收

敛速度^[3],而运用好的一致性协议是使得系统获得较快收敛速度的有效方法。文献[7-8]提出了基于有限时间稳定性理论的一阶模型有限时间一致性协议,提高系统的收敛速度。Jin 等^[9]则在邻接网络的基础上提出了多跳网络,通过提高网络拓扑的代数连通度,加快多智能体系统达到一致性的速度。

当前对于有限时间一致性的研究均以不牺牲网络资源为前提,未考虑调整系统的拓扑结构。本文提出了一种优化的一致性协议,通过适当的增加虚拟拓扑结构,将多跳网络应用于具有无向拓扑结构的二阶多智能体系统,并采用数值仿真实验以验证该协议的有效性。

1 预备知识

考虑一个由 N 个智能体组成的多智能体系统,其交互拓扑结构可表示为 $G=(V,E,A_g)$ 。其中, G 是一个有向权重图; $V=\{v_1,v_2,\dots,v_N\}$ 表示系统的节点集,节点 v_i 表示多智能体系统的第 i 个智能体; E 表示边集, $e(i,j)\in E$ 表示从节点 v_i 到节点 v_j 的一条有向边,即智能体 v_j 可直接获得智能体 v_i 的信息,节点 v_i 称为父节点,节点 v_j 称为子节点; $N_i=\{v_j\in V|(j,i)\in E\}$ 表示节点 v_i 邻节点集合;

$A_g = (a_{ij}) \in R^{N \times N}$ 表示图 G 的邻接矩阵, a_{ij} 表示非负权重, $a_{ii} = 0, a_{ij} > 0 \Leftrightarrow j \in N_i$. $\deg_{in}(i) = \sum_{j=1}^N a_{ij}$ 为节点 v_i 的入度。有向图 G 的拉普拉斯矩阵 $L_g = D - A_g$, 其中 $D = \text{diag}(\deg_{in}(1), \dots, \deg_{in}(N))$ 称为入度矩阵。如果 $\deg_{in}(i) = \deg_{out}(i), i = 1, 2, \dots, N$, 则称此图为平衡图。

全文中出现的部分符号说明如下: $1_n = (1, 1, \dots, 1)^T \in R^n; 0_n = (0, 0, \dots, 0)^T \in R^n; I_n$ 表示 $n \times n$ 维的单位对角阵; $0_{m \times n}$ 表示 $m \times n$ 维的零矩阵; 对于一个给定的矩阵 X, X^T 表示 X 的转置, $\text{rank}(X)$ 表示 X 的秩, $\dim(X)$ 表示 X 的维数。

2 主要结论

考虑由 n 个智能体组成的二阶线性多智能体系统, 其中第 i 个智能体可描述为:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = s_i \\ \dot{s}_i = u_i \end{cases} \quad (1)$$

其中, $x_i \in R, s_i \in R$ 表示智能体节点 v_i 的两个状态。

常规二阶线性多智能体系统的控制输入 u_i 描述如下:

$$u_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} [(x_j - x_i) + \gamma(s_j - s_i)] \quad (2)$$

其中, a_{ij} 表示智能体节点 v_i 和 v_j 之间的连接权重, 若智能体节点 v_i 和 v_j 之间有信息传递, 则 $a_{ij} \neq 0$, 否则 $a_{ij} = 0$ 。

鉴于收敛速度对于一致性协议的重要性, 本文从获得更好的收敛特性出发, 提出了改进的一致性协议:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = s_i \\ \dot{s}_i = u_i \\ u_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \left[(x_j - x_i) + \sum_{k=1}^n a_{jk} (x_k - x_i) + \gamma(s_j - s_i) + \gamma \sum_{k=1}^n a_{jk} (s_k - s_i) \right] \end{cases} \quad (3)$$

其中: a_{ij} 表示图的邻接矩阵 A_g 中第 i 行第 j 列的元素, a_{jk} 表示图的邻接矩阵 A_g 中第 j 行第 k 列的元素, γ 表示比例因子。协议(3)中智能体 v_i 不仅可获得自身和邻节点的状态, 同时还可获得邻节点的邻节点集的状态, 因此邻节点的邻节点集合可以视为和智能体 v_i 之间存在虚拟连接, 则虚拟拓扑结构可用 \tilde{G} 表示。 \tilde{A}_g, \tilde{L}_g 分别表示虚拟拓扑结构的邻接矩阵和拉普拉斯矩阵。

A_g 为平衡图 G 的邻接矩阵, 可得图 G 的拉普拉斯矩阵 L_g 为:

$$l_{ij} = \begin{cases} \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}, & i \neq j \\ -a_{ij}, & i = j \end{cases} \quad (4)$$

其中, l_{ij} 是拉普拉斯矩阵 L_g 第 i 行第 j 列的元素。令 N_i 表示所有与智能体节点 v_i 邻接的节点的标号集合, N_{ij} 表示所有与 N_i 中节点邻接的节点的标号集合。则虚拟图 \tilde{G} 的邻接矩阵和该图的拉普拉斯矩阵 \tilde{A}_g, \tilde{L}_g 的元素分别如下:

$$\tilde{a}_{ik} = \sum_{j=1}^N a_{ij} a_{jk} \quad (5)$$

$$\tilde{l}_{ik} = \begin{cases} \sum_{k=1, k \neq i}^N \tilde{a}_{ik}, & i \neq k \\ -\tilde{a}_{ik}, & i = k \end{cases} \quad (6)$$

若图 G 的拓扑结构是平衡图, 则不难证明图 \tilde{G} 的拓扑结构也是平衡图。其合成拓扑结构可表示为 $\bar{G} = G + \tilde{G}$, 因此 $\bar{L}_g = L_g + \tilde{L}_g$ 。

式(3)可变换为:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = s_i \\ \dot{s}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} [(x_j - x_i) + \gamma(s_j - s_i)] + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ij} a_{jk} [(x_k - x_i) + \gamma(s_k - s_i)] \end{cases} \quad (7)$$

令 $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)^T, x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 可得:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_n \\ L_g + \tilde{L}_g & \gamma(L_g + \tilde{L}_g) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_n \\ \bar{L}_g & \gamma \bar{L}_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} \quad (8)$$

由此, 改进的多智能体系统的一致性问题的求解问题可看作是对式(8)根的求解问题。式(8)能够达成一致, 那么必然存在一个 E 使得决策值 $x^* = E(x^T(0), s^T(0))^T$ 成立, 且 $E \in R^{n \times 2n}$ 满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{Pt} = (E^T, \dots, E^T)^T$ 。而闭环系统存在 E 的充要条件为^[10]:

A1) $R(P) = R(P^2)$;

A2) P 的特征值是 0 或者均具有负实部;

A3) 如果 0 是 P 的一个特征值, 对于 $\xi \in N(P)$, 存在一个向量 $b \in R^n$, 使得 $\xi = 1_{2n} \otimes b$ 。

综上, 求解特征多项式 $\det(\lambda I_{2n} - P) = 0$, 可得

$$\det(\lambda I_{2n} - P) = \det \begin{bmatrix} \lambda I_n & -I_n \\ -\bar{L}_g & \lambda I_n - \gamma \bar{L}_g \end{bmatrix} \quad (9)$$

λI_n 为对称矩阵, 且本文讨论的系统具有平衡拓扑结构, 因此其拉普拉斯矩阵 \bar{L}_g 为对称矩阵; 由此可得块矩阵 λI_n 和 $-\bar{L}_g$ 可交换。由分块矩阵行列式性质, 若块矩阵 λI_n 和 $-\bar{L}_g$ 可交换, 则式(9)可表示为

$$\det(\lambda I_{2n} - P) = \det \begin{bmatrix} \lambda I_n & -I_n \\ -\bar{L}_g & \lambda I_n - \gamma \bar{L}_g \end{bmatrix} \\ = \det(\lambda^2 I_n - (1 + \lambda \gamma) \bar{L}_g) \quad (10)$$

$$\det(\lambda I_n - \bar{L}_g) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \mu_i) \quad (11)$$

其中, μ_i 为 \bar{L}_g 的第 i 个特征值。

由式(10)、(11)可得:

$$\det(\lambda^2 I_n - (1 + \lambda \gamma) \bar{L}_g) = \prod_{i=1}^n (\lambda^2 + (1 + \lambda \gamma) \mu_i) \quad (12)$$

因此,可得矩阵 P 的特征值为:

$$\lambda_{i\pm} = (-\gamma \mu_i \pm \sqrt{\gamma^2 \mu_i^2 - 4 \mu_i}) / 2 \quad (13)$$

由拉普拉斯矩阵性质可知,矩阵 \bar{L}_g 至少存在一个零特征值,那么由式(13)可知矩阵 P 至少存在两个零特征值,即 $\lambda_{1+} = \lambda_{1-} = 0$,且其零特征值的个数为矩阵 \bar{L}_g 的两倍。由矩阵 \bar{L}_g 的非零特征值均具有负实部,则同理可得矩阵 P 的非零特征值也具有负实部。

综上所述,可知式(3)使得多智能体系统一致性可达的充要条件如定理1描述。

定理1 当且仅当以下条件成立时,协议(3)可使二阶线性多智能体系统达到渐近一致:

B1) 矩阵 \bar{L}_g 有且仅有一个零特征值,且其非零特征值均有负实部;

B2) 当 t 足够大时,

$$\begin{cases} x(t) \rightarrow 1_n p^T x(0) + t 1_n p^T s(0) \\ s(t) \rightarrow 1_n p^T s(0) \end{cases} \quad (14)$$

其中, $p \in R^n$ 为属于矩阵 \bar{L}_g 的零特征值的左特征向量,且 $p^T 1_n = 1$ 。

证明:(充分性)令 V' 是属于 P 的零特征值的特征向量, $V' = [\alpha^T, \beta^T]^T$, 其中 $\alpha, \beta \in R^n$, 可得:

$$\begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_n \\ \bar{L}_g & \gamma \bar{L}_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_n \\ 0_n \end{bmatrix} \quad (15)$$

由式(15)可得:

$$\begin{cases} \bar{L}_g \alpha = 0_n \\ \beta = 0_n \end{cases} \quad (16)$$

则 α 是属于 \bar{L}_g 的零特征值的特征向量。因为 \bar{L}_g 有且仅有一个零特征值,所以 P 矩阵有且仅有两个零特征值。即属于矩阵 \bar{L}_g 的零特征值的线性无关特征向量有且仅有 α , 那么属于 P 的零特征值的线性无关特征向量有且仅有 $V' = [\alpha^T, 0_n^T]^T$ 。即属于 P 的零特征值的几何重数为1。

P 矩阵可写成约当标准型:

$$P = Q J Q^{-1} = [\omega_1, \dots, \omega_{2n}]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0_{1 \times (2n-2)} \\ 0 & 0 & 0_{1 \times (2n-2)} \\ 0_{(2n-2) \times 1} & 0_{(2n-2) \times 1} & J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ \vdots \\ V_{2n}^T \end{bmatrix} \quad (17)$$

其中, $\omega_j \in R^{2n}$ ($j=1, \dots, 2n$) 和 $V_j \in R^{2n}$ ($j=1, \dots, 2n$) 分别为矩阵 P 的右左特征向量或广义特征向量, J_2 是由属于 P 矩阵的非零特征向量的约当块组成的上三角块矩阵。

不失一般性的,选取特定 $\omega_1 = [1_n^T, 0_n^T]^T$, $\omega_2 = [0_n^T, 1_n^T]^T$, 那么易证 ω_1 和 ω_2 分别是属于矩阵 P 的零特征值的特征向量和广义特征向量。因为 \bar{L}_g 有且仅有一个零特征值,所以存在一个非负向量 p , 使得 $p^T \bar{L}_g = 0$ 且 $p^T 1_n = 1$ 。由矩阵 P 和矩阵 \bar{L}_g 的关系可得, $V_1 = [p^T, 0_n^T]^T$, $V_2 = [0_n^T, p^T]^T$ 是属于矩阵 P 的零特征值的特征向量和广义特征向量, 且 $V_1^T \omega_1 = 1$, $V_2^T \omega_2 = 1$ 。矩阵 P 的特征值 $\lambda_{j+}, \lambda_{j-}$ ($j=2, 3, \dots, n$) 均有负实部, 有如下式:

$$e^{Pt} = Q J Q^{-1} = [\omega_1, \dots, \omega_{2n}] \\ \begin{bmatrix} 1 & t & 0_{1 \times (2n-2)} \\ 0 & 1 & 0_{1 \times (2n-2)} \\ 0_{(2n-2) \times 1} & 0_{(2n-2) \times 1} & e^{J_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ \vdots \\ V_{2n}^T \end{bmatrix} \quad (18)$$

当 t 足够大时收敛于

$$\begin{bmatrix} 1_n p^T & t 1_n p^T \\ 0_{n \times n} & 1_n p^T \end{bmatrix} \quad (19)$$

即当 t 足够大时可得式(14), 则可得 $|x_i(t) - x_j(t)|$ 和 $|s_i(t) - s_j(t)|$ 均收敛于零。充分性得证。

(必要性)假设条件 B1) 不成立, 即矩阵 \bar{L}_g 有多于一个零特征值或其非零特征值有正实部, 那么矩阵 P 具有多于两个零特征值或其非零特征值亦具有正实部。因此, 上述充分性证明不可得。因此条件 B1) 成立。

假设属于矩阵 P 的特征向量分别表示为: $\eta_1 = \eta_2 = 0$ 为零特征向量, $\eta_k, \text{Re}(\eta) \geq 0$ 为非零特征向量, 其中 $k=1, 2, \dots, 2n$, $\text{Re}(\cdot)$ 表示实部。令矩阵 P 的约当标准型 $J = [j_{kl}]$, 那么 $j_{kk} = \eta_k, k=1, 2, \dots, 2n$ 。因此, $\lim_{t \rightarrow \infty} j_{kk}^t \neq 0, k=1, 2, 3$ 。可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{Jt}$ 的前三列线性无关。因此 $\text{rank}(\lim_{t \rightarrow \infty} e^{Jt}) \geq 3, \text{rank}(\lim_{t \rightarrow \infty} e^{P_t}) \geq 3$ 。当且仅当 $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{Jt} \rightarrow \text{diag}[1_n p^T, 1_n q^T]$ 时系统的一致性渐近可达, 其中, p, q 为 n 维的向量。因为, $\text{rank}(\lim_{t \rightarrow \infty} e^{Jt}) \leq 2$ 。必要性得证。

引理2^[9] 假设有向图 G 是对称连通的, 则 $\lambda_2(\bar{L}_g) \geq \lambda_2(L_g)$ 。

根据引理2, 如果图 G 是连通且对称的, $\lambda_2(\bar{L}_g) \geq \lambda_2(L_g)$ 。因为图的拉普拉斯矩阵的第二最

小特征值越大,系统的收敛速度越快,因此可知协议(3)的收敛速度快于协议(2)。

3 数值仿真

考虑一个由3个智能体组成的多智能体系统,分别用1、2、3表示。系统动态特性可描述为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

该系统的拓扑结构用图 G_1 表示,带虚拟连接的拓扑结构用图 \bar{G}_1 表示,分别如图1和图2所示。

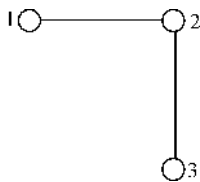


图1 平衡拓扑结构图 G_1

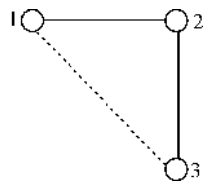


图2 带虚拟连接的拓扑结构图 \bar{G}_1

平衡图 $G_1 = (V, E, A_g)$, 图1中的所有连接权值均为1, 即 $a_{ij} = 1, (i, j = 1, 2, 3)$ 。显然此多智能体系统的拓扑结构具有生成树, 带虚拟连接的系统同样有生成树。

由此, 系统的拉普拉斯矩阵 L_g 和带虚拟连接的拉普拉斯矩阵 \bar{L}_g 分别为:

$$L_g = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \bar{L}_g = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

任取系统各初始状态分别为: $\gamma = 0.5, [x_1 \ s_1]^T = [0 \ 0]^T, [x_2 \ s_2]^T = [1 \ 0]^T, [x_3 \ s_3]^T = [3 \ 2]^T$ 。图3与图4以智能体3为例, 分别列出每个状态收敛特性, 其中虚线表示智能体节点在常规协议^[4]下的收敛特性, 实线表示本文协议下智能体节点的收敛特性。由图可知, 本文提出的协议收敛特性明显优于常规协议的收敛特性。

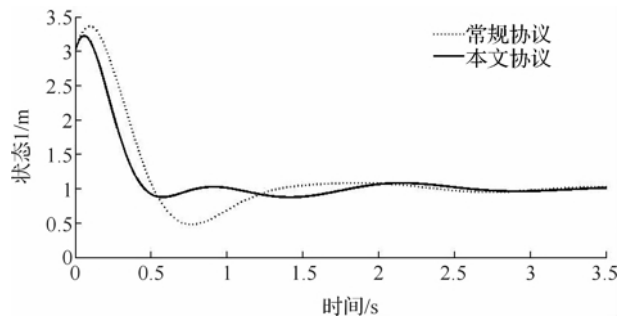


图3 智能体3状态 x 的收敛曲线

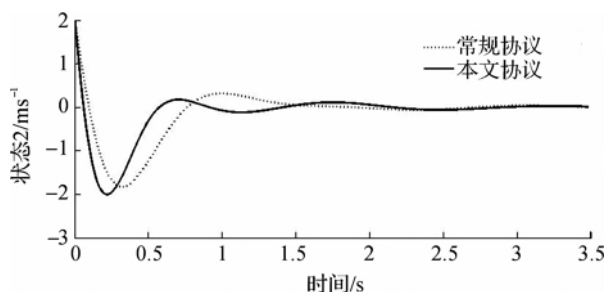


图4 智能体3状态 s 的收敛曲线

4 结论

鉴于收敛速度对于多智能体系统一致性的重要性, 本文将多跳式技术应用于二阶多智能体系统, 提出了一类优化的一致性协议, 用以解决具有平衡拓扑结构的二阶线性多智能体系统的快速一致性问题。在该协议下, 每个智能体可与邻节点以及邻节点的邻节点集进行状态信息交互, 由此构成了虚拟的网络连接, 该虚拟连接与系统的拓扑结构共同组成了多智能体系统的通信拓扑, 即合理增加系统的数据通信量达到提高系统收敛速度的目的。根据矩阵论相关性质, 系统通信拓扑图的拉普拉斯矩阵的第二最小特征值大于系统拓扑图的拉普拉斯矩阵的第二最小特征值, 因此系统的收敛速度得到提高, 即系统的性能得到一定的提升。本文给出了该优化协议使得多智能体系统达到一致性的充要条件, 并通过数值仿真验证了此一致性协议的有效性和快速性。

本文的理论推导均在平衡拓扑下进行, 未考虑有向拓扑的情况, 虽然仿真验证其亦适用于有向拓扑结构, 但本文没有进行理论证明, 有待下一步研究。

参考文献:

- [1] Reynolds C W. Flocks herds and schools a distributed behavioral model[J]. Computer Graphics, 1987, 21(4): 25-34.
- [2] Vicsek T, Czirok A, Jacob E, et al. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles [J]. Physical Review Letters, 1995, 75(6): 1226-1229.
- [3] Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(9): 1520-1533.
- [4] Ren W, Atkins E. Second-order Consensus Protocols in Multiple Vehicle Systems with Local Interactions[C]// AIAA Guidance Navigation and Control Conference and Exhibit, 2005: 1-13.

- [5] Song Q, Cao J, Yu W. Second-order leader-following consensus of nonlinear multi-agent systems via pinning control[J]. Systems & Control Letters, 2010, 59(9): 553-562.
- [6] Li T, Wu F K, Zhang J F. Multi-Agent consensus with Relative-State-Dependent measurement noises[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(9): 2463-2468.
- [7] Wang L, Xiao F. Finite-Time consensus problems for networks of dynamic agents[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(4): 950-955.
- [8] Wang F, Chen X, He Y. Finite-time consensus of second-order multi-agent systems with jointly-connected topologies [C]//33rd Chinese Control Conference (CCC), 2014: 1662-1667.
- [9] Jin Z P, Murray R M. Multi-Hop relay protocols for fast consensus seeking[C]//45th IEEE Conference on Decision and Control, 2006: 1001-1006.
- [10] Xiao F, Wang L. Consensus problems for high-dimensional multi-agent systems[J]. Control Theory & Applications, IET, 2007, 1(3): 830-837.

Study on Optimization Consensus Protocol of Second-order Multi-agent System

GAO Jin-feng, FENG Li-hui, ZHANG Yi-bo

(School of Mechanical Engineering& Automation, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: Convergence speed is a significant index to measure consensus protocol of multi-agent system (MAS). Besides, it is also an important factor influencing system dynamic property. Multi-hop network technique is applied in information transfer of MAS so that each agent can get its owns states as well as the state of its neighbors and its instantaneous neighbors. Topological structure of the system is introduced in virtual connecting network. On this basis, the linear system theory and matrix analysis are applied to obtain consensus protocol of second-order continuous time linear multi-agent system. And algebraic graph theory is also used to illustrate the effectiveness of the proposed protocol. Numerical simulation verifies this optimization protocol can make the state of MAS reach consensus quickly. This indicates the proposed protocol owns fast convergence speed.

Key words: multi-agent system; consensus; convergence speed; numerical simulation

(责任编辑: 康 锋)